

2019-2020 学年黑龙江省哈尔滨市南岗区萧红中学九年级（上）

开学数学试卷（五四学制）

一、选择题（每小题 3 分，共计 30 分）

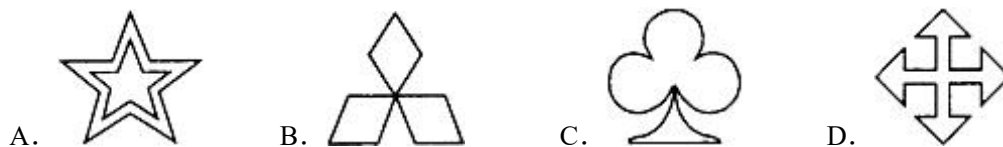
1. 实数 -2 , $-\sqrt{3}$, -0.2 , $\frac{1}{7}$, $\sqrt{4}$, π 中, 无理数的个数是 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

2. 下列运算中, 正确的是 ()

- A. $x^3 \cdot x^2 = x^5$ B. $(x^2)^3 = x^5$
C. $2x^3 \div x^2 = x$ D. $-(x-1) = -x-1$

3. 下列图形中, 对称轴条数最多的是 ()



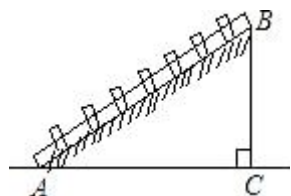
4. 下列命题中正确的是 ()

- A. 对角线互相垂直的四边形是菱形
B. 对角线相等的四边形是矩形
C. 对角线相等且互相垂直的四边形是菱形
D. 对角线相等的平行四边形是矩形

5. 制造一种产品, 原来每件成本是 100 元, 由于连续两次降低成本, 现在的成本是 81 元, 则平均每次降低的百分率是 ()

- A. 8.5% B. 9% C. 9.5% D. 10%

6. 如图, 修建抽水站时, 沿着倾斜角为 30° 的斜坡铺设管道, 若量得水管 AB 的长度为 80 米, 那么点 B 离水平面的高度 BC 的长为 ()



- A. $\frac{80}{3}\sqrt{3}$ 米 B. $40\sqrt{3}$ 米 C. 40 米 D. 10 米

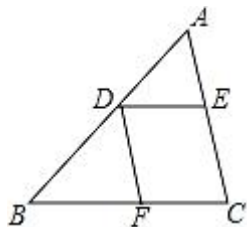
7. 直线 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 与坐标轴分别交于 A 、 B 两点, O 为坐标原点, 则 $\triangle AOB$ 的面积是 ()

- A. 4.5 B. 6 C. 9 D. 18

8. 反比例函数 $y = \frac{m-1}{x}$ 的图象在第一、三象限，则 m 的取值范围是（ ）

- A. $m \geq 1$ B. $m \leq 1$ C. $m > 1$ D. $m < 1$

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 边上一点， $DE \parallel BC$ ， $DF \parallel AC$ ，下列结论正确的是（ ）



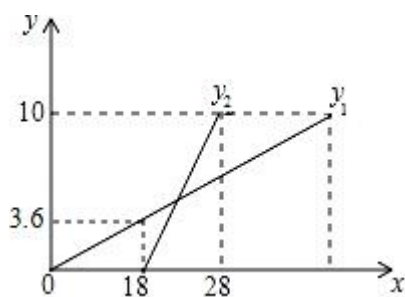
- A. $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{AC}$ B. $\frac{DE}{BF} = \frac{AE}{AC}$ C. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ D. $\frac{AD}{BD} = \frac{DF}{AC}$

10. 甲、乙两人以相同路线前往距离学校 10km 的科技中心参观学习. 图中 y_1 与 y_2 分别表示

甲、乙两人前往目的地所走的路程 y (km) 随时间 x (分) 变化的函数图象. 以下说法:

- ①乙比甲提前 12 分钟到达;
②甲的平均速度为 15 千米/小时;
③乙走了 5.5km 后遇到甲;
④当乙到达时甲距离科技中心 4.4km .

其中正确的结论有（ ）



- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

二、填空题（每小题 3 分，共计 30 分）

11. 数字 72000 用科学记数法表示为_____.

12. 函数 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

13. 不等式组 $\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ x+5 \geq 0 \end{cases}$ 的解集为_____.

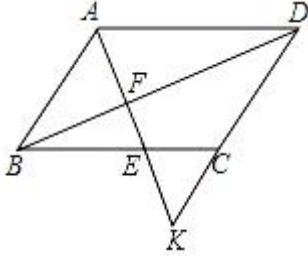
14. 把多项式 $2a^2 - 4ab + 2b^2$ 分解因式的结果是_____.

15. 如果 $x=2$ 是方程 $x^2 - kx - k + 5 = 0$ 的一个根，那么 k 的值等于_____.

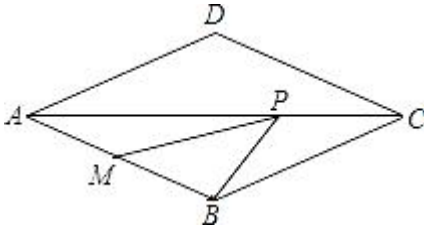
16. 在反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象上有两点 $(-\frac{1}{2}, y_1)$, $(-2, y_2)$, 则 y_1 _____ y_2 . (填 “>”)

或“<”)

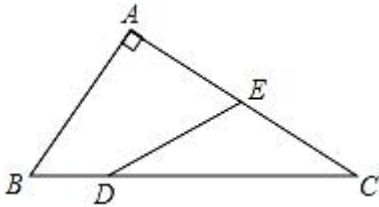
17. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为 BC 边上的点，连接 AE 交 BD 于 F ， AE 的延长线与 DC 的延长线交于点 K ，若 $BE:EC=5:4$ ，则 $BF:FD$ 等于_____.



18. 等腰三角形中，腰长为 $4\sqrt{5}cm$ ，底边长 $8cm$ ，则它的顶角的正切值是_____.
19. 如图，菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD=60^\circ$ ， M 是 AB 的中点， P 是对角线 AC 上的一个动点，若 $PM+PB$ 的最小值是 3，则 AB 长为_____.



20. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ，点 D 、 E 分别在 BC 、 AC 上， $AC=CD$ ， $2\angle EDC=\angle B$ ， $AB=3$ ， $CE=2$ ， $AE=$ _____.



三、解答题（其中 21-22 题各 7 分，23-24 题各 8 分，25-27 题各 10 分，共计 60 分）

- 21.（7 分）先化简，再求值： $(x - \frac{x}{x+1}) \div (1 + \frac{1}{x^2-1})$ ，其中 $x=2\cos 45^\circ + 2\cos 60^\circ$.
- 22.（7 分）图 1，图 2 均为正方形网格，每个小正方形的边长均为 1，各个小正方形的顶点叫做格点，请在下面的网格中按要求分别画图，使得每个图形的顶点均在格点上.
- （1）画一个边长均为整数的等腰三角形，且面积等于 12；
- （2）画一个直角三角形，且三边长为 $\sqrt{5}$ ， $2\sqrt{5}$ ，5，并直接写出这个三角形的面

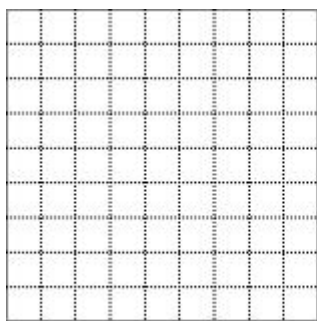


图1

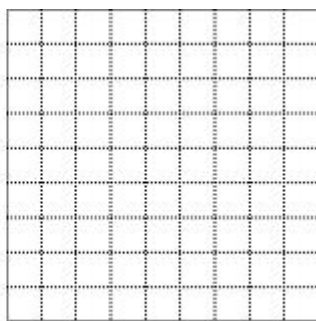


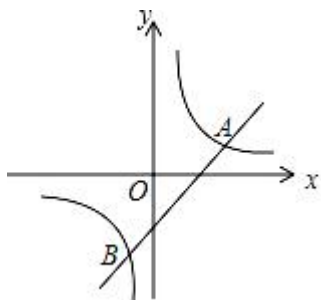
图2

积.

23. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=ax+b$ ($a \neq 0$) 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象交于点 $A(4, 1)$ 和 $B(-1, n)$.

(1) 求 n 的值和直线 $y=ax+b$ 的表达式;

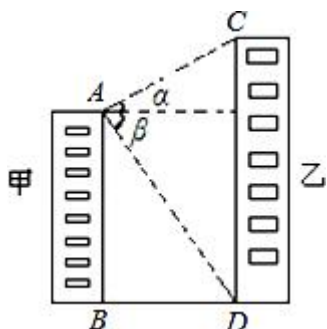
(2) 根据这两个函数的图象，直接写出不等式 $ax+b-\frac{k}{x} < 0$ 的解集.



24. 如图甲楼 AB 的高为 40 米，小华从甲楼顶 A 测乙楼顶 C 仰角为 $\alpha=30^\circ$ ，观测乙楼的底部 D 俯角为 $\beta=45^\circ$;

(1) 求甲、乙两楼之间的距离;

(2) 求乙楼的高度 (结果保留根号).



25. 某商场销售一批 A 型衬衫，平均每天可售出 20 件，每件赢利 40 元，为了增加盈利并尽快减少库存，商场决定采取适当降价措施，经调查发现，如果每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可多售出 2 件.

(1) 若商场平均每天赢利 1200 元，每件衬衫应降价多少元?

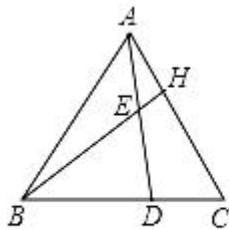
(2) 在(1)的定价情况下, 衬衫的成本是 100 元, 为了更快的盈利和清理库存, 商店选择一种领带与 A 型衬衫成套出售, 领带按照标价的 8 折出售, 领带标价是其进价的 2 倍, 要使每套的利润率不低于 40%, 则选择的领带的成本至少多少钱?

26. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 点 D 、 H 分别在边 BC 、 AC 上, BH 与 AD 交于点 E , $\angle BAC = \angle BED$.

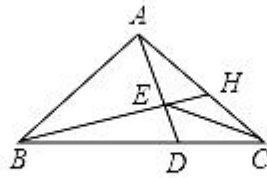
(1) 如图①, 若 $\angle BAC=60^\circ$, 求证: $BD=CH$;

(2) 如图②, 连接 EC , 若 $BE=2AE$, 求证: $\angle BED=2\angle DEC$.

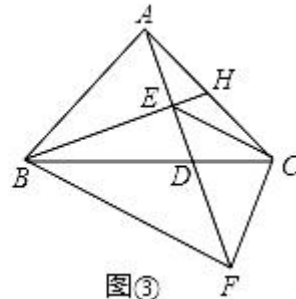
(3) 在(2)的条件下, 延长 AE 至点 F , 连接 BF 、 CF , $\angle ABE+\angle ACE+\angle BFE=90^\circ$, $\angle BFC=90^\circ$, $DE=\sqrt{2}$, 求 CH 的长.



图①



图②



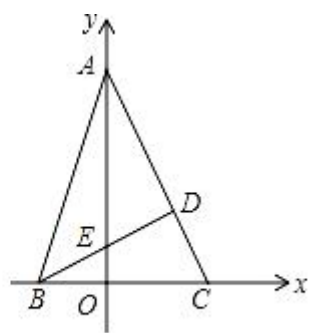
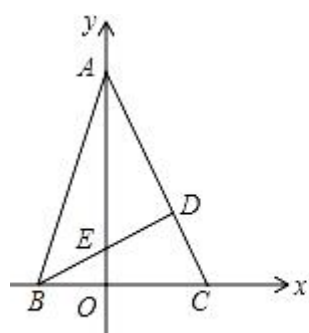
图③

27. 如图, 平面直角坐标系中, 点 O 为坐标原点, $\triangle ABC$ 的顶点 B 、 C 的坐标分别为 $(a, 0)$, $(b, 0)$, 并且 a 、 b 满足 $|a+2| = -b^2+6b-9$. 顶点 A 在 y 轴的正半轴上, $\triangle ABC$ 的高 BD 交线段 OA 于点 E , E 点坐标为 $(0, 1)$, 且 D 点恰在 AB 的垂直平分线上.

(1) 求 A 点坐标;

(2) 动点 P 从点 O 出发沿线段 OA 以每秒 1 个单位的速度向终点 A 运动, 动点 Q 从 C 出发沿折线 $C-O-y$ 轴负方向以每秒 4 个单位长度的速度运动. P 、 Q 两点同时出发, 且 P 点到达 A 处时, P 、 Q 两点同时停止运动. 设点 P 的运动时间为 t 秒, $\triangle BPQ$ 的面积为 S , 请用含 t 的式子表示 S , 并直接写出相应的 t 的取值范围;

(3) 在(2)问的条件下, 是否存在 t 值, 使得 $\triangle BPQ$ 是以坐标轴为对称轴的等腰三角形? 若存在, 请求出符合条件的 t 值; 若不存在, 请说明理由.



备用图

2019-2020 学年黑龙江省哈尔滨市南岗区萧红中学九年级（上）

开学数学试卷（五四学制）

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 3 分，共计 30 分）

1. 实数 -2 , $-\sqrt{3}$, -0.2 , $\frac{1}{7}$, $\sqrt{4}$, π 中, 无理数的个数是 ()

- A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【解答】解: 实数 -2 , $-\sqrt{3}$, -0.2 , $\frac{1}{7}$, $\sqrt{4}$, π 中, 无理数有: $-\sqrt{3}$ 、 π , 共两个.

故选: A.

2. 下列运算中, 正确的是 ()

- A. $x^3 \cdot x^2 = x^5$ B. $(x^2)^3 = x^5$
C. $2x^3 \div x^2 = x$ D. $-(x-1) = -x-1$

【解答】解: A、 $x^3 \cdot x^2 = x^{3+2} = x^5$, 故本选项正确;

B、 $(x^3)^2 = x^{3 \times 2} = x^6$, 故本选项错误;

C、 $2x^3 \div x^2 = 2x^{3-2} = 2x$, 故本选项错误;

D、 $-(x-1) = -x+1$, 故本选项错误;

故选: A.

3. 下列图形中, 对称轴条数最多的是 ()



【解答】解: A、共有 5 条对称轴;

B、共有 3 条对称轴;

C、共有 1 条对称轴;

D、共有 4 条对称轴;

所以, 对称轴条数最多的是 A 选项图形.

故选: A.

4. 下列命题中正确的是 ()

- A. 对角线互相垂直的四边形是菱形
B. 对角线相等的四边形是矩形

C. 对角线相等且互相垂直的四边形是菱形

D. 对角线相等的平行四边形是矩形

【解答】解：对角线互相垂直平分的四边形是菱形，故 A 、 C 错误；

对角线相等的平行四边形是矩形，故 B 错误， D 正确．

故选： D ．

5. 制造一种产品，原来每件成本是 100 元，由于连续两次降低成本，现在的成本是 81 元，则平均每次降低的百分率是（ ）

A. 8.5%

B. 9%

C. 9.5%

D. 10%

【解答】解：设平均每次降低的百分率为 x ，

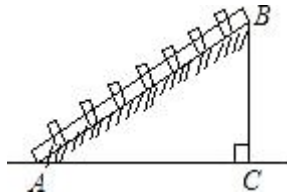
根据题意，得

$$100(1-x)^2=81$$

解得： $x=0.1$ ， $x=1.9$ （舍去）．

故选： D ．

6. 如图，修建抽水站时，沿着倾斜角为 30° 的斜坡铺设管道，若量得水管 AB 的长度为 80 米，那么点 B 离水平面的高度 BC 的长为（ ）



A. $\frac{80}{3}\sqrt{3}$ 米

B. $40\sqrt{3}$ 米

C. 40 米

D. 10 米

【解答】解：在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=30^\circ$ ，

$$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 80=40 \text{ 米}.$$

故选： C ．

7. 直线 $y=\frac{1}{2}x+3$ 与坐标轴分别交于 A 、 B 两点， O 为坐标原点，则 $\triangle AOB$ 的面积是（ ）

A. 4.5

B. 6

C. 9

D. 18

【解答】解： \because 令 $y=0$ ，则 $x=-6$ ，令 $x=0$ ，则 $y=3$ ，

$\therefore A(-6, 0)$ 、 $B(0, 3)$ ，

$$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 6\times 3=9.$$

故选： C ．

8. 反比例函数 $y = \frac{m-1}{x}$ 的图象在第一、三象限, 则 m 的取值范围是 ()

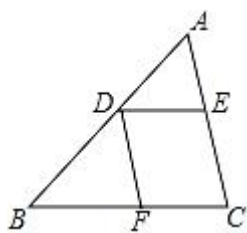
- A. $m \geq 1$ B. $m \leq 1$ C. $m > 1$ D. $m < 1$

【解答】解: \because 反比例函数 $y = \frac{m-1}{x}$ 的图象在第一、三象限,

$\therefore m - 1 > 0$, 解得 $m > 1$.

故选: C.

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 边上一点, $DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$, 下列结论正确的是 ()



- A. $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{AC}$ B. $\frac{DE}{BF} = \frac{AE}{AC}$ C. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ D. $\frac{AD}{BD} = \frac{DF}{AC}$

【解答】解: $\because DE \parallel BC$,

$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$, 故 A 错误,

$\because DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$,

\therefore 四边形 $DFCE$ 是平行四边形,

$\therefore DE = CF$, $DF = CE$,

$\because DE \parallel BC$,

$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$, 故 B 错误;

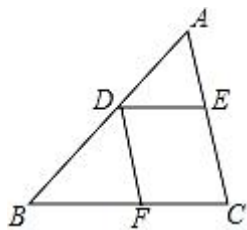
$\because DE \parallel BC$,

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, 故 C 正确;

$\because DE \parallel BC$, $DF \parallel AC$,

$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{CF}{BF} = \frac{AE}{CE}$, 故 D 错误.

故选: C.

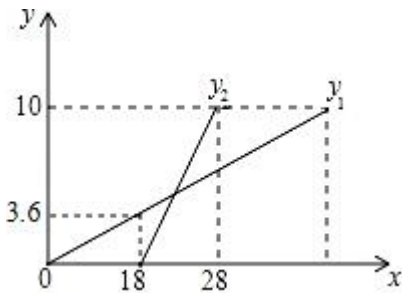


10. 甲、乙两人以相同路线前往距离学校 10km 的科技中心参观学习. 图中 y_1 与 y_2 分别表示

甲、乙两人前往目的地所走的路程 y (km) 随时间 x (分) 变化的函数图象. 以下说法:

- ①乙比甲提前 12 分钟到达;
- ②甲的平均速度为 15 千米/小时;
- ③乙走了 5.5km 后遇到甲;
- ④当乙到达时甲距离科技中心 4.4km .

其中正确的结论有 ()



- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【解答】解: ①乙比甲提前 $50 - 28 = 22$ 分钟到达, 所以①错误;

②甲的速度为: $\frac{10}{50} = 0.2$ ($\text{km}/\text{分}$) $= 12$ ($\text{km}/\text{小时}$), 所以②错误;

③ $y_1 = 0.2x$ ($0 \leq x \leq 50$), $y_2 = x - 18$ ($18 \leq x \leq 50$),

当 $y_1 = y_2$ 时, 即 $0.2x = x - 18$, 解得 $x = 22.5$,

则 $y_2 = 22.5 - 18 = 4.5$ (km), 即乙走了 4.5km 后遇到甲, 所以③错误;

④甲行驶 28 分钟所走的路程为 $28 \times 0.2 = 5.6$ (km), 则当乙到达时甲距离科技中心的距离为 $10\text{km} - 5.6\text{km} = 4.4\text{km}$, 所以④正确.

故选: D.

二、填空题 (每小题 3 分, 共计 30 分)

11. 数字 72000 用科学记数法表示为 7.2×10^4 .

【解答】解: 数字 72000 用科学记数法表示为 7.2×10^4 ,

故答案为: 7.2×10^4 .

12. 函数 $y = \frac{x+1}{x-3}$ 中自变量 x 的取值范围是 $x \neq 3$.

【解答】解: 根据题意得: $x - 3 \neq 0$, 解得: $x \neq 3$.

13. 不等式组 $\begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ x + 5 \geq 0 \end{cases}$ 的解集为 $x \geq 2$.

【解答】解： $\begin{cases} 2x-4 \geq 0 \textcircled{1} \\ x+5 \geq 0 \textcircled{2} \end{cases}$,

由①得, $x \geq 2$,

由②得, $x \geq -5$,

所以, 不等式组的解集是 $x \geq 2$.

故答案为: $x \geq 2$.

14. 把多项式 $2a^2 - 4ab + 2b^2$ 分解因式的结果是 $2(a-b)^2$.

【解答】解: $2a^2 - 4ab + 2b^2$,

$= 2(a^2 - 2ab + b^2)$, \cdots (提取公因式)

$= 2(a-b)^2$. \cdots (完全平方公式)

15. 如果 $x=2$ 是方程 $x^2 - kx - k + 5 = 0$ 的一个根, 那么 k 的值等于 3 .

【解答】解: 将 $x=2$ 代入方程 $x^2 - kx - k + 5 = 0$, 即可得到 $4 - 3k + 5 = 0$, 则 $k=3$.

16. 在反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象上有两点 $(-\frac{1}{2}, y_1)$, $(-2, y_2)$, 则 y_1 $>$ y_2 . (填 “ $>$ ” 或 “ $<$ ”)

【解答】解: \because 反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 的图象上有两点 $(-\frac{1}{2}, y_1)$, $(-2, y_2)$,

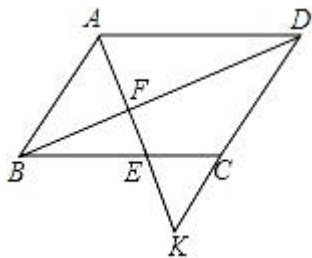
$\therefore y_1 = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} = 4$, $y_2 = -\frac{2}{-2} = 1$.

$\because 4 > 1$,

$\therefore y_1 > y_2$.

故答案为: $>$.

17. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为 BC 边上的点, 连接 AE 交 BD 于 F , AE 的延长线与 DC 的延长线交于点 K , 若 $BE:EC=5:4$, 则 $BF:FD$ 等于 $\frac{5}{9}$.



【解答】解: \because 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AB = CD$,

$\because AB \parallel CK$,

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle KCE,$$

$$\therefore \frac{AB}{CK} = \frac{BE}{CE} = \frac{5}{4},$$

$$\because AB \parallel KD,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle KDF,$$

$$\therefore \frac{BF}{DF} = \frac{AB}{KD} = \frac{5}{5+4} = \frac{5}{9}.$$

故答案为 $\frac{5}{9}$.

18. 等腰三角形中，腰长为 $4\sqrt{5}cm$ ，底边长 $8cm$ ，则它的顶角的正切值是 $\frac{4}{3}$.

【解答】解：过点 A 作 $AD \perp BC$ 于点 D ，过点 C 作 $CE \perp AB$ 于点 E ，

$$\because AB = AC = 4\sqrt{5}, BC = 8,$$

$$\therefore BD = 4,$$

$$\therefore \text{由勾股定理可求得：} AD = 8,$$

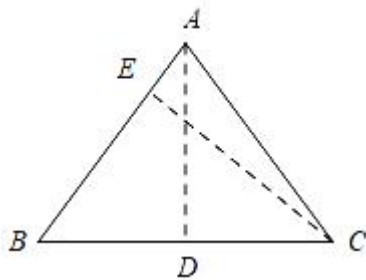
$$\therefore \frac{1}{2}CE \cdot AB = \frac{1}{2}BC \cdot AD,$$

$$\therefore CE = \frac{16\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore \text{由勾股定理可知：} AE = \frac{12\sqrt{5}}{5},$$

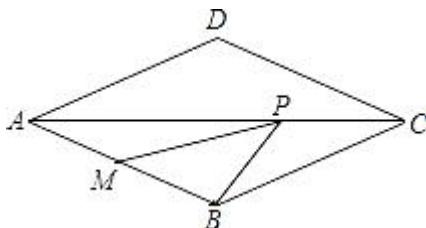
$$\therefore \tan \angle EAC = \frac{CE}{AE} = \frac{4}{3},$$

故答案为： $\frac{4}{3}$



19. 如图，菱形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 60^\circ$ ， M 是 AB 的中点， P 是对角线 AC 上的一个动点，

若 $PM + PB$ 的最小值是 3，则 AB 长为 $2\sqrt{3}$.



【解答】解：连接 PD ， BD ，

$$\because PB=PD,$$

$$\therefore PM+PB=PM+PD,$$

连接 MD ，交 AC 的点就是 P 点，根据两点间直线最短，

\therefore 这个 P 点就是要的 P 点，

$$\text{又} \because \angle BAD=60^\circ, AB=AD,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，

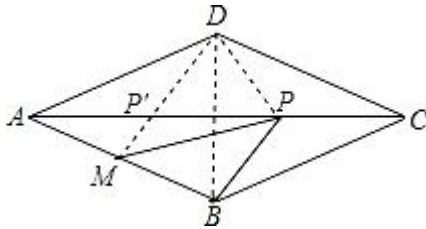
$\because M$ 为 AB 的中点，

$$\therefore MD \perp AB,$$

$$\because MD=3,$$

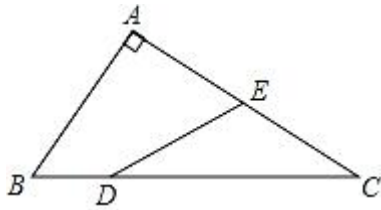
$$\therefore AD=MD \div \sin 60^\circ = 3 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB=2\sqrt{3}.$$



20. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ，点 D 、 E 分别在 BC 、 AC 上， $AC=CD$ ， $2\angle EDC=\angle B$ ，

$$AB=3, CE=2, AE=\underline{6}.$$



【解答】解：作 $EG \parallel AB$ 交 BC 于 G ，如图所示：

则 $\angle CGE=\angle B$ ， $\triangle CEG \sim \triangle CAB$ ，

$$\therefore \frac{EG}{AB} = \frac{CE}{AC}, \text{ 即 } \frac{EG}{3} = \frac{2}{AC},$$

$$\therefore EG \times AC = 6,$$

$$\because 2\angle EDC = \angle B, \angle CEG = \angle EDC + \angle GED,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle GED,$$

$$\therefore EG = DG,$$

设 $AE=x$ ， $EG=DG=y$ ，

则 $CD=AC=x+2$, $CG=CD-DG=x+2-y$, $y(x+2)=6$, 即 $xy+2y=6$ ①,

$\because EG \parallel AB$,

$\therefore \angle CEG = \angle BAC = 90^\circ$,

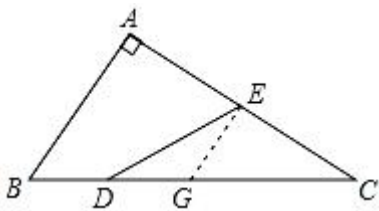
在 $\text{Rt}\triangle CEG$ 中, 由勾股定理得: $y^2+2^2=(x+2-y)^2$ ②,

由①②得: $x^2+4x-12=0$,

解得: $x=6$, 或 $x=-2$ (舍去),

$\therefore AE=6$;

故答案为: 6.



三、解答题 (其中 21-22 题各 7 分, 23-24 题各 8 分, 25-27 题各 10 分, 共计 60 分)

21. (7 分) 先化简, 再求值: $(x - \frac{x}{x+1}) \div (1 + \frac{1}{x^2-1})$, 其中 $x=2\cos 45^\circ + 2\cos 60^\circ$.

【解答】解: $\because x=2\cos 45^\circ + 2\cos 60^\circ$,

$$\therefore x=2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \sqrt{2} + 1,$$

$$\text{原式} = \frac{x(x+1)-x}{x+1} \div \frac{x^2-1+1}{x^2-1}$$

$$= \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$= x - 1,$$

把 $x=\sqrt{2}+1$ 代入上式, 原式 $= \sqrt{2}$.

22. (7 分) 图 1, 图 2 均为正方形网格, 每个小正方形的边长均为 1, 各个小正方形的顶点叫做格点, 请在下面的网格中按要求分别画图, 使得每个图形的顶点均在格点上.

(1) 画一个边长均为整数的等腰三角形, 且面积等于 12;

(2) 画一个直角三角形, 且三边长为 $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$, 5, 并直接写出这个三角形的面

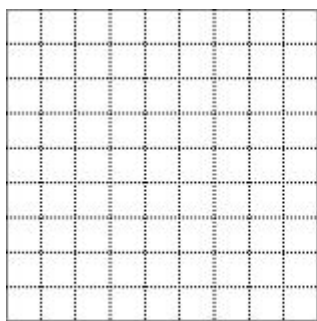


图1

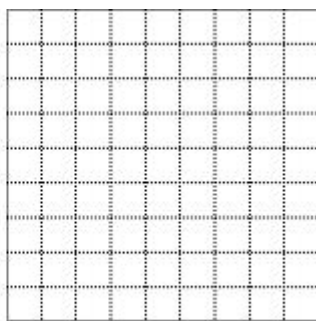


图2

积.

【解答】解：（1）如图所示， $\triangle ABC$ 即为所求；

（2）如图所示， $\triangle DEF$ 即为所求；

$$S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 5.$$

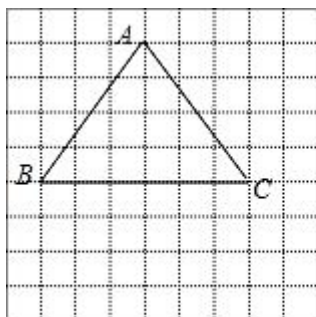


图1

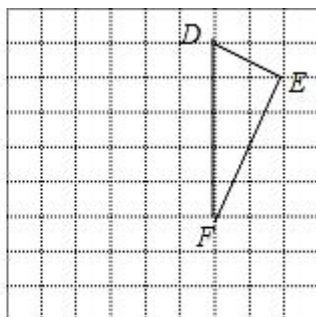


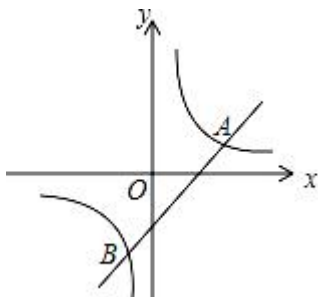
图2

23. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=ax+b$ ($a \neq 0$) 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$

($k \neq 0$) 的图象交于点 $A(4, 1)$ 和 $B(-1, n)$.

(1) 求 n 的值和直线 $y=ax+b$ 的表达式；

(2) 根据这两个函数的图象，直接写出不等式 $ax+b-\frac{k}{x} < 0$ 的解集.



【解答】解：（1）把点 $A(4, 1)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ ，解得 $k=4$.

把点 $B(-1, n)$ 代入 $y=\frac{4}{x}$ ，解得 $n=-4$.

点 $A(4, 1)$ 和 $B(-1, -4)$ 代入 $y=ax+b$

$$\text{得} \begin{cases} 4k + b = 1 \\ -k + b = -4 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

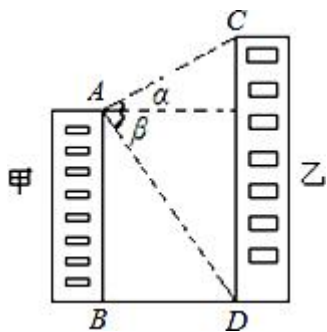
∴ 一次函数的表达式为 $y = x - 3$.

(2) 观察图象可知: $ax + b - \frac{k}{x} < 0$ 的解集为: $x < -1$ 或 $0 < x < 4$.

24. 如图甲楼 AB 的高为 40 米, 小华从甲楼顶 A 测乙楼顶 C 仰角为 $\alpha = 30^\circ$, 观测乙楼的底部 D 俯角为 $\beta = 45^\circ$;

(1) 求甲、乙两楼之间的距离;

(2) 求乙楼的高度 (结果保留根号).



【解答】解: (1) 过点 A 作 $AE \perp CD$ 于 E ,

则四边形 $ABDE$ 为矩形,

$$\therefore DE = AB = 40 \text{ 米},$$

$$\because \beta = 45^\circ,$$

$$\therefore AE = DE = 40 \text{ 米}$$

即两楼之间的距离为 40 米;

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中,

$$\because \alpha = 30^\circ, AE = 40 \text{ 米},$$

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \tan 30^\circ,$$

$$\therefore CE = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{40\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{则楼高为: } DE + CE = 40 + \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ (米)}.$$

$$\text{答: 乙楼的高度为 } \left(40 + \frac{40\sqrt{3}}{3}\right) \text{ 米}.$$

25. 某商场销售一批 A 型衬衫, 平均每天可售出 20 件, 每件赢利 40 元, 为了增加盈利并

尽快减少库存，商场决定采取适当降价措施，经调查发现，如果每件衬衫每降价 1 元，商场平均每天可多售出 2 件.

(1) 若商场平均每天赢利 1200 元，每件衬衫应降价多少元？

(2) 在 (1) 的定价情况下，衬衫的成本是 100 元，为了更快的盈利和清理库存，商店选择一种领带与 A 型衬衫成套出售，领带按照标价的 8 折出售，领带标价是其进价的 2 倍，要使每套的利润率不低于 40%，则选择的领带的成本至少多少钱？

【解答】解：(1) 设每件衬衫应降价 x 元，则每天多销售 $2x$ 件，由题意，得

$$(40 - x)(20 + 2x) = 1200,$$

解得： $x_1 = 20$ ， $x_2 = 10$ ，

∵ 要增加盈利并尽快减少库存，

∴ 每件衬衫应降价 20 元；

(2) 设选择的领带的成本为 y 元，由题意，得

$$(40 - 20) + (0.8 \times 2y - y) \geq (100 + y) \times 40\%,$$

解得 $y \geq 100$.

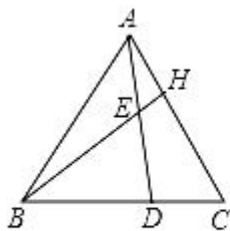
答：选择的领带的成本至少 100 元.

26. 已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，点 D 、 H 分别在边 BC 、 AC 上， BH 与 AD 交于点 E ， $\angle BAC = \angle BED$.

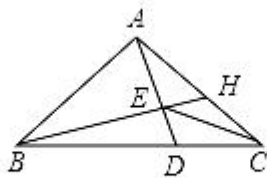
(1) 如图①，若 $\angle BAC = 60^\circ$ ，求证： $BD = CH$ ；

(2) 如图②，连接 EC ，若 $BE = 2AE$ ，求证： $\angle BED = 2\angle DEC$.

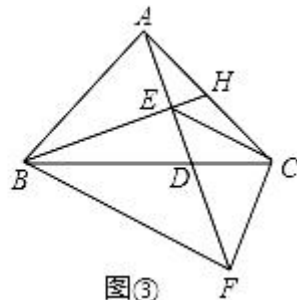
(3) 在 (2) 的条件下，延长 AE 至点 F ，连接 BF 、 CF ， $\angle ABE + \angle ACE + \angle BFE = 90^\circ$ ， $\angle BFC = 90^\circ$ ， $DE = \sqrt{2}$ ，求 CH 的长.



图①

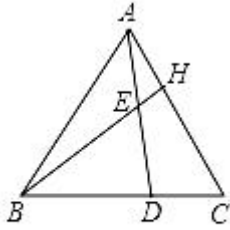


图②



图③

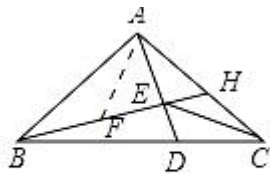
【解答】(1) 证明：如图①中，



图①

$\because AB=AC, \angle BAC=60^\circ$,
 $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle BAC=\angle C=60^\circ$,
 $\because \angle BAC=\angle BED$,
 $\therefore \angle ABH+\angle BAE=\angle BAE+\angle DAC$,
 $\therefore \angle ABH=\angle DAC$,
 $\therefore \triangle BAH\cong\triangle ACD$,
 $\therefore AH=CD$,
 $\because BC=AC$,
 $\therefore BD=CH$.

(2) 证明：如图②中，取 BE 的中点 F ，连接 AF 。

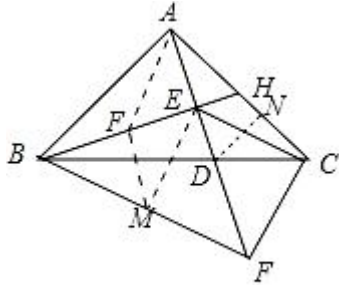


图②

$\because BE=2AE, BF=EF$,
 $\therefore AE=EF$,
 $\therefore \angle EAF=\angle EFA$,
 $\therefore \angle BED=\angle EAF+\angle EFA=2\angle EFA$,
 $\because AB=AC, \angle FBA=\angle EAC, BF=AE$,
 $\therefore \triangle BAF\cong\triangle EAC$,
 $\therefore \angle BFA=\angle AEC$,
 $\therefore \angle EFA=\angle DEC$,

$$\therefore \angle BED = 2\angle DEC.$$

(3) 解：取 BE 的中点 F ，连接 AF 。作 $EM \perp BF$ 于 M ， $DN \perp AC$ 于 N ，连接 FM 。



图③

$\because \angle ABE = \angle CAD$, $\angle ABE + \angle ACE + \angle BFE = 90^\circ$, $\angle FEC = \angle ACE + \angle DAC = \angle ACE + \angle ABF$,

$$\therefore \angle BFE + \angle FEC = 90^\circ,$$

$$\because \angle MEF + \angle AFB = 90^\circ, \angle BFE + \angle EFC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle MEF = \angle FEC = \angle EFC,$$

$$\therefore CF = CE,$$

$$\because \angle BEF = 2\angle FEC,$$

$$\therefore \angle BEM = \angle FEM = \angle CEF,$$

$$\because \angle EBM + \angle BEM = 90^\circ, \angle EFB + \angle MEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle EFB,$$

$$\therefore EB = EF,$$

$$\therefore BM = MF,$$

$$\because BF = FE,$$

$$\therefore FM \parallel EF, FM = \frac{1}{2}EF,$$

$$\because EF = BE = 2AE,$$

$$\therefore FM = AE,$$

\therefore 四边形 $AEMF$ 是平行四边形,

$$\therefore AF = EM = EC = CF,$$

$$\because EM \parallel CF,$$

\therefore 四边形 $ECFM$ 是平行四边形,

$$\because CE=CF, \angle EMF=90^\circ,$$

\therefore 四边形 $ECFM$ 是正方形,

$$\therefore \angle FEM = \angle FEC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = 2\angle FEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ, \angle ABE = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle CAD = 90^\circ,$$

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \tan \angle ABE = \frac{AE}{BE} = \frac{AH}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AB = AC = 2AH,$$

$$\therefore AH = CH, \text{ 设 } EH = a, \text{ 则 } AE = 2a, BE = 4a, AB = AC = 2\sqrt{5}a,$$

$$\because \tan \angle DAN = \frac{DN}{AN} = \frac{1}{2}, DN = CN,$$

$$\therefore CN = DN = \frac{1}{3}AC = \frac{2\sqrt{5}}{3}a,$$

$$\because AD = \sqrt{5}DN,$$

$$\therefore 2a + \sqrt{2} = \frac{10}{3}a,$$

$$\therefore a = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

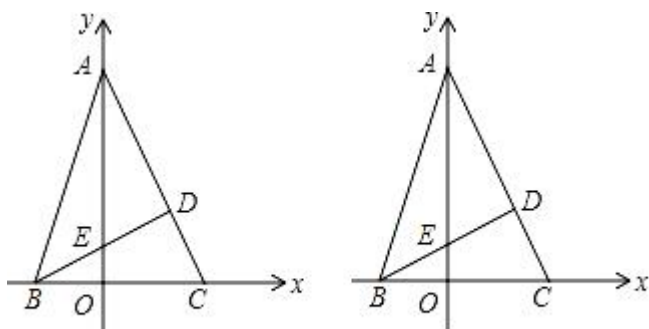
$$\therefore CH = \sqrt{5}a = \frac{3\sqrt{10}}{4}.$$

27. 如图, 平面直角坐标系中, 点 O 为坐标原点, $\triangle ABC$ 的顶点 B 、 C 的坐标分别为 $(a, 0)$, $(b, 0)$, 并且 a 、 b 满足 $|a+2| = -b^2 + 6b - 9$. 顶点 A 在 y 轴的正半轴上, $\triangle ABC$ 的高 BD 交线段 OA 于点 E , E 点坐标为 $(0, 1)$, 且 D 点恰在 AB 的垂直平分线上.

(1) 求 A 点坐标;

(2) 动点 P 从点 O 出发沿线段 OA 以每秒 1 个单位的速度向终点 A 运动, 动点 Q 从 C 出发沿折线 $C-O-y$ 轴负方向以每秒 4 个单位长度的速度运动. P 、 Q 两点同时出发, 且 P 点到达 A 处时, P 、 Q 两点同时停止运动. 设点 P 的运动时间为 t 秒, $\triangle BPQ$ 的面积为 S , 请用含 t 的式子表示 S , 并直接写出相应的 t 的取值范围;

(3) 在 (2) 问的条件下, 是否存在 t 值, 使得 $\triangle BPQ$ 是以坐标轴为对称轴的等腰三角形? 若存在, 请求出符合条件的 t 值; 若不存在, 请说明理由.



备用图

【解答】解：（1）如图 1 中，作 $DF \perp OC$ 于 F ．

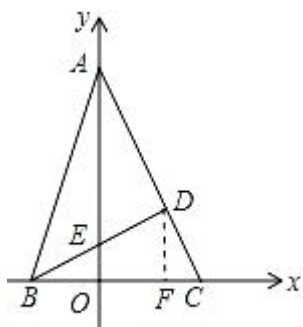


图 1

$$\because |a+2| = -b^2 + 6b - 9.$$

$$\therefore |a+2| + (b-3)^2 = 0,$$

$$\because |a+2| \geq 0, (b-3)^2 \geq 0,$$

$$\therefore a = -2, b = 3,$$

$$\therefore B(-2, 0), C(3, 0),$$

$$\because E(0, 1),$$

$$\therefore OB = 2, OE = 1, OC = 3,$$

$$\therefore BE = \sqrt{OB^2 + OE^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

又 $\because D$ 在 AB 的垂直平分线上, $AD \perp AC$,

$$\therefore \angle BOE = \angle BDC,$$

$$\because \angle EBO = \angle CBD,$$

$$\therefore \triangle BOE \sim \triangle BDC,$$

$$\therefore \frac{OB}{BD} = \frac{EO}{CD} = \frac{BE}{BC},$$

$$\therefore \frac{2}{BD} = \frac{1}{DC} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore BD = 2\sqrt{5}, CD = \sqrt{5},$$

$$\therefore BE = DE = \sqrt{5},$$

$$\because EO \parallel DF,$$

$$\therefore OB = OF = 2,$$

$$\therefore DF = 2OE = 2,$$

$$\therefore D(2, 2),$$

$$\text{设直线 } AD \text{ 的解析式是 } y = kx + b, \text{ 则 } \begin{cases} 2k + b = 2 \\ 3k + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -2 \\ b = 6 \end{cases},$$

$$\text{则直线 } AD \text{ 的解析式是 } y = -2x + 6,$$

$$\therefore A(0, 6).$$

$$(2) \text{ 当 } 0 \leq t \leq \frac{3}{4} \text{ 时, } Q \text{ 在线段 } OC \text{ 上, 则 } PB = 5 - 4t, OP = t,$$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2}PB \cdot OP = \frac{1}{2}t(5 - 4t), \text{ 即 } S = -2t^2 + \frac{5}{2}t;$$

$$\text{当 } \frac{3}{4} < t \leq 6 \text{ 时, } Q \text{ 在 } y \text{ 轴的负半轴上, } P \text{ 在线段 } OA \text{ 上, } OP = t, OQ = 4t - 3,$$

$$\text{则 } PQ = t + (4t - 3) = 5t - 3.$$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2}PQ \cdot OB = \frac{1}{2} \times (5t - 3) \times 2 = 5t - 3.$$

$$(3) \text{ 当对称轴是 } y \text{ 轴时, } Q \text{ 在 } OC \text{ 上, 此时 } 0 \leq t \leq \frac{3}{4}, OQ = 3 - 4t, \text{ 则 } OQ = OA, \text{ 即 } 3 - 4t = 2,$$

$$\text{解得: } t = \frac{1}{4};$$

$$\text{当 } x \text{ 轴是对称轴时, } \frac{3}{4} < t \leq 6 \text{ 时, } Q \text{ 在 } y \text{ 轴的负半轴上, } P \text{ 在线段 } OA \text{ 上, } OP = t, OQ = 4t - 3,$$

$$OP = OQ, \text{ 则 } t = 4t - 3,$$

$$\text{解得: } t = 1.$$

$$\text{总之, } t = \frac{1}{4} \text{ 或 } 1.$$