提分专练(五)**四边形的有关计算与证明**

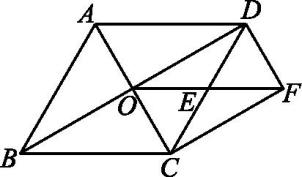


id:2147492545;FounderCES

1*.*[2019·新疆生产建设兵团] 如图T5-1,在菱形*ABCD*中,对角线*AC*,*BD*相交于点*O*,*E*是*CD*中点,连接*OE.*过点*C*作*CF*∥*BD*交*OE*的延长线于点*F*,连接*DF.*

求证:(1)△*ODE*≌△*FCE*;

(2)四边形*OCFD*是矩形*.*

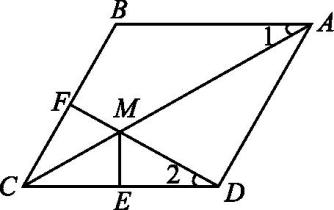


图T5-1

2*.*已知:如图T5-2,在菱形*ABCD*中,*F*为边*BC*的中点,*DF*与对角线*AC*交于点*M*,过*M*作*ME*⊥*CD*于点*E*,∠1=∠2*.*

(1)若*CE*=1,求*BC*的长;

(2)求证:*AM*=*DF*+*ME.*

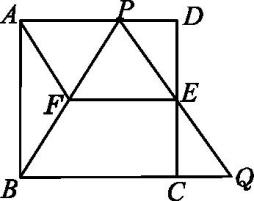


图T5-2

3*.*[2019·海南] 如图T5-3,在边长为1的正方形*ABCD*中,*E*是边*CD*的中点,点*P*是边*AD*上一点(与点*A*,*D*不重合),射线*PE*与*BC*的延长线交于点*Q.*

(1)求证:△*PDE*≌△*QCE.*

(2)过点*E*作*EF*∥*BC*交*PB*于点*F*,连接*AF*,当*PB*=*PQ*时,①求证:四边形*AFEP*是平行四边形;②请判断四边形*AFEP*是否为菱形,并说明理由*.*

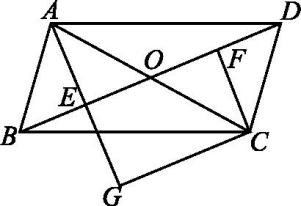


图T5-3

4*.*[2019·青岛] 如图T5-4,在▱*ABCD*中,对角线*AC*与*BD*相交于点*O*,点*E*,*F*分别为*OB*,*OD*的中点,延长*AE*至*G*,使*EG*=*AE*,连接*CG.*

(1)求证:△*ABE*≌△*CDF.*

(2)当*AB*与*AC*满足什么数量关系时,四边形*EGCF*是矩形?请说明理由*.*



图T5-4

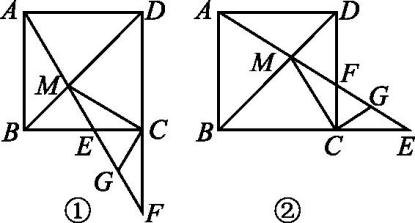
5*.*如图T5-5,在边长为1的正方形*ABCD*中,点*E*是射线*BC*上一动点,*AE*与*BD*相交于点*M*,*AE*或其延长线与*DC*或其延长线相交于点*F*,*G*是*EF*的中点,连接*CG.*

(1)如图①,当点*E*在*BC*边上时,

求证:①△*ABM*≌△*CBM*;②*CG*⊥*CM.*

(2)如图②,当点*E*在*BC*的延长线上时,(1)中的结论②是否成立?请写出结论,不用证明*.*

(3)试问当点*E*运动到什么位置时,△*MCE*是等腰三角形?请说明理由*.*



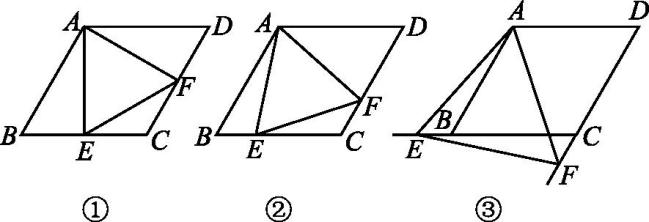
图T5-5

6*.*如图T5-6,已知四边形*ABCD*是菱形,*AB*=4,∠*ABC*=60°,∠*EAF*的两边分别与射线*CB*,*DC*相交于点*E*,*F*,且∠*EAF*=60°*.*

(1)如图①,当点*E*是线段*CB*的中点时,直接写出线段*AE*,*EF*,*AF*之间的数量关系;

(2)如图②,当点*E*是线段*CB*上任意一点时(点*E*不与*B*,*C*重合),求证:*BE*=*CF*;

(3)如图③,当点*E*在线段*CB*的延长线上,且∠*EAB*=15°时,求点*F*到*BC*的距离*.*



图T5-6

**【参考答案】**

1*.*证明:(1)∵*CF*∥*BD*,

∴∠*ODC*=∠*DCF.*

∵*E*是*CD*中点,

∴*ED*=*EC.*

∵∠*DEO*=∠*CEF*,

∴△*ODE*≌△*FCE.*

(2)∵△*ODE*≌△*FCE*,

∴*OE*=*EF.*

又∵*DE*=*EC*,

∴四边形*OCFD*是平行四边形*.*

∵四边形*ABCD*是菱形,

∴*BD*⊥*AC.*∴∠*DOC*=90°*.*

∴四边形*OCFD*是矩形*.*

2*.*解:(1)∵四边形*ABCD*是菱形,

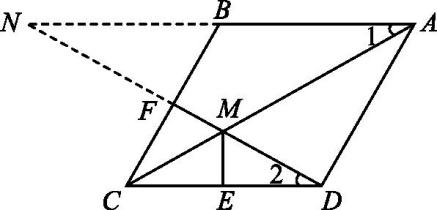
∴*AB*∥*CD*,*BC*=*CD.*∴∠1=∠*ACD.*

又∵∠1=∠2,∴∠*ACD*=∠2*.*

∴*MC*=*MD.*又∵*ME*⊥*CD*,

∴*CE*=*ED*=*CD.*∴*BC*=*CD*=2*CE*=2*.*

(2)证明:如图,延长*DF*,*AB*交于点*N.*



∵四边形*ABCD*是菱形,

∴∠*FCM*=∠*ECM.*

又∵*F*为边*BC*的中点,

∴*CF*=*BF.*

由(1)可知*CE*=*ED*=*CD*,

∴△*CMF*≌△*CME.*∴*MF*=*ME.*

∵*AB*∥*CD*,

∴∠2=∠*N*,∠*NBF*=∠*DCF.*

又∵*BF*=*CF*,∴△*CDF*≌△*BNF.*∴*NF*=*DF.*

又∵∠1=∠2,∴∠*N*=∠1*.*

∴*AM*=*MN*=*NF*+*MF*=*DF*+*ME.*

3*.*解:(1)证明:∵四边形*ABCD*是正方形,

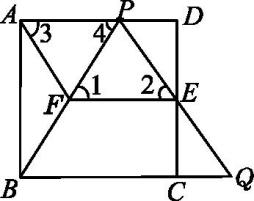
∴∠*D*=∠*BCD*=90°,

∴∠*ECQ*=90°=∠*D.*

∵*E*是*CD*的中点,∴*DE*=*CE*,

又∵∠*DEP*=∠*CEQ*,∴△*PDE*≌△*QCE.*

(2)①证明:如图,由(1)得△*PDE*≌△*QCE*,



∴*PE*=*QE*=*PQ*,

又∵*EF*∥*BC*,∴*PF*=*FB*=*PB*,

∵*PB*=*PQ*,∴*PF*=*PE*,∴∠1=∠2,

∵四边形*ABCD*是正方形,∴∠*BAD*=90°,

在Rt△*ABP*中,*F*是*PB*的中点,

∴*AF*=*BP*=*FP*,∴∠3=∠4,

∵*AD*∥*BC*,*EF*∥*BC*,∴*AD*∥*EF*,

∴∠1=∠4,∴∠2=∠3,

又∵*PF*=*FP*,∴△*APF*≌△*EFP*,∴*AP*=*EF*,

又∵*AP*∥*EF*,∴四边形*AFEP*是平行四边形*.*

②四边形*AFEP*不是菱形,理由如下:设*PD*=*x*,则*AP*=1-*x*,

由(1)知△*PDE*≌△*QCE*,

∴*CQ*=*PD*=*x*,∴*BQ*=*BC*+*CQ*=1+*x*,

∵点*E*,*F*分别是*PQ*,*PB*的中点,

∴*EF*是△*PBQ*的中位线,

∴*EF*=*BQ*=*.*

由①可知*AP*=*EF*,即1-*x*=,解得*x*=,

∴*PD*=,*AP*=*.*

在Rt△*PDE*中,*DE*=,

∴*PE*=,

∴*AP*≠*PE*,

∴四边形*AFEP*不是菱形*.*

4*.*解:(1)证明:∵四边形*ABCD*是平行四边形,

∴*AB*=*CD*,*AB*∥*CD*,*OB*=*OD*,*OA*=*OC*,

∴∠*ABE*=∠*CDF.*

∵点*E*,*F*分别为*OB*,*OD*的中点,

∴*BE*=*OB*,*DF*=*OD*,

∴*BE*=*DF*,

在△*ABE*和△*CDF*中,

∴△*ABE*≌△*CDF*(SAS)*.*

(2)当*AC*=2*AB*时,四边形*EGCF*是矩形*.*理由如下:

∵*AC*=2*OA*,*AC*=2*AB*,

∴*AB*=*OA.*

∵*E*是*OB*的中点,

∴*AG*⊥*OB*,

∴∠*OEG*=90°,

同理:*CF*⊥*OD*,

∴*AG*∥*CF*,

∴*EG*∥*CF*,

∵*EG*=*AE*,*OA*=*OC*,

∴*OE*是△*ACG*的中位线,

∴*OE*∥*CG*,

∴*EF*∥*CG*,

∴四边形*EGCF*是平行四边形,

∵∠*OEG*=90°,

∴四边形*EGCF*是矩形*.*

5*.*解:(1)证明:①∵四边形*ABCD*是正方形,

∴*AB*=*BC*,∠*ABM*=∠*CBM.*

在△*ABM*和△*CBM*中,

∴△*ABM*≌△*CBM*(SAS)*.*

②∵△*ABM*≌△*CBM*,∴∠*BAM*=∠*BCM.*

又∵∠*ECF*=90°,*G*是*EF*的中点,∴*GC*=*EF*=*GF.*

∴∠*GCF*=∠*GFC.*

又∵*AB*∥*DF*,

∴∠*BAM*=∠*GFC.*

∴∠*BCM*=∠*GCF.*

∴∠*BCM*+∠*GCE*=∠*GCF*+∠*GCE*=90°*.*

∴*GC*⊥*CM.*

(2)成立*.*

[解析]∵四边形*ABCD*是正方形,

∴*AB*=*BC*,∠*ABM*=∠*CBM*,

在△*ABM*和△*CBM*中,

∴△*ABM*≌△*CBM*(SAS)*.*

∴∠*BAM*=∠*BCM.*

又∵∠*ECF*=90°,*G*是*EF*的中点,∴*GC*=*GF.*

∴∠*GCF*=∠*GFC.*

又∵*AB*∥*DF*,∴∠*BAM*=∠*GFC.*

∴∠*BCM*=∠*GCF.*

∴∠*GCF*+∠*MCF*=∠*BCM*+∠*MCF*=90°*.*

∴*GC*⊥*CM.*

(3)分两种情况:①当点*E*在*BC*边上时,

∵∠*MEC>*90°,要使△*MCE*是等腰三角形,必须*EM*=*EC*,

∴∠*EMC*=∠*ECM.*∴∠*AEB*=2∠*BCM*=2∠*BAE.*

∴2∠*BAE*+∠*BAE*=90°,∴∠*BAE*=30°*.*

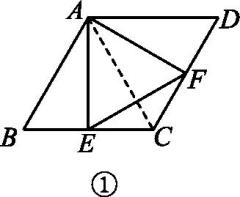
∴*BE*=*AB*=*.*

②当点*E*在*BC*的延长线上时,同①知*BE*=*.*

综上①②,当*BE*=戓时,△*MCE*是等腰三角形*.*

6*.*解:(1)结论:*AE*=*EF*=*AF.*

提示:如图①,连接*AC*,



∵四边形*ABCD*是菱形,∠*B*=60°,

∴*AB*=*BC*=*CD*=*AD*,∠*B*=∠*D*=60°*.*

∴△*ABC*,△*ADC*是等边三角形*.*

∴∠*BAC*=∠*DAC*=60°*.*

∵*BE*=*EC*,∴∠*BAE*=∠*CAE*=30°,*AE*⊥*BC.*

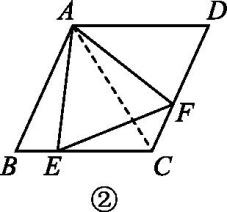
∵∠*EAF*=60°,∴∠*CAF*=∠*DAF*=30°*.*∴*AF*⊥*CD.*

∴*AE*=*AF*(菱形的高相等)*.*

∴△*AEF*是等边三角形*.*

∴*AE*=*EF*=*AF.*

(2)证明:如图②,连接*AC.*



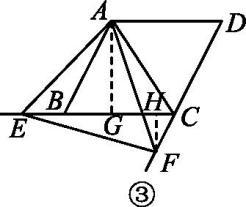
∵∠*BAC*=∠*EAF*=60°,

∴∠*BAE*=∠*CAF*,

在△*BAE*和△*CAF*中,

∴△*BAE*≌△*CAF.*∴*BE*=*CF.*

(3)如图③,过点*A*作*AG*⊥*BC*于点*G*,过点*F*作*FH*⊥*EC*于点*H.*



∵∠*EAB*=15°,∠*ABC*=60°,

∴∠*AEB*=45°*.*

在Rt△*AGB*中,

∵∠*ABC*=60°,*AB*=4,

∴*BG*=2,*AG*=2*.*

在Rt△*AEG*中,∵∠*AEG*=∠*EAG*=45°,

∴*AG*=*GE*=2*.*∴*EB*=*EG*-*BG*=2-2*.*

易证△*AEB*≌△*AFC*,∴*AE*=*AF*,*CF*=*EB*=2-2,∠*AEB*=∠*AFC*=45°*.*

∵∠*EAF*=60°,*AE*=*AF*,∴△*AEF*是等边三角形*.*

∴∠*AEF*=∠*AFE*=60°*.*

∵∠*AEB*=45°,∠*AEF*=60°,

∴∠*CEF*=∠*AEF*-∠*AEB*=15°*.*

在Rt△*EFH*中,∠*CEF*=15°,∴∠*EFH*=75°*.*

∵∠*AFE*=60°,∴∠*AFH*=∠*EFH*-∠*AFE*=15°*.*

∵∠*AFC*=45°,∴∠*CFH*=∠*AFC*-∠*AFH*=30°*.*

在Rt△*CHF*中,∵∠*CFH*=30°,*CF*=2-2,

∴*FH*=*CF*·cos30°=(2-2)×=3-*.*

∴点*F*到*BC*的距离为3-*.*