提分专练(五)**以三角形为背景的中档计算题与证明题**



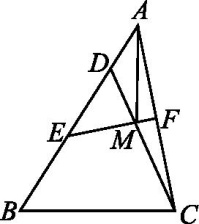
id:2147492156;FounderCES

|类型1|与特殊三角形相关的计算、证明题

1*.*如图T5*-*1,在△*ABC*中,点*D*在*AB*上,且*CD=CB*,点*E*为*BD*的中点,点*F*为*AC*的中点,连接*EF*交*CD*于点*M*,连接*AM.*

(1)求证:*EF=AC*;

(2)若∠*BAC=*45°,求线段*AM*,*DM*,*BC*之间的数量关系*.*

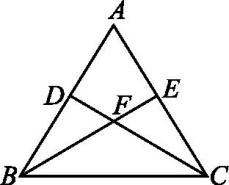


图T5*-*1

2*.*[2017·连云港]如图T5*-*2,已知等腰三角形*ABC*中,*AB=AC*,点*D*,*E*分别在边*AB*,*AC*上,且*AD=AE*,连接*BE*,*CD*,交于点*F.*

(1)判断∠*ABE*与∠*ACD*的数量关系,并说明理由;

(2)求证:过点*A*,*F*的直线垂直平分线段*BC.*



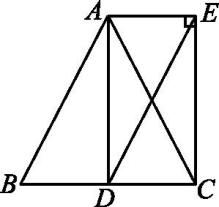
图T5*-*2

|类型2|与全等三角形相关的计算、证明题

3*.*如图T5*-*3,在△*ABC*中,*AB=AC*,*AD*是*BC*边上的中线,*AE*∥*BC*,*CE*⊥*AE*,垂足为*E.*

(1)求证:△*ABD*≌△*CAE.*

(2)连接*DE*,线段*DE*与*AB*之间有怎样的位置和数量关系?请证明你的结论*.*

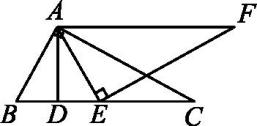


图T5*-*3

4*.*[2019·黄石]如图T5*-*4,在△*ABC*中,∠*BAC=*90°,*E*为边*BC*上的点,且*AB=AE*,*D*为线段*BE*的中点,过点*E*作*EF*⊥*AE*,过点*A*作*AF*∥*BC*,且*AF*,*EF*相交于点*F.*

(1)求证:∠*C=*∠*BAD*;

(2)求证:*AC=EF.*



图T5*-*4

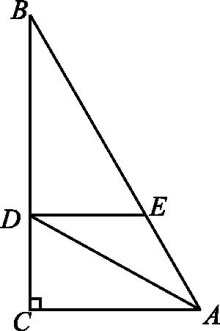
|类型3|与相似三角形相关的计算、证明题

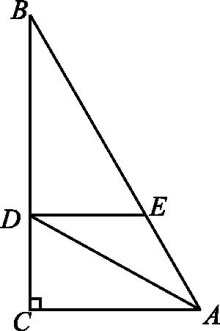
5*.*[2019·衢州]如图T5*-*5,在Rt△*ABC*中,∠*C=*90°,*AC=*6,∠*BAC=*60°,*AD*平分∠*BAC*交*BC*于点*D*,过点*D*作*DE*∥*AC*交*AB*于点*E*,点*M*是线段*AD*上的动点,连接*BM*并延长分别交*DE*,*AC*于点*F*,*G.*

(1)求*CD*的长*.*

(2)若点*M*是线段*AD*的中点,求的值*.*

(3)请问当*DM*的长满足什么条件时,在线段*DE*上恰好只有一点*P*,使得∠*CPG=*60°?





备用图

图T5*-*5

6*.*[2018·东营](1)某学校“智慧方园”数学社团遇到这样一个题目:

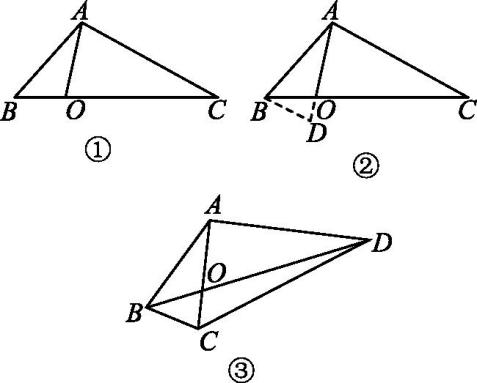
如图T5*-*6①,在△*ABC*中,点*O*在线段*BC*上,∠*BAO=*30°,∠*OAC=*75°,*AO=*3,*BO*∶*CO=*1∶3,求*AB*的长*.*

经过社团成员讨论发现,过点*B*作*BD*∥*AC*,交*AO*的延长线于点*D*,通过构造△*ABD*就可以解决问题(如图②)*.*

请回答:∠*ADB=*°,*AB=　　　　.*

(2)请参考以上解题思路,解决下列问题:

如图③,在四边形*ABCD*中,对角线*AC*与*BD*相交于点*O*,*AC*⊥*AD*,*AO=*3,∠*ABC=*∠*ACB=*75°,*BO*∶*OD=*1∶3,求*DC*的长*.*



图T5*-*6

**【参考答案】**

1*.*解:(1)证明:连接*CE.*∵*CD=CB*,点*E*为*BD*的中点,

∴*CE*⊥*BD.*

∵点*F*为*AC*的中点,

∴*EF=AC.*

(2)∵∠*BAC=*45°,*CE*⊥*BD*,

∴△*AEC*是等腰直角三角形*.*

∵点*F*为*AC*的中点,

∴*EF*垂直平分*AC*,∴*AM=CM.*

∵*CD=CM*+*DM=AM*+*DM*,*CD=CB*,

∴*BC=AM*+*DM.*

2*.*解:(1)∠*ABE=*∠*ACD.*理由如下:

因为*AB=AC*,∠*BAE=*∠*CAD*,*AE=AD*,

所以△*ABE*≌△*ACD*,所以∠*ABE=*∠*ACD.*

(2)证明:因为*AB=AC*,所以∠*ABC=*∠*ACB.*

由(1)可知∠*ABE=*∠*ACD*,所以∠*FBC=*∠*FCB*,所以*FB=FC.*又因为*AB=AC*,所以点*A*,*F*均在线段*BC*的垂直平分线上,

即直线*AF*垂直平分线段*BC.*

3*.*解:(1)证明:∵*AB=AC*,

∴∠*B=*∠*ACD.*

∵*AE*∥*BC*,

∴∠*EAC=*∠*ACD*,

∴∠*B=*∠*EAC.*

∵*AD*是*BC*边上的中线,

∴*AD*⊥*BC.*

∵*CE*⊥*AE*,

∴∠*ADB=*∠*AEC=*90°*.*

在△*ABD*和△*CAE*中,

∵

∴△*ABD*≌△*CAE*(AAS)*.*

(2)*AB*∥*DE*,*AB=DE.*

证明:由(1)知△*ABD*≌△*CAE*,

∴*AE=BD.*

又∵*AE*∥*BD*,

∴四边形*ABDE*为平行四边形,

∴*AB*∥*DE*,*AB=DE.*

4*.*证明:(1)∵*AB=AE*,*D*为线段*BE*的中点,

∴*AD*⊥*BC*,∴∠*C*+∠*DAC=*90°,

∵∠*BAC=*90°,

∴∠*BAD*+∠*DAC=*90°,∴∠*C=*∠*BAD.*

(2)∵*AF*∥*BC*,∴∠*FAE=*∠*AEB*,

∵*AB=AE*,

∴∠*B=*∠*AEB*,

∴∠*B=*∠*FAE*,且∠*AEF=*∠*BAC=*90°,*AB=AE*,

∴△*ABC*≌△*EAF*(ASA),

∴*AC=EF.*

5*.*分析:(1)根据三角函数求得*DC*;

(2)证明△*DFM*≌△*AGM*,再利用△*BFE*∽△*BGA*,由相似比求得的值;

(3)根据∠*CPG=*60°,过*C*,*P*,*G*作圆,圆心为*Q*,△*CQG*是顶角为120°的等腰三角形,根据☉*Q*与*DE*相切,经过点*E*,经过点*D*三种情况分别求得*DM*的长,最后得出*DM*的长需满足的条件*.*

解:(1)∵*AD*平分∠*BAC*,∠*BAC=*60°,

∴∠*DAC=*∠*BAC=*30°*.*

在Rt△*ADC*中,*DC=AC*·tan30°*=*2*.*

(2)易得,*BC=*6,*BD=*4*.*

由*DE*∥*AC*,得∠*EDA=*∠*DAC*,∠*DFM=*∠*AGM.*

∵*AM=DM*,

∴△*DFM*≌△*AGM*,

∴*DF=AG.*

由*DE*∥*AC*,得△*BFE*∽△*BGA*,

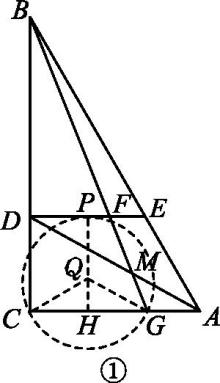
∴*==*,

∴*====.*

(3)∵∠*CPG=*60°,过*C*,*P*,*G*作圆,圆心为*Q*,

∴△*CQG*是顶角为120°的等腰三角形*.*

①当☉*Q*与*DE*相切时,如图①,过*Q*点作*QH*⊥*AC*,并延长*HQ*与*DE*交于点*P*,连接*QC*,*QG.*



设☉*Q*的半径*QP=r*,则*QH=r*,*r*+*r=*2,解得*r=* ,

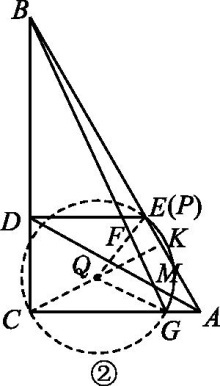
∴*CG=* *=*4,*AG=*2*.*

易知△*DFM*∽△*AGM*,可得*==*,

则*=.*

∴*DM=.*

②当☉*Q*经过点*E*时,如图②,过*C*点作*CK*⊥*AB*,垂足为*K.*



设☉*Q*的半径*QC=QE=r*,则*QK=*3-*r.*

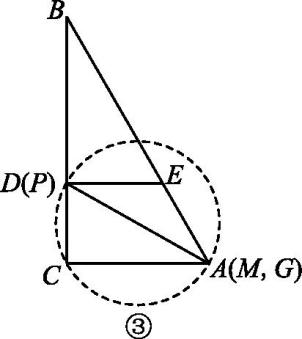
在Rt△*EQK*中,12+(3-*r*)2*=r*2,

解得*r=*,

∴*CG==*,

易知△*DFM*∽△*AGM*,可得*DM=.*

③当☉*Q*经过点*D*时,如图③,此时点*M*与点*G*重合,且恰好在点*A*处,可得*DM=*4*.*



综上所述,当*DM=*或*<DM*≤4时,满足条件的点*P*只有一个*.*

6*.*[解析](1)利用两直线平行,内错角相等,可得∠*ADB=*∠*OAC=*75°和△*AOC*与△*DOB*相似,于是得*DO=*,再利用三角形内角和定理可求得∠*ABD=*75°,所以*AB=AD=*4*.*

(2)同理,可过*B*作*AD*的平行线,利用相似可求得*DC*的长*.*

解:(1)∵*BD*∥*AC*,∴∠*ADB=*∠*OAC=*75°*.*

又∵∠*DOB=*∠*AOC*,∴△*DOB*∽△*AOC*,

∴*==.*

∵*AO=*3,∴*DO=*,

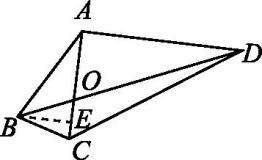
∴*AD=AO*+*DO=*3*=*4*.*

在△*ABD*中,∠*BAO=*30°,∠*ADB=*75°,

∴∠*ABD=*180°-∠*BAO*-∠*ADB=*180°-30°-75°*=*75°,

∴∠*ABD=*∠*ADB*,∴*AB=AD=*4*.*

(2)过点*B*作*BE*∥*AD*交*AC*于点*E.*



∵*AC*⊥*AD*,

∴∠*DAC=*∠*BEA=*90°*.*

又∵∠*AOD=*∠*EOB*,

∴△*AOD*∽△*EOB*,

∴*==.*

∵*BO*∶*OD=*1∶3,∴*==.*

∵*AO=*3,∴*EO=*,∴*AE=*4*.*

∵∠*ABC=*∠*ACB=*75°,

∴∠*BAC=*30°,*AB=AC*,∴*AB=*2*BE.*

在Rt△*AEB*中,*AE*2+*BE*2*=AB*2,

即(4)2+*BE*2*=*(2*BE*)2,得*BE=*4,

∴*AB=AC=*8,*AD=*12*.*

在Rt△*CAD*中,*AC*2+*AD*2*=CD*2,

即82+122*=CD*2,得*CD=*4*.*