提分专练(六)**以四边形为背景的计算题与证明题**



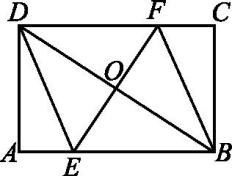
id:2147494635;FounderCES

*|*类型1*|*特殊四边形的综合

1*.*[2017·酒泉]如图T6*-*1,矩形*ABCD*中,*AB=*6,*BC=*4,过对角线*BD*中点*O*的直线分别交*AB*,*CD*边于点*E*,*F.*

(1)求证:四边形*BEDF*是平行四边形;

(2)当四边形*BEDF*是菱形时,求*EF*的长*.*

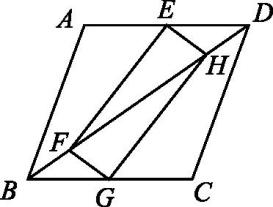


图T6*-*1

2*.*[2019·宁波]如图T6*-*2,矩形*EFGH*的顶点*E*,*G*分别在菱形*ABCD*的边*AD*,*BC*上,顶点*F*,*H*在菱形*ABCD*的对角线*BD*上*.*

(1)求证:*BG=DE*;

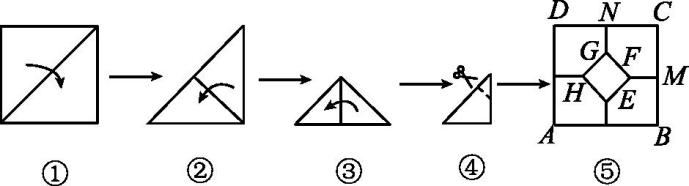
(2)若*E*为*AD*中点,*FH=*2,求菱形*ABCD*的周长*.*



图T6*-*2

*|*类型2*|*四边形的折叠

3*.*[2019·金华]将一张正方形纸片按如图T6*-*3步骤,通过折叠得到图④,再沿虚线剪去一个角,展开铺平后得到图⑤,其中*FM*,*GN*是折痕,若正方形*EFGH*与五边形*MCNGF*的面积相等,则的值是 ()

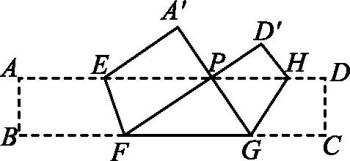


图T6*-*3

A*.* B*.-*1

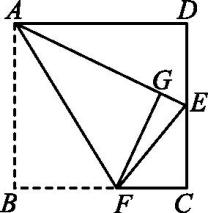
C*.* D*.*

4*.*[2019·杭州]如图T6*-*4,把某矩形纸片*ABCD*沿*EF*,*GH*折叠(点*E*,*H*在*AD*边上,点*F*,*G*在*BC*边上),使点*B*和点*C*落在*AD*边上同一点*P*处,*A*点的对称点为*A'*点,*D*点的对称点为*D'*点,若∠*FPG=*90°,△*A'EP*的面积为4,△*D'PH*的面积为1,则矩形*ABCD*的面积等于*.*



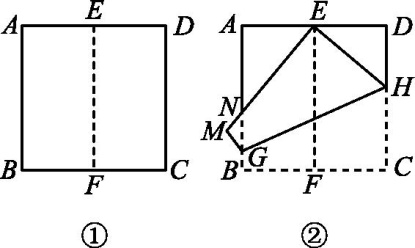
图T6*-*4

5*.*[2019·青岛]如图T6*-*5,在正方形纸片*ABCD*中,*E*是*CD*的中点,将正方形纸片折叠,点*B*落在线段*AE*上的点*G*处,折痕为*AF.*若*AD=*4 cm,则*CF*的长是 cm*.*



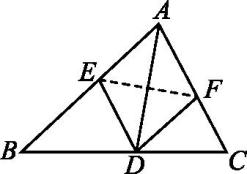
图T6*-*5

6*.*[2016·连云港]如图T6*-*6①,将正方形纸片*ABCD*对折,使*AB*与*CD*重合,折痕为*EF.*如图②,展开后再折叠一次,使点*C*与点*E*重合,折痕为*GH*,点*B*的对应点为点*M*,*EM*交*AB*于*N.*若*AD=*2,则*MN=　　　　　.*



图T6*-*6

7*.*[2014·淮安]如图T6*-*7,在△*ABC*中,*AD*平分∠*BAC*,将△*ABC*折叠,使点*A*与点*D*重合,展开后折痕分别交*AB*,*AC*于点*E*,*F*,连接*DE*,*DF.*求证:四边形*AEDF*是菱形*.*



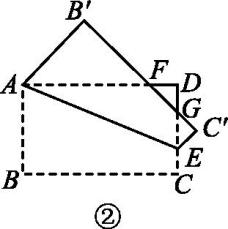
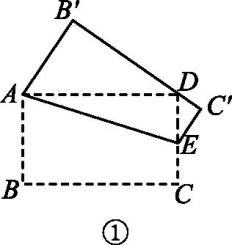
图T6*-*7

8*.*如图T6*-*8,在矩形纸片*ABCD*中,已知*AB=*1,*BC=*,点*E*在边*CD*上移动,连接*AE*,将四边形*ABCE*沿直线*AE*折叠,得到四边形*AB'C'E*,点*B*,*C*的对应点分别为点*B'*,*C'.*

(1)当*B'C'*恰好经过点*D*时(如图①),求线段*CE*的长;

(2)若*B'C'*分别交边*AD*,*CD*于点*F*,*G*,且∠*DAE=*22*.*5°(如图②),求△*DFG*的面积;

(3)在点*E*从点*C*移动到点*D*的过程中,求点*C'*运动的路径长*.*



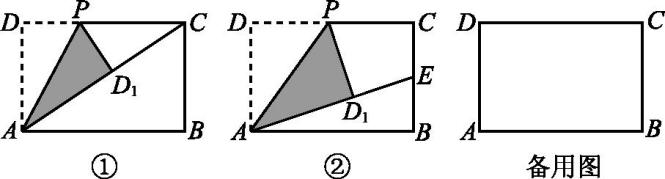
图T6*-*8

9*.*[2017·威海]如图T6*-*9,四边形*ABCD*为一个矩形纸片,*AB=*3,*BC=*2,动点*P*自*D*点出发沿*DC*方向运动至*C*点后停止*.*△*ADP*以直线*AP*为轴翻折,点*D*落到点*D*1的位置*.*设*DP=x*,△*AD*1*P*与原纸片重叠部分的面积为*y.*

(1)当*x*为何值时,直线*AD*1过点*C*?

(2)当*x*为何值时,直线*AD*1过*BC*的中点*E*?

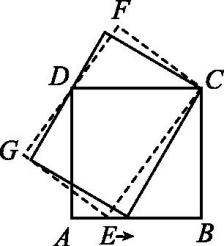
(3)求出*y*与*x*的函数关系式*.*



图T6*-*9

*|*类型3*|*四边形的平移、旋转

10*.*[2019·绍兴]如图T6*-*10,正方形*ABCD*的边*AB*上有一动点*E*,以*EC*为边作矩形*ECFG*,且边*FG*过点*D*,在点*E*从点*A*移动到点*B*的过程中,矩形*ECFG*的面积 ()



图T6*-*10

A*.*先变大后变小

B*.*先变小后变大

C*.*一直变大

D*.*保持不变

11*.*问题:如图T6*-*11①,点*E*,*F*分别在正方形*ABCD*的边*BC*,*CD*上,∠*EAF=*45°,试判断*BE*,*EF*,*FD*之间的数量关系*.*

【发现证明】

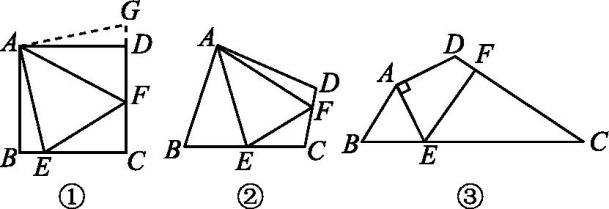
小聪把△*ABE*绕点*A*逆时针旋转90°至△*ADG*,从而发现*EF=BE+FD*,请你利用图①证明上述结论*.*

【类比引申】

如图②,四边形*ABCD*中,∠*BAD*≠90°,*AB=AD*,∠*B+*∠*D=*180°,点*E*,*F*分别在边*BC*,*CD*上,则当∠*EAF*与∠*BAD*满足关系时,仍有*EF=BE+FD.*

【探究应用】

如图③,在某公园的同一水平面上,四条通道围成四边形*ABCD.*已知*AB=AD=*80米,∠*B=*60°,∠*ADC=*120°,∠*BAD=*150°,道路*BC*,*CD*上分别有景点*E*,*F*,且*AE*⊥*AD*,*DF=*40(*-*1)米,现要在*E*,*F*之间修一条笔直道路,求这条道路*EF*的长(结果取整数,参考数据:≈1*.*41,≈1*.*73)*.*

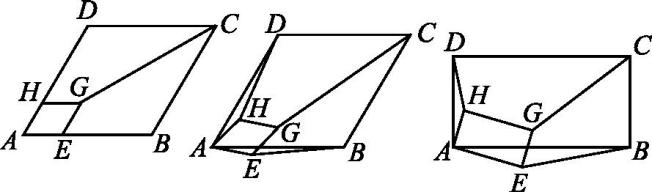


图T6*-*11

12*.*[2019·德州](1)如图T6*-*12①,菱形*AEGH*的顶点*E*,*H*在菱形*ABCD*的边上,且∠*BAD=*60°,请直接写出*HD*∶*GC*∶*EB*的结果(不必写计算过程)*.*

(2)将图①中的菱形*AEGH*绕点*A*旋转一定角度,如图②,求*HD*∶*GC*∶*EB.*

(3)把图②中的菱形都换成矩形,如图③,且*AD*∶*AB=AH*∶*AE=*1∶2,此时*HD*∶*GC*∶*EB*的结果与(2)小题的结果相比有变化吗?如果有变化,直接写出变化后的结果(不必写计算过程);若无变化,请说明理由*.*



①②③

图T6*-*12

**【参考答案】**

1*.*解:(1)证明:∵四边形*ABCD*是平行四边形,*O*是*BD*的中点,

∴*AB*∥*DC*,*OB*=*OD*,∴∠*OBE*=∠*ODF*,

又∵∠*BOE*=∠*DOF*,

∴△*BOE*≌△*DOF*(ASA),

∴*EO*=*FO*,

∴四边形*BEDF*是平行四边形*.*

(2)当四边形*BEDF*是菱形时,

设*BE*=*x*则*DE*=*x*,*AE*=6-*x*,

在Rt△*ADE*中,*DE*2=*AD*2+*AE*2,

∴*x*2=42+(6-*x*)2,

∴*x*=,

∴*S*菱形*BEDF*=*BE*·*AD*=×4=*BD*·*EF*,

又∵*BD*==2,

∴×2·*EF*=,∴*EF*=*.*

2*.*解:(1)证明:在矩形*EFGH*中,*EH*=*FG*,*EH*∥*FG*,∴∠*GFH*=∠*EHF.*

∵∠*BFG*=180°-∠*GFH*,∠*DHE*=180°-∠*EHF*,∴∠*BFG*=∠*DHE*,

在菱形*ABCD*中,*AD*∥*BC*,

∴∠*GBF*=∠*EDH*,∴△*BGF*≌△*DEH*(AAS),

∴*BG*=*DE.*

(2)连接*EG*,

在菱形*ABCD*中,*AD*∥*BC*,*AD*=*BC*,

∵*E*为*AD*中点,

∴*AE*=*ED*,

∵*BG*=*DE*,∴*AE*=*BG*,

又∵*AE*∥*BG*,

∴四边形*ABGE*是平行四边形,

∴*AB*=*EG*,

在矩形*EFGH*中,*EG*=*FH*=2,

∴*AB*=2,

∴菱形*ABCD*的周长为8*.*

3*.*A[解析]连接*EG*,*FH*交于点*O*,由题意得△*OGF*是等腰直角三角形,*OF*=*GF.*∵正方形*EFGH*与五边形*MCNGF*的面积相等,∴(*OF*+*FM*)2=*GF*2,∴*GF*+*FM*=*GF*,∴*FM*=*GF*-*GF*,∴*.*故选A*.*

4*.*2(5+3)[解析]∵四边形*ABCD*是矩形,∴*AB*=*CD*,*AD*=*BC*,设*AB*=*CD*=*x*,由翻折可知:*PA'*=*AB*=*x*,*PD'*=*CD*=*x*,∵△*A'EP*的面积为4,△*D'PH*的面积为1,∴*A'E*=4*D'H*,设*D'H*=*a*,则*A'E*=4*a*,易求△*A'EP*∽△*D'PH*,∴,∴,∴*x*2=4*a*2,∴*x*=2*a*或*x*=-2*a*(舍去),∴*PA'*=*PD'*=2*a*,∵·*a*·2*a*=1,∴*a*=1或*a*=-1(舍去),∴*x*=2,∴*AB*=*CD*=2,*PE*==2,*PH*=,∴*AD*=4+2+1=5+3,∴矩形*ABCD*的面积=2(5+3)*.*故答案为2(5+3)*.*

5*.*(6-2)[解析]由勾股定理得*AE*=2 cm,根据题意得*GE*=(2-4)cm,设*BF*=*x* cm,则*FC*=(4-*x*) cm,所以(2-4)2+*x*2=22+(4-*x*)2,解得*x*=2-2,所以*CF*=(6-2)cm*.*

6*.*[解析]设*DH*=*x*,则*CH*=2-*x*,再根据翻折变换的性质得出*DE*,*EH*,然后利用勾股定理列出方程求出*x*,再根据相似三角形的性质,可得*NE*的长,根据线段的和、差,可得答案*.*

设*DH*=*x*,则*CH*=2-*x.*由翻折的性质,知*DE*=1,*EH*=*CH*=2-*x*,在Rt△*DEH*中,*DE*2+*DH*2=*EH*2,

即12+*x*2=(2-*x*)2,

解得*x*=,*EH*=2-*x*=*.*

∵∠*MEH*=∠*C*=90°,

∴∠*AEN*+∠*DEH*=90°,

∵∠*ANE*+∠*AEN*=90°,

∴∠*ANE*=∠*DEH*,

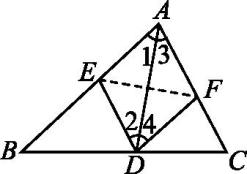
又∠*A*=∠*D*,∴△*ANE*∽△*DEH*,

∴,即,

解得*EN*=,∴*MN*=*ME*-*EN*=2-,

故答案为*.*

7*.*证明:由折叠可知*AE*=*ED*,*AF*=*DF*,



∴∠1=∠2,∠3=∠4*.*

又∵*AD*平分∠*BAC*,

∴∠1=∠3*.*

∴∠1=∠2=∠3=∠4,

∴*AE*∥*DF*,*AF*∥*ED*,

∴四边形*AEDF*为平行四边形,

又*AE*=*ED*,∴四边形*AEDF*为菱形*.*

8*.*解:(1)由折叠得∠*B*=∠*B'*=90°,*AB*=*AB'*=1,*BC*=*B'C'*=,*C'E*=*CE*,

由勾股定理得,*B'D*=,所以*DC'*=,

因为∠*ADE*=90°,所以∠*ADB'*+∠*EDC'*=90°,

又因为∠*EDC'*+∠*DEC'*=90°,

所以∠*ADB'*=∠*DEC'*,

又∠*B'*=∠*C'*=90°,所以△*AB'D*∽△*DC'E*,

所以,即,

所以*CE*=*C'E*=-2*.*

(2)∵∠*BAD*=∠*B'*=∠*D*=90°,∠*DAE*=22*.*5°,

∴∠*BAE*=90°-22*.*5°=67*.*5°,

∴∠*B'AF*=67*.*5°-22*.*5°=45°,

∴∠*B'AF*=∠*B'FA*=45°,

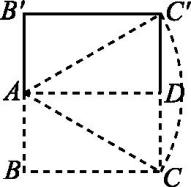
∴∠*DFG*=∠*AFB'*=∠*DGF*=45°,∴*DF*=*DG.*

在Rt△*AB'F*中,*AB'*=*FB'*=1,

∴*AF*=*AB'*=,∴*DF*=*DG*=,

∴*S*△*DFG*=×()2=*.*

(3)如图,点*C'*运动的路径长为的长,



在Rt△*ADC*中,

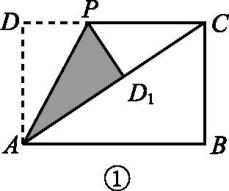
∵tan∠*DAC*=,

∴∠*DAC*=30°,*AC*=2*CD*=2*.*

∵∠*C'AD*=∠*DAC*=30°,∴∠*CAC'*=60°,

∴的长=π*.*

9*.*解:(1)如图①,



由题意得,△*ADP*≌△*AD*1*P.*

∴*AD*1=*AD*=2,*PD*=*PD*1=*x*,∠*PDA*=∠*PD*1*A*=90°*.*

∵直线*AD*1过点*C*,∴*PD*1⊥*AC.*

在Rt△*ABC*中,∵*AB*=3,*BC*=2,

∴*AC*=,*CD*1=-2*.*

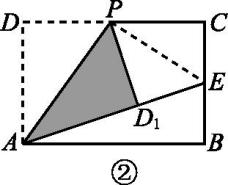
在Rt△*PCD*1中,*PC*2=*P*+*C*,

即(3-*x*)2=*x*2+(-2)2,

解得*x*=*.*

∴当*x*=时,直线*AD*1过点*C.*

(2)如图②,连接*PE.*



∵*E*为*BC*中点,∴*BE*=*CE*=1*.*

在Rt△*ABE*中,

*AE*=*.*

∵*AD*1=*AD*=2,*PD*=*PD*1=*x*,

∴*D*1*E*=-2,*PC*=3-*x.*

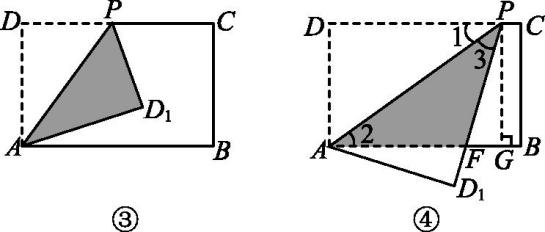
在Rt△*PD*1*E*和Rt△*PCE*中,

*x*2+(-2)2=(3-*x*)2+12,

解得*x*=*.*

∴当*x*=时,直线*AD*1过*BC*的中点*E.*

(3)如图③,当0≤*x*≤2时,*y*=*x.*



如图④,当2*<x*≤3时,点*D*1在矩形外部,*PD*1与*AB*交于点*F.*

∵*AB*∥*CD*,∴∠1=∠2*.*

∵∠1=∠3,∴∠2=∠3,∴*FP*=*FA.*

作*PG*⊥*AB*,垂足为点*G*,

设*FP*=*FA*=*a*,

由题意得,*AG*=*DP*=*x*,*FG*=*x*-*a.*

在Rt△*PFG*中,由勾股定理,得(*x*-*a*)2+22=*a*2,

解得*a*=,∴*y*=×2×*.*

综上所述,当0≤*x*≤2时,*y*=*x*;当2*<x*≤3时,*y*=*.*

10*.*D[解析]∵四边形*ABCD*是正方形,四边形*ECFG*是矩形,

∴∠*B*=∠*F*=∠*BCD*=∠*ECF*=90°,

又∵∠*BCE*+∠*ECD*=∠*ECD*+∠*FCD*=90°,

∴∠*BCE*=∠*FCD*,∴△*BCE*∽△*FCD.*

∴,∴*BC*·*CD*=*FC*·*CE*,∴矩形*ECFG*与正方形*ABCD*的面积相等,故选D*.*

11*.*[解析]【发现证明】根据旋转的性质可以得到*AE*=*AG*,*BE*=*DG*,∠*B*=∠*ADG*=90°,∠*EAG*=90°,再根据“SAS”证明△*AFG*≌△*AFE*可得*EF*=*GF*,由此证得结论*.*

【类比引申】根据上面的特殊情况中∠*EAF*=∠*BAD*,猜想一般情况下也应满足∠*EAF*=∠*BAD*才能得到结论,证明过程与上面类似*.*

【探究应用】连接*AF.*要运用这个几何模型必须先证明∠*EAF*=75°*.*过点*A*作*AH*⊥*CD*于点*H*,解两个直角三角形——Rt△*AHD*和Rt△*AHF*来得以实现*.*

解:【发现证明】证明:由旋转可得*AE*=*AG*,*BE*=*DG*,∠*B*=∠*ADG*=90°,∠*EAG*=∠*BAD*=90°*.*

∵四边形*ABCD*为正方形,∴∠*ADC*=90°,

∴∠*ADC*+∠*ADG*=180°,∴*G*,*D*,*C*三点共线*.*

∵∠*EAF*=45°,∴∠*GAF*=45°,

∴∠*GAF*=∠*FAE.*

又∵*AF*=*AF*,∴△*AFG*≌△*AFE*(SAS),

∴*GF*=*EF.*

∵*GF*=*GD*+*DF*,

∴*EF*=*BE*+*DF.*

【类比引申】∠*EAF*=∠*BAD*

理由如下:如图①,将△*ABE*绕点*A*逆时针旋转∠*BAD*的度数至△*ADG*,使*AB*与*AD*重合*.*

由旋转可得*AE*=*AG*,*BE*=*DG*,∠*B*=∠*ADG*,∠*BAE*=∠*DAG.*

∵∠*B*+∠*ADC*=180°,∴∠*ADC*+∠*ADG*=180°,

∴*G*,*D*,*C*三点共线*.*

∵∠*BAE*=∠*DAG*,∴∠*BAD*=∠*EAG.*

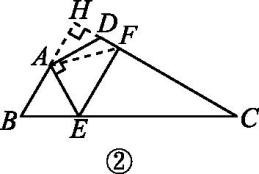
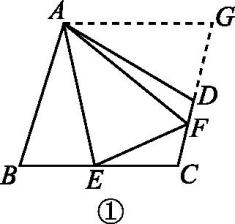
∵∠*EAF*=∠*BAD*,∴∠*GAF*=∠*FAE.*

又∵*AF*=*AF*,∴△*AFG*≌△*AFE*(SAS),

∴*GF*=*EF.*

∵*GF*=*GD*+*DF*,

∴*EF*=*BE*+*DF.*故答案为∠*EAF*=∠*BAD.*



【探究应用】∵∠*BAD*=150°,∠*DAE*=90°,

∴∠*BAE*=60°*.*

又∵∠*B*=60°,∴△*ABE*是等边三角形,

∴*BE*=*AB*=80*.*

如图②,连接*AF*,过点*A*作*AH*⊥*CD*交*CD*的延长线于点*H.*

在Rt△*AHD*中,∠*ADH*=180°-∠*ADC*=60°,*AD*=80,

∴∠*HAD*=30°,*HD*=*AD*=40,*AH*==40*.*

∵*DF*=40(-1),

∴*HF*=*HD*+*DF*=40+40(-1)=40,

∴在Rt△*AHF*中,*AH*=*HF*,∴∠*HAF*=45°,

∴∠*DAF*=15°,∴∠*EAF*=90°-15°=75°,

∴∠*EAF*=∠*BAD.*

运用上面的结论可得*EF*=*BE*+*DF*=80+40(-1)=40+40≈109*.*即这条道路*EF*的长约为109米*.*

12*.*[分析](1)连接*AG*,由菱形*AEGH*的顶点*E*,*H*在菱形*ABCD*的边上,且∠*BAD*=60°,易得*A*,*G*,*C*共线,延长*HG*交*BC*于点*M*,延长*EG*交*DC*于点*N*,连接*MN*,交*GC*于点*O*,则四边形*GMCN*也为菱形,利用菱形对角线互相垂直,结合三角函数可得结论;

(2)连接*AG*,*AC*,由△*ADC*和△*AHG*都是等腰三角形,易证△*DAH*∽△*CAG*与△*DAH*≌△*BAE*,利用相似三角形的性质及菱形的性质可得结论;

(3)连接*AG*,*AC*,易证△*ADC*∽△*AHG*,△*DAH*∽△*CAG*和△*ADH*∽△*ABE*,利用相似三角形的性质可得结论*.*

解:(1)如图①,连接*AG*,

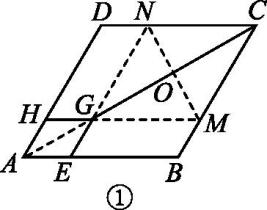
∵菱形*AEGH*的顶点*E*,*H*在菱形*ABCD*的边上,且∠*BAD*=60°,

∴∠*GAE*=∠*CAB*=30°,*AE*=*AH*,*AB*=*AD*,

∴*A*,*G*,*C*共线,*AB*-*AE*=*AD*-*AH*,

∴*HD*=*EB*,

延长*HG*交*BC*于点*M*,延长*EG*交*DC*于点*N*,连接*MN*,交*GC*于点*O*,则四边形*GMCN*也为菱形,



∴*GC*⊥*MN*,∠*NGO*=∠*AGE*=30°,

∴=cos30°=,

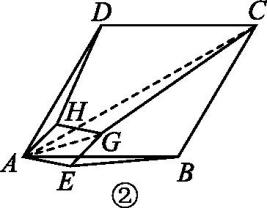
∵*GC*=2*OG*,∴,

∵四边形*HGND*为平行四边形,

∴*HD*=*GN*,

∴*HD*∶*GC*∶*EB*=1∶∶1*.*

(2)如图②,连接*AG*,*AC*,



∵△*ADC*和△*AHG*都是等腰三角形,

∴*AD*∶*AC*=*AH*∶*AG*=1∶,∠*DAC*=∠*HAG*=30°,

∴∠*DAH*=∠*CAG*,∴△*DAH*∽△*CAG*,

∴*HD*∶*GC*=*AD*∶*AC*=1∶,

∵∠*DAB*=∠*HAE*=60°,

∴∠*DAH*=∠*BAE*,

在△*DAH*和△*BAE*中,

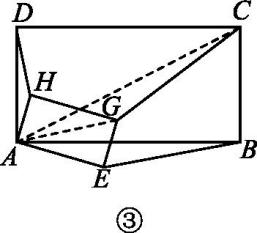
∴△*DAH*≌△*BAE*(SAS),

∴*HD*=*EB*,

∴*HD*∶*GC*∶*EB*=1∶∶1*.*

(3)有变化*.*

如图③,连接*AG*,*AC*,



∵*AD*∶*AB*=*AH*∶*AE*=1∶2,∠*ADC*=∠*AHG*=90°,

∴△*ADC*∽△*AHG*,

∴*AD*∶*AC*=*AH*∶*AG*=1∶,

∠*DAC*=∠*HAG*,

∴∠*DAH*=∠*CAG*,

∴△*DAH*∽△*CAG*,

∴*HD*∶*GC*=*AD*∶*AC*=1∶*.*

∵∠*DAB*=∠*HAE*=90°,

∴∠*DAH*=∠*BAE*,

∵*DA*∶*AB*=*HA*∶*AE*=1∶2,

∴△*ADH*∽△*ABE*,

∴*DH*∶*BE*=*AD*∶*AB*=1∶2,

∴*HD*∶*GC*∶*EB*=1∶∶2*.*