提分专练(三)**以四边形为背景的计算题与证明题**



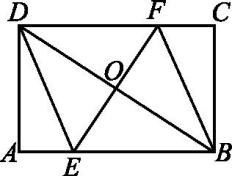
id:2147492641;FounderCES

|类型1|特殊四边形的综合

1*.*[2017·酒泉] 如图T3-1,矩形*ABCD*中,*AB=*6,*BC=*4,过对角线*BD*中点*O*的直线分别交*AB*,*CD*边于点*E*,*F.*

(1)求证:四边形*BEDF*是平行四边形;

(2)当四边形*BEDF*是菱形时,求*EF*的长*.*



图T3-1

|类型2|动点问题

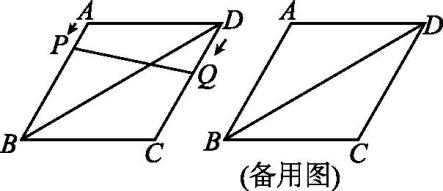
2*.*[2019·徐州树人一模]如图T3-2,在菱形*ABCD*中,已知∠*BAD=*120°,对角线*BD*长为12*.*

(1)求菱形*ABCD*的周长*.*

(2)动点*P*从点*A*出发,沿*A*→*B*的方向,以每秒1个单位长度的速度向点*B*运动;在点*P*出发的同时,动点*Q*从点*D*出发,沿*D*→*C*→*B*的方向,以每秒2个单位长度的速度向点*B*运动*.*设运动时间为*t*(s)*.*

①当*PQ*恰好被*BD*平分时,试求*t*的值;

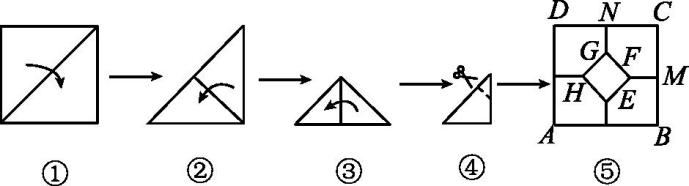
②连接*AQ*,试求:在整个运动过程中,当*t*取怎样的值时,△*APQ*恰好是一个直角三角形?



图T3-2

|类型3|四边形的折叠

3*.*[2019·金华] 将一张正方形纸片按如图T3-3步骤,通过折叠得到图④,再沿虚线剪去一个角,展开铺平后得到图⑤,其中*FM*,*GN*是折痕,若正方形*EFGH*与五边形*MCNGF*的面积相等,则的值是 ()

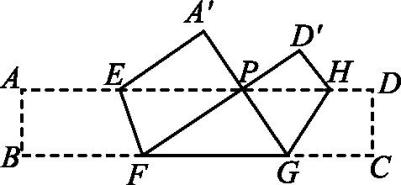


图T3-3

A*.* B*.*-1

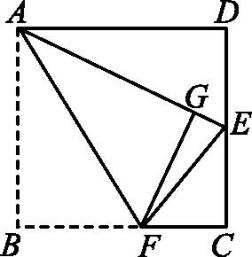
C*.* D*.*

4*.*[2019·杭州] 如图T3-4,把某矩形纸片*ABCD*沿*EF*,*GH*折叠(点*E*,*H*在*AD*边上,点*F*,*G*在*BC*边上),使点*B*和点*C*落在*AD*边上同一点*P*处,*A*点的对称点为*A'*点,*D*点的对称点为*D'*点,若∠*FPG=*90°,△*A'EP*的面积为4, △*D'PH*的面积为1,则矩形*ABCD*的面积等于*.*



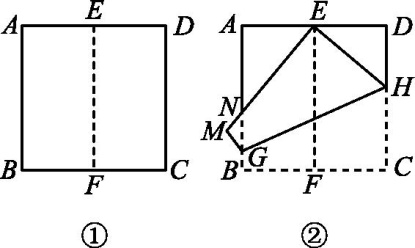
图T3-4

5*.*[2019·青岛] 如图T3-5,在正方形纸片*ABCD*中,*E*是*CD*的中点,将正方形纸片折叠,点*B*落在线段*AE*上的点*G*处,折痕为*AF.*若*AD=*4 cm,则*CF*的长是 cm*.*



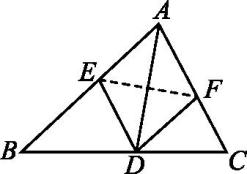
图T3-5

6*.*[2016·连云港] 如图T3-6①,将正方形纸片*ABCD*对折,使*AB*与*CD*重合,折痕为*EF.*如图②,展开后再折叠一次,使点*C*与点*E*重合,折痕为*GH*,点*B*的对应点为点*M*,*EM*交*AB*于*N.*若*AD=*2,则*MN=　　　　　.*



图T3-6

7*.*[2014·淮安] 如图T3-7,在△*ABC*中,*AD*平分∠*BAC*,将△*ABC*折叠,使点*A*与点*D*重合,展开后折痕分别交*AB*,*AC*于点*E*,*F*,连接*DE*,*DF.*求证:四边形*AEDF*是菱形*.*



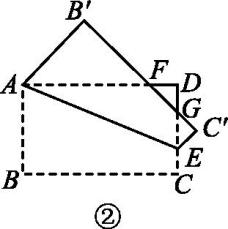
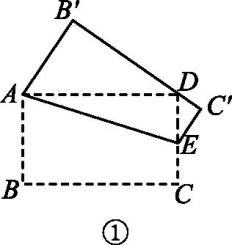
图T3-7

8*.*如图T3-8,在矩形纸片*ABCD*中,已知*AB=*1,*BC=*,点*E*在边*CD*上移动,连接*AE*,将四边形*ABCE*沿直线*AE*折叠,得到四边形*AB'C'E*,点*B*,*C*的对应点分别为点*B'*,*C'.*

(1)当*B'C'*恰好经过点*D*时(如图①),求线段*CE*的长;

(2)若*B'C'*分别交边*AD*,*CD*于点*F*,*G*,且∠*DAE=*22*.*5°(如图②),求△*DFG*的面积;

(3)在点*E*从点*C*移动到点*D*的过程中,求点*C'*运动的路径长*.*



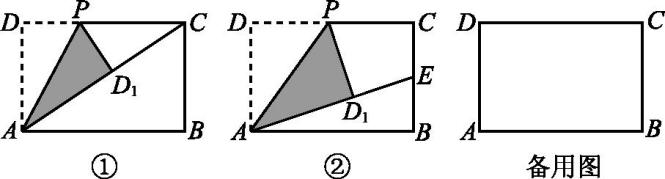
图T3-8

9*.*[2017·威海] 如图T3-9,四边形*ABCD*为一个矩形纸片,*AB=*3,*BC=*2,动点*P*自*D*点出发沿*DC*方向运动至*C*点后停止*.*△*ADP*以直线*AP*为轴翻折,点*D*落到点*D*1的位置*.*设*DP=x*,△*AD*1*P*与原纸片重叠部分的面积为*y.*

(1)当*x*为何值时,直线*AD*1过点*C*?

(2)当*x*为何值时,直线*AD*1过*BC*的中点*E*?

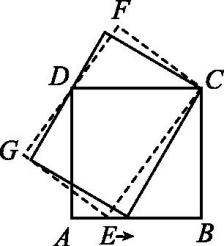
(3)求出*y*与*x*的函数关系式*.*



图T3-9

|类型4|四边形的平移、旋转

10*.*[2019·绍兴] 如图T3-10,正方形*ABCD*的边*AB*上有一动点*E*,以*EC*为边作矩形*ECFG*,且边*FG*过点*D*,在点*E*从点*A*移动到点*B*的过程中,矩形*ECFG*的面积 ()



图T3-10

A*.*先变大后变小

B*.*先变小后变大

C*.*一直变大

D*.*保持不变

11*.*问题:如图T3-11①,点*E*,*F*分别在正方形*ABCD*的边*BC*,*CD*上,∠*EAF=*45°,试判断*BE*,*EF*,*FD*之间的数量关系*.*

【发现证明】

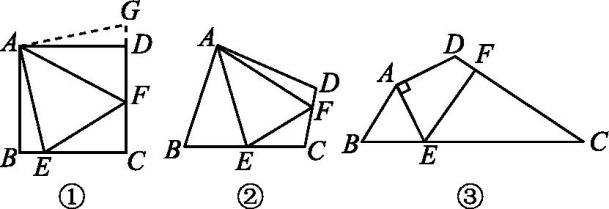
小聪把△*ABE*绕点*A*逆时针旋转90°至△*ADG*,从而发现*EF=BE*+*FD*,请你利用图①证明上述结论*.*

【类比引申】

如图②,四边形*ABCD*中,∠*BAD*≠90°,*AB=AD*,∠*B*+∠*D=*180°,点*E*,*F*分别在边*BC*,*CD*上,则当∠*EAF*与∠*BAD*满足关系时,仍有*EF=BE*+*FD.*

【探究应用】

如图③,在某公园的同一水平面上,四条通道围成四边形*ABCD.*已知*AB=AD=*80米,∠*B=*60°,∠*ADC=*120°,∠*BAD=*150°,道路*BC*,*CD*上分别有景点*E*,*F*,且*AE*⊥*AD*,*DF=*40(-1)米,现要在*E*,*F*之间修一条笔直道路,求这条道路*EF*的长(结果取整数,参考数据:≈1*.*41,≈1*.*73)*.*

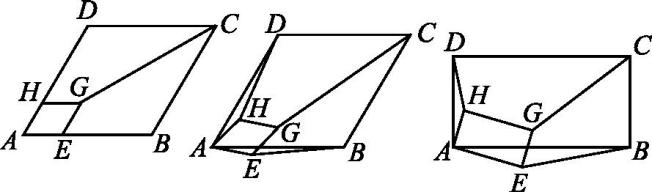


图T3-11

12*.*[2019·德州] (1)如图T3-12①,菱形*AEGH*的顶点*E*,*H*在菱形*ABCD*的边上,且∠*BAD=*60°,请直接写出*HD*∶*GC*∶*EB*的结果(不必写计算过程)*.*

(2)将图①中的菱形*AEGH*绕点*A*旋转一定角度,如图②,求*HD*∶*GC*∶*EB.*

(3)把图②中的菱形都换成矩形,如图③,且*AD*∶*AB=AH*∶*AE=*1∶2,此时*HD*∶*GC*∶*EB*的结果与(2)小题的结果相比有变化吗?如果有变化,直接写出变化后的结果(不必写计算过程);若无变化,请说明理由*.*



①②③

图T3-12

**【参考答案】**

1*.*解:(1)证明:∵四边形*ABCD*是平行四边形,*O*是*BD*的中点,

∴*AB*∥*DC*,*OB=OD*,∴∠*OBE=*∠*ODF*,

又∵∠*BOE=*∠*DOF*,

∴△*BOE*≌△*DOF*(ASA),

∴*EO=FO*,

∴四边形*BEDF*是平行四边形*.*

(2)当四边形*BEDF*是菱形时,

设*BE=x*则*DE=x*,*AE=*6-*x*,

在Rt△*ADE*中,*DE*2*=AD*2+*AE*2,

∴*x*2*=*42+(6-*x*)2,

∴*x=*,

∴*S*菱形*BEDF=BE*·*AD=*×4*==BD*·*EF*,

又∵*BD===*2,

∴×2·*EF=*,∴*EF=.*

2*.*解:(1)连接*AC*,交*BD*于点*O.*则∠*AOB=*90°,*BO=*6*.*在△*ABO*中,求得*AB=*4,∴菱形*ABCD*的周长为16*.*

(2)①当点*Q*在*CD*边上时,

设*PQ*交*BD*于*M*,则*PM=QM*,

∵*AB*∥*CD*,∴*==*1,

∴*BP=DQ*,

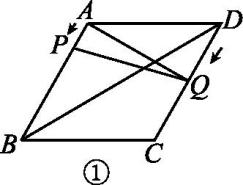
根据题意得:*AP=t*,*DQ=*2*t*,则*BP=*4-*t*,

∴4-*t=*2*t*,解得*t=* ;

当点*Q*在*CB*边上时,不存在*.*

②当点*Q*在*CD*边上时,若∠*PAQ=*90°,

如图①所示:



∵*AB*∥*CD*,

∴∠*AQD=*∠*PAQ=*90°,

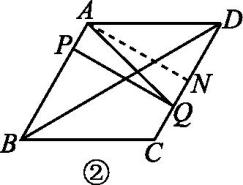
∴∠*DAQ=*30°,

∴*DQ=AD=*2,

即2*t=*2,

得*t=.*

若∠*APQ=*90°,如图②,作*AN*⊥*CD*于*N*,则∠*PAN=*90°,*NQ=AP=t*,∠*DAN=*30°,



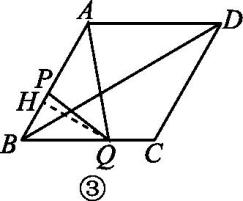
∴*DN=AD=*2*.*

∵*DQ=DN*+*NQ*,

∴2*t=*2+*t*,

解得:*t=*2;

当点*Q*在*CB*边上时,如图③所示:



根据题意得:*AP=t*,*BP=*4-*t*,*CQ=*2*t*-4,

∴*BQ=*4-(2*t*-4)*=*8-2*t*,

∴*BP=BQ.*

作*QH*⊥*BP*于*H*,

∵∠*ABC=*60°,

∴∠*BQH=*30°,

∴*BH=BQ=*4-*t*,

∴*BP=BH*,即*H*与*P*重合,

∴∠*BPQ=*90°,

即∠*APQ=*90°恒成立*.*

∴当2*<t<*4时,△*APQ*都为直角三角形*.*

综上可得,当*t=*或2≤*t<*4时,△*APQ*恰好为直角三角形*.*

3*.*A[解析]连接*EG*,*FH*交于点*O*,由题意得△*OGF*是等腰直角三角形,*OF=GF.*∵正方形*EFGH*与五边形*MCNGF*的面积相等,∴(*OF*+*FM*)2*=GF*2,∴*GF*+*FM=GF*,∴*FM=GF*-*GF*,∴*=.*故选A*.*

4*.*2(5+3)[解析]∵四边形*ABCD*是矩形,∴*AB=CD*,*AD=BC*,设*AB=CD=x*,由翻折可知:*PA'=AB=x*,*PD'=CD=x*,∵△*A'EP*的面积为4,△*D'PH*的面积为1,∴*A'E=*4*D'H*,设*D'H=a*,则*A'E=*4*a*,易求△*A'EP*∽△*D'PH*,∴*=*,∴*=*,∴*x*2*=*4*a*2,∴*x=*2*a*或*x=*-2*a*(舍去),∴*PA'=PD'=*2*a*,∵·*a*·2*a=*1,∴*a=*1或*a=*-1(舍去),∴*x=*2,∴*AB=CD=*2,*PE==*2,*PH==*,∴*AD=*4+2+1*=*5+3,∴矩形*ABCD*的面积*=*2(5+3)*.*故答案为2(5+3)*.*

5*.*(6-2)[解析]由勾股定理得*AE=*2 cm,根据题意得*GE=*(2-4)cm,设*BF=x* cm,则*FC=*(4-*x*) cm,所以(2-4)2+*x*2*=*22+(4-*x*)2,解得*x=*2-2,所以*CF=*(6-2)cm*.*

6*.*[解析]设*DH=x*,则*CH=*2-*x*,再根据翻折变换的性质得出*DE*,*EH*,然后利用勾股定理列出方程求出*x*,再根据相似三角形的性质,可得*NE*的长,根据线段的和、差,可得答案*.*

设*DH=x*,则*CH=*2-*x.*由翻折的性质,知*DE=*1,*EH=CH=*2-*x*,在Rt△*DEH*中,*DE*2+*DH*2*=EH*2,

即12+*x*2*=*(2-*x*)2,

解得*x=*,*EH=*2-*x=.*

∵∠*MEH=*∠*C=*90°,

∴∠*AEN*+∠*DEH=*90°,

∵∠*ANE*+∠*AEN=*90°,

∴∠*ANE=*∠*DEH*,

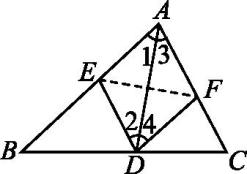
又∠*A=*∠*D*,∴△*ANE*∽△*DEH*,

∴*=*,即*=*,

解得*EN=*,∴*MN=ME*-*EN=*2-*=*,

故答案为*.*

7*.*证明:由折叠可知*AE=ED*,*AF=DF*,



∴∠1*=*∠2,∠3*=*∠4*.*

又∵*AD*平分∠*BAC*,

∴∠1*=*∠3*.*

∴∠1*=*∠2*=*∠3*=*∠4,

∴*AE*∥*DF*,*AF*∥*ED*,

∴四边形*AEDF*为平行四边形,

又*AE=ED*,∴四边形*AEDF*为菱形*.*

8*.*解:(1)由折叠得∠*B=*∠*B'=*90°,*AB=AB'=*1,*BC=B'C'=*,*C'E=CE*,

由勾股定理得,*B'D===*,所以*DC'=*,

因为∠*ADE=*90°,所以∠*ADB'*+∠*EDC'=*90°,

又因为∠*EDC'*+∠*DEC'=*90°,

所以∠*ADB'=*∠*DEC'*,

又∠*B'=*∠*C'=*90°,所以△*AB'D*∽△*DC'E*,

所以*=*,即*=*,

所以*CE=C'E=*-2*.*

(2)∵∠*BAD=*∠*B'=*∠*D=*90°,∠*DAE=*22*.*5°,

∴∠*BAE=*90°-22*.*5°*=*67*.*5°,

∴∠*B'AF=*67*.*5°-22*.*5°*=*45°,

∴∠*B'AF=*∠*B'FA=*45°,

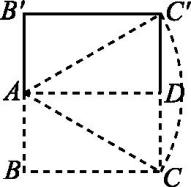
∴∠*DFG=*∠*AFB'=*∠*DGF=*45°,∴*DF=DG.*

在Rt△*AB'F*中,*AB'=FB'=*1,

∴*AF=AB'=*,∴*DF=DG=*,

∴*S*△*DFG=*×()2*=.*

(3)如图,点*C'*运动的路径长为的长,



在Rt△*ADC*中,

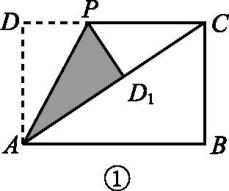
∵tan∠*DAC==*,

∴∠*DAC=*30°,*AC=*2*CD=*2*.*

∵∠*C'AD=*∠*DAC=*30°,∴∠*CAC'=*60°,

∴的长*==*π*.*

9*.*解:(1)如图①,



由题意得,△*ADP*≌△*AD*1*P.*

∴*AD*1*=AD=*2,*PD=PD*1*=x*,∠*PDA=*∠*PD*1*A=*90°*.*

∵直线*AD*1过点*C*,∴*PD*1⊥*AC.*

在Rt△*ABC*中,∵*AB=*3,*BC=*2,

∴*AC==*,*CD*1*=*-2*.*

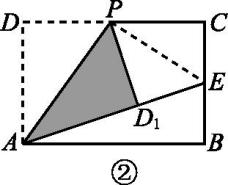
在Rt△*PCD*1中,*PC*2*=P*+*C*,

即(3-*x*)2*=x*2+(-2)2,

解得*x=.*

∴当*x=*时,直线*AD*1过点*C.*

(2)如图②,连接*PE.*



∵*E*为*BC*中点,∴*BE=CE=*1*.*

在Rt△*ABE*中,

*AE==.*

∵*AD*1*=AD=*2,*PD=PD*1*=x*,

∴*D*1*E=*-2,*PC=*3-*x.*

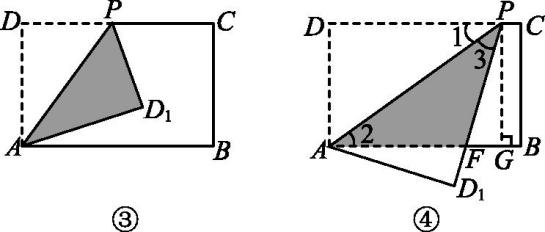
在Rt△*PD*1*E*和Rt△*PCE*中,

*x*2+(-2)2*=*(3-*x*)2+12,

解得*x=.*

∴当*x=*时,直线*AD*1过*BC*的中点*E.*

(3)如图③,当0≤*x*≤2时,*y=x.*



如图④,当2*<x*≤3时,点*D*1在矩形外部,*PD*1与*AB*交于点*F.*

∵*AB*∥*CD*,∴∠1*=*∠2*.*

∵∠1*=*∠3,∴∠2*=*∠3,∴*FP=FA.*

作*PG*⊥*AB*,垂足为点*G*,

设*FP=FA=a*,

由题意得,*AG=DP=x*,*FG=x*-*a.*

在Rt△*PFG*中,由勾股定理,得(*x*-*a*)2+22*=a*2,

解得*a=*,∴*y=*×2×*=.*

综上所述,当0≤*x*≤2时,*y=x*;当2*<x*≤3时,*y=.*

10*.*D[解析]∵四边形*ABCD*是正方形,四边形*ECFG*是矩形,

∴∠*B=*∠*F=*∠*BCD=*∠*ECF=*90°,

又∵∠*BCE*+∠*ECD=*∠*ECD*+∠*FCD=*90°,

∴∠*BCE=*∠*FCD*,∴△*BCE*∽△*FCD.*

∴*=*,∴*BC*·*CD=FC*·*CE*,∴矩形*ECFG*与正方形*ABCD*的面积相等,故选D*.*

11*.*[解析] 【发现证明】 根据旋转的性质可以得到*AE=AG*,*BE=DG*,∠*B=*∠*ADG=*90°,∠*EAG=*90°,再根据“SAS”证明△*AFG*≌△*AFE*可得*EF=GF*,由此证得结论*.*

【类比引申】 根据上面的特殊情况中∠*EAF=*∠*BAD*,猜想一般情况下也应满足∠*EAF=*∠*BAD*才能得到结论,证明过程与上面类似*.*

【探究应用】 连接*AF.*要运用这个几何模型必须先证明∠*EAF=*75°*.*过点*A*作*AH*⊥*CD*于点*H*,解两个直角三角形——Rt△*AHD*和Rt△*AHF*来得以实现*.*

解:【发现证明】 证明:由旋转可得*AE=AG*,*BE=DG*,∠*B=*∠*ADG=*90°,∠*EAG=*∠*BAD=*90°*.*

∵四边形*ABCD*为正方形,∴∠*ADC=*90°,

∴∠*ADC*+∠*ADG=*180°,∴*G*,*D*,*C*三点共线*.*

∵∠*EAF=*45°,∴∠*GAF=*45°,

∴∠*GAF=*∠*FAE.*

又∵*AF=AF*,∴△*AFG*≌△*AFE*(SAS),

∴*GF=EF.*∵*GF=GD*+*DF*,

∴*EF=BE*+*DF.*

【类比引申】 ∠*EAF=*∠*BAD*

理由如下:如图①,将△*ABE*绕点*A*逆时针旋转∠*BAD*的度数至△*ADG*,使*AB*与*AD*重合*.*

由旋转可得*AE=AG*,*BE=DG*,∠*B=*∠*ADG*,∠*BAE=*∠*DAG.*

∵∠*B*+∠*ADC=*180°,

∴∠*ADC*+∠*ADG=*180°,

∴*G*,*D*,*C*三点共线*.*

∵∠*BAE=*∠*DAG*,∴∠*BAD=*∠*EAG.*

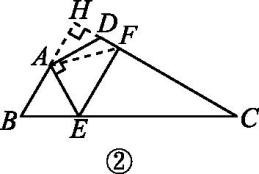
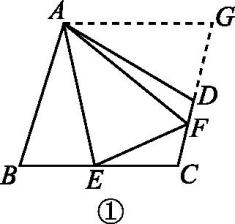
∵∠*EAF=*∠*BAD*,∴∠*GAF=*∠*FAE.*

又∵*AF=AF*,∴△*AFG*≌△*AFE*(SAS),

∴*GF=EF.*

∵*GF=GD*+*DF*,

∴*EF=BE*+*DF.*故答案为∠*EAF=*∠*BAD.*



【探究应用】 ∵∠*BAD=*150°,∠*DAE=*90°,

∴∠*BAE=*60°*.*

又∵∠*B=*60°,∴△*ABE*是等边三角形,

∴*BE=AB=*80*.*

如图②,连接*AF*,过点*A*作*AH*⊥*CD*交*CD*的延长线于点*H.*

在Rt△*AHD*中,∠*ADH=*180°-∠*ADC=*60°,*AD=*80,

∴∠*HAD=*30°,*HD=AD=*40,*AH==*40*.*

∵*DF=*40(-1),

∴*HF=HD*+*DF=*40+40(-1)*=*40,

∴在Rt△*AHF*中,*AH=HF*,∴∠*HAF=*45°,

∴∠*DAF=*15°,∴∠*EAF=*90°-15°*=*75°,

∴∠*EAF=*∠*BAD.*

运用上面的结论可得*EF=BE*+*DF=*80+40(-1)*=*40+40≈109*.*即这条道路*EF*的长约为109米*.*

12*.*[分析] (1)连接*AG*,由菱形*AEGH*的顶点*E*,*H*在菱形*ABCD*的边上,且∠*BAD=*60°,易得*A*,*G*,*C*共线,延长*HG*交*BC*于点*M*,延长*EG*交*DC*于点*N*,连接*MN*,交*GC*于点*O*,则四边形*GMCN*也为菱形,利用菱形对角线互相垂直,结合三角函数可得结论;

(2)连接*AG*,*AC*,由△*ADC*和△*AHG*都是等腰三角形,易证△*DAH*∽△*CAG*与△*DAH*≌△*BAE*,利用相似三角形的性质及菱形的性质可得结论;

(3)连接*AG*,*AC*,易证△*ADC*∽△*AHG*,△*DAH*∽△*CAG*和△*ADH*∽△*ABE*,利用相似三角形的性质可得结论*.*

解:(1)如图①,连接*AG*,

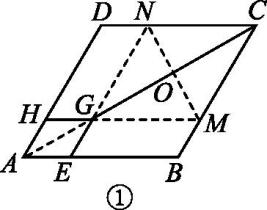
∵菱形*AEGH*的顶点*E*,*H*在菱形*ABCD*的边上,且∠*BAD=*60°,

∴∠*GAE=*∠*CAB=*30°,*AE=AH*,*AB=AD*,

∴*A*,*G*,*C*共线,*AB*-*AE=AD*-*AH*,

∴*HD=EB*,

延长*HG*交*BC*于点*M*,延长*EG*交*DC*于点*N*,连接*MN*,交*GC*于点*O*,则四边形*GMCN*也为菱形,



∴*GC*⊥*MN*,∠*NGO=*∠*AGE=*30°,

∴*=*cos30°*=*,

∵*GC=*2*OG*,

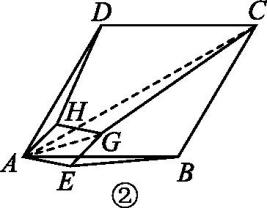
∴*=*,

∵四边形*HGND*为平行四边形,

∴*HD=GN*,

∴*HD*∶*GC*∶*EB=*1∶∶1*.*

(2)如图②,连接*AG*,*AC*,



∵△*ADC*和△*AHG*都是等腰三角形,

∴*AD*∶*AC=AH*∶*AG=*1∶,∠*DAC=*∠*HAG=*30°,

∴∠*DAH=*∠*CAG*,∴△*DAH*∽△*CAG*,

∴*HD*∶*GC=AD*∶*AC=*1∶,

∵∠*DAB=*∠*HAE=*60°,

∴∠*DAH=*∠*BAE*,

在△*DAH*和△*BAE*中,

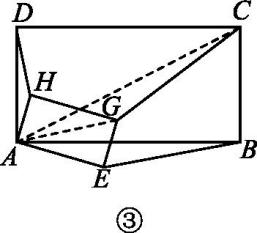
∴△*DAH*≌△*BAE*(SAS),

∴*HD=EB*,

∴*HD*∶*GC*∶*EB=*1∶∶1*.*

(3)有变化*.*

如图③,连接*AG*,*AC*,



∵*AD*∶*AB=AH*∶*AE=*1∶2,∠*ADC=*∠*AHG=*90°,

∴△*ADC*∽△*AHG*,

∴*AD*∶*AC=AH*∶*AG=*1∶,

∠*DAC=*∠*HAG*,

∴∠*DAH=*∠*CAG*,

∴△*DAH*∽△*CAG*,

∴*HD*∶*GC=AD*∶*AC=*1∶*.*

∵∠*DAB=*∠*HAE=*90°,

∴∠*DAH=*∠*BAE*,

∵*DA*∶*AB=HA*∶*AE=*1∶2,

∴△*ADH*∽△*ABE*,

∴*DH*∶*BE=AD*∶*AB=*1∶2,

∴*HD*∶*GC*∶*EB=*1∶∶2*.*