

北京市海淀外国语实验学校初三3月份月考数学试题

2020.3.17

班级_____ 姓名_____

考生须知	1. 本试卷共8页，共三道大题，28道小题。满分100分。考试时间120分钟。 2. 在试卷和答题卡上准确填写班级和姓名。 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4. 在答题卡上，作图题用2B铅笔作答，其他题用黑色字迹签字笔作答。
------	---

一、选择题（本题共16分，每小题2分）

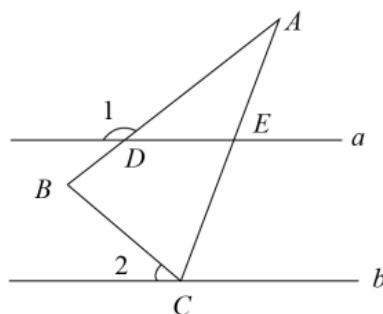
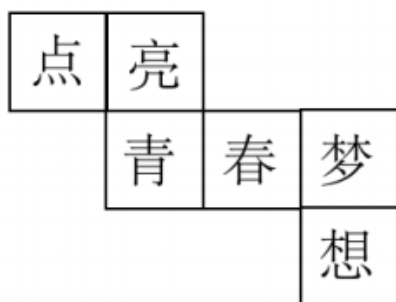
第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 响应党中央号召，连日来，全国广大共产党员继续踊跃捐款，表达对新冠肺炎疫情防控工作的支持。据统计，截至3月10日，全国已有7436万多名党员自愿捐款，共捐款76.8亿元，则76.8亿元用科学记数法可表示为

A. 7.68×10^9 元 B. 7.68×10^{10} 元 C. 76.8×10^8 元 D. 0.768×10^{10} 元

2. 某正方体的每个面上都有一个汉字，如图是它的一种展开图，那么在原正方体中，与“点”字所在面相对的面上的汉字是

A.青 B.春 C.梦 D.想



3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle A=30^\circ$ ，直线 $a \parallel b$ ，顶点C在直线b上，直线a交AB于点D，交AC于点E，若 $\angle 1=145^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是

A. 30° B. 35° C. 40° D. 45°

4. 下列运算正确的是

A. $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$ B. $(3a^2)^3 = 9a^6$ C. $5^{-3} \div 5^{-5} = \frac{1}{25}$ D. $\sqrt{8} - \sqrt{50} = -3\sqrt{2}$

5. 如图1，该大桥由五个高度不同，跨径也不同的抛物线型钢拱通过吊桥，拉锁与主梁相连，最高的钢拱如图2所示，此钢拱（近似看成二次函数的图象-抛物线）在同一竖直平面内，与拱脚所在的水平面相交于A，B两点，拱高为78米（即最高点O到AB的距离为78米），跨径为90米（即 $AB=90$ 米），以最高点O为坐标原点，以平行于AB的直线为x轴建立平面直角坐标系，则此抛物线钢拱的函数表达式为

A. $y = \frac{26}{675}x^2$ B. $y = -\frac{26}{675}x^2$ C. $y = \frac{13}{1350}x^2$ D. $y = -\frac{13}{1350}x^2$



图 1

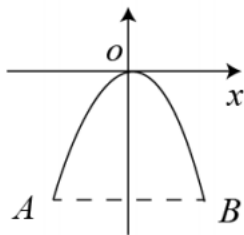
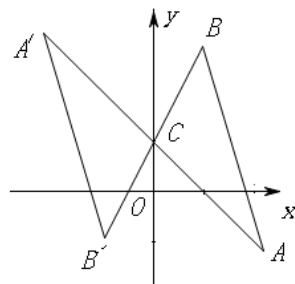
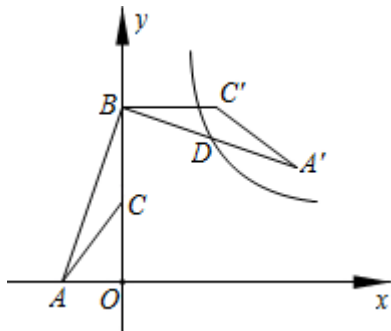


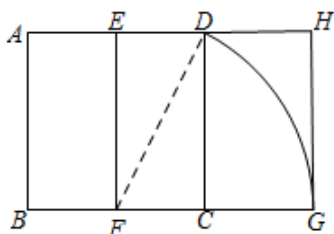
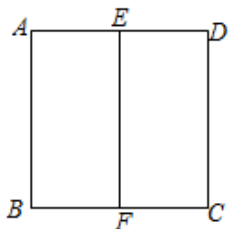
图 2



6. 如右上图, 将 $\triangle ABC$ 绕点 $C(0, 1)$ 旋转 180° 得到 $\triangle A'B'C$, 设点 A 的坐标为 (a, b) , 则点 A' 的坐标为
- A. $(-a, -b)$ B. $(-a, -b+1)$ C. $(-a, -b-1)$ D. $(-a, -b+2)$
7. 如图, 点 A 的坐标是 $(-2, 0)$, 点 B 的坐标是 $(0, 6)$, C 为 OB 的中点, 将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° 后得到 $\triangle A'B'C'$. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象恰好经过 $A'B$ 的中点 D , 则 k 的值是



- A. 9 B. 12 C. 15 D. 18
8. 宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (约为 0.618) 的矩形叫做黄金矩形. 黄金矩形蕴藏着丰富的美学价值, 给我们以协调和匀称的美感. 我们可以用这样的方法画出黄金矩形: 作正方形 $ABCD$, 分别取 AD , BC 的中点 E , F , 连接 EF ; 以点 F 为圆心, 以 FD 为半径画弧, 交 BC 的延长线与点 G ; 作 $GH \perp AD$, 交 AD 的延长线于点 H . 则图中下列矩形是黄金矩形的是
- A. 矩形 $DCGH$ B. 矩形 $EFCD$ C. 矩形 $EFGH$ D. 矩形 $ABFE$

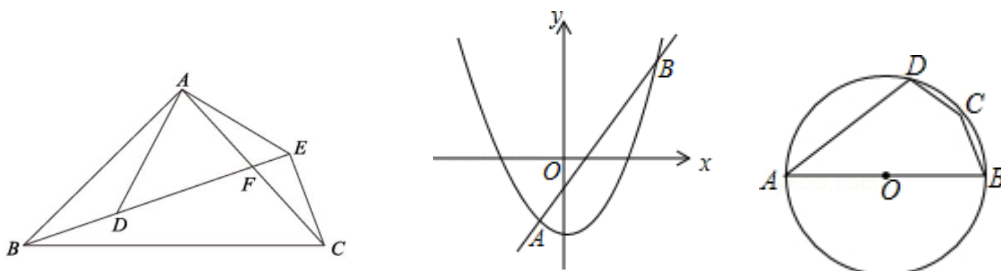


二、填空题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

9. 已知 $x=1$ 是方程 $x^2+bx-2=0$ 的一个根, 则方程的另一个根是_____.
10. 已知点 $P(x, y)$ 位于第四象限, 并且 $x \leq y+4$ (x, y 为整数), 写出一个符合上述条件的点 P 的坐标_____.

11. 已知一次函数 $y = kx + b$ ($b \neq 0$) 经过 $(2, -1), (-3, 4)$ 两点, 则它的图象不经过第_____象限.
12. 世界文化遗产“三孔”景区已经完成 5G 基站布设, “孔夫子家”自此有了 5G 网络. 5G 网络峰值速率为 4G 网络峰值速率的 10 倍, 在峰值速率下传输 500 兆数据, 5G 网络比 4G 网络快 45 秒, 求这两种网络的峰值速率. 设 4G 网络的峰值速率为每秒传输 x 兆数据, 依题意, 可列方程是_____.

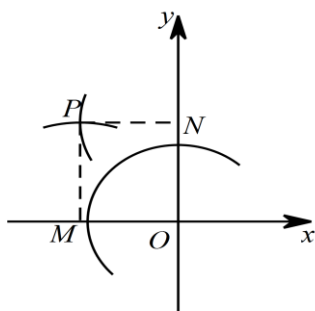
13. 如下图左, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 4\sqrt{6}$ cm, 点 D 为 $\triangle ABC$ 内一点, $\angle BAD = 15^\circ$, $AD = 6$ cm, 连接 BD , 将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针方向旋转, 使 AB 与 AC 重合, 点 D 的对应点 E , 连接 DE , DE 交 AC 于点 F , 则 CF 的长为_____cm.



14. 如上图, 抛物线 $y = ax^2 + c$ 与直线 $y = mx + n$ 交于 $A(-1, p)$, $B(3, q)$ 两点, 则不等式 $ax^2 + mx + c > n$ 的解集是_____.

15. 如上图右, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 \widehat{BD} 的中点. 若 $\angle A = 40^\circ$, 则 $\angle B =$ _____度.

16. 如图, 在平面直角坐标系中, 以 O 为圆心, 适当长为半径画弧, 交 x 轴于点 M , 交 y 轴于点 N , 再分别以点 M, N 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧, 两弧在第二象限内交于点 $P(a, b)$, 则 a 与 b 的数量关系是_____.



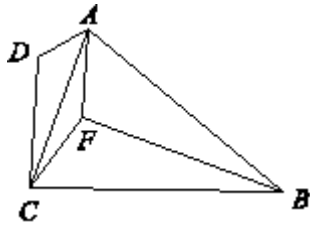
三、解答题 (本题共 68 分, 第 17-22 题, 每小题 5 分; 第 23-26 题, 每小题 6 分; 第 27-28 题, 每小题 7 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算: $6\sin 60^\circ - \sqrt{12} + (\frac{1}{2})^0 + |\sqrt{3} - 2020|$.

18. 已知 $x + y = xy$, 求代数式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - (1-x)(1-y)$ 的值.

19. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC$, BF 平分 $\angle ABC$, $AF \parallel DC$, 连接 AC , CF .

求证: (1) $AF=CF$; (2) CA 平分 $\angle DCF$.



20. 去年某市为创评“全国文明城市”称号, 周末团市委组织志愿者进行宣传活动. 班主任梁老师决定从 4 名女班干部 (小悦、小文、小雅和小宇) 中通过抽签方式确定 2 名女生去参加. 抽签规则: 将 4 名女班干部姓名分别写在 4 张完全相同的卡片正面, 把四张卡片背面朝上, 洗匀后放在桌面上, 梁老师先从中随机抽取一张卡片, 记下姓名, 再从剩余的 3 张卡片中随机抽取第二张, 记下姓名.

(1) 该班男生“小安被抽中”是_____事件, “小悦被抽中”是_____事件 (填“不可能”或“必然”或“随机”); 第一次抽取卡片“小文被抽中”的概率为_____;

(2) 试用画树状图或列表的方法表示这次抽签所有可能的结果, 并求出“小雅被抽中”的概率.

21. 阅读以下材料, 并按要求完成相应的任务:

莱昂哈德 欧拉 (Leonhard Euler) 是瑞士数学家, 在数学上经常见到以他的名字命名的重要常数、公式和定理, 下面是欧拉发现的一个定理: 在 $\triangle ABC$ 中, R 和 r 分别为外接圆和内

切圆的半径, O 和 I 分别为其外心和内心, 则 $OI^2 = R^2 - 2Rr$. 下面是该定理的证明过程 (借助了第(2)问的结论):

延长 AI 交 $\odot O$ 于点 D , 过点 I 作 $\odot O$ 的直径 MN , 连接 DM , AN .

$\because \angle D = \angle N$, $\therefore \angle DMI = \angle NAI$ (同弧所对的圆周角相等),

$$\therefore \triangle MDI \sim \triangle ANI. \therefore \frac{IM}{IA} = \frac{ID}{IN}, \therefore IA \cdot ID = IM \cdot IN \text{ ①}$$

如图②, 在图 1 (隐去 MD , AN) 的基础上作 $\odot O$ 的直径 DE , 连接 BE , BD , BI , IF

$\because DE$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle DBE = 90^\circ$.

$\because \odot I$ 与 AB 相切于点 F , $\therefore \angle AFI = 90^\circ$,

$\therefore \angle DBE = \angle IFA$.

$\because \angle BAD = \angle E$ (同弧所对圆周角相等),

$\therefore \triangle AIF \sim \triangle EDB$.

$$\therefore \frac{IA}{DE} = \frac{IF}{BD}, \therefore IA \cdot BD = DE \cdot IF \text{ ②}$$

由 (2) 知: $BD = ID$

$$\therefore IA \cdot ID = DE \cdot IF$$

$$\text{又} \because DE \cdot IF = IM \cdot IN$$

$$\therefore 2Rr = (R+d)(R-d),$$

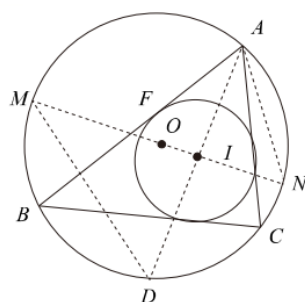
$$\therefore R^2 - d^2 = 2Rr$$

$$\therefore d^2 = R^2 - 2Rr$$

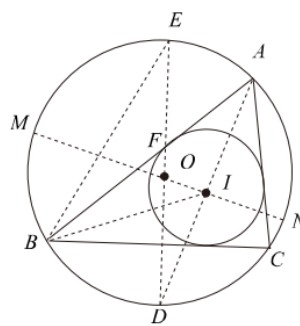
任务: (1) 观察发现: $IM = R + d$, $IN =$ _____ (用含 R, d 的代数式表示);

(2) 请判断 BD 和 ID 的数量关系, 并说明理由. (请利用图 1 证明)

(3) 应用: 若 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 6cm , 内切圆的半径为 2cm , 则 $\triangle ABC$ 的外心与内心之间的距离为 _____ cm .



第21题图1

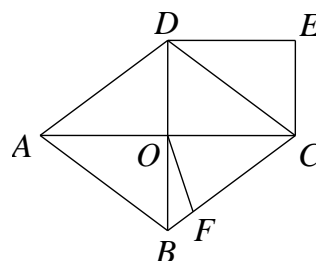
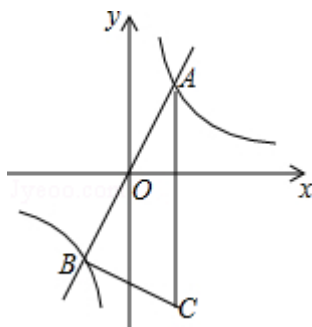


第21题图2

22. 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象与正比例函数 $y = 2x$ 的图象相交于

$A(1, a)$, B 两点, 点 C 在第四象限, $CA \parallel y$ 轴, $\angle ABC = 90^\circ$.

(1) 求 k 的值及点 B 的坐标; (2) 求 $\tan C$ 的值.



23. 如上图右, 菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 交于 O 点, $DE \parallel AC$, $CE \parallel BD$.

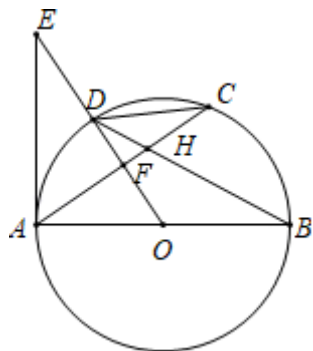
(1) 求证: 四边形 $OCED$ 为矩形;

(2) 在 BC 上截取 $CF = CO$, 连接 OF , 若 $AC = 16$, $BD = 12$, 求四边形 $OFCD$ 的面积.

24. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 是 $\odot O$ 上一点, D 是 \widehat{AC} 的中点, E 为 OD 延长线上一点, 且 $\angle CAE = 2\angle C$, AC 与 BD 交于点 H , 与 OE 交于点 F .

(1) 求证: AE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $DH = 6$, $\tan C = \frac{3}{4}$, 求直径 AB 的长.



25. 阅读下面的材料:

如果函数 $y = f(x)$ 满足: 对于自变量 x 的取值范围内的任意 x_1, x_2 ,

(1) 若 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是增函数;

(2) 若 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 是减函数.

例题: 证明函数 $f(x) = \frac{6}{x}$ ($x > 0$) 是减函数.

证明: 设 $0 < x_1 < x_2$,

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{6}{x_1} - \frac{6}{x_2} = \frac{6x_2 - 6x_1}{x_1x_2} = \frac{6(x_2 - x_1)}{x_1x_2}.$$

$$\because 0 < x_1 < x_2,$$

$$\therefore x_2 - x_1 > 0, \quad x_1x_2 > 0.$$

$$\therefore \frac{6(x_2 - x_1)}{x_1x_2} > 0. \quad \text{即 } f(x_1) - f(x_2) > 0.$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2).$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) = \frac{6}{x} \quad (x > 0) \text{ 是减函数.}$$

根据以上材料, 解答下面的问题:

$$\text{已知函数 } f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x \quad (x < 0),$$

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} + (-2) = -1, f(-2) = \frac{1}{(-2)^2} + (-4) = -\frac{15}{4}$$

(1) 计算: $f(-3) = \underline{\hspace{2cm}}$, $f(-4) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 猜想: 函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} + 2x (x < 0)$ 是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 函数 (填“增”或“减”);

(3) 请仿照例题证明你的猜想.

26. 已知抛物线 $y = -2x^2 + (m-2)x + (n-2020)$ (m, n 为常数).

(1) 若抛物线的对称轴为直线 $x=1$, 且经过点 $(0, -1)$, 求 m, n 的值;

(2) 若抛物线上始终存在不重合的两点关于原点对称, 求 n 的取值范围;

(3) 在(1)的条件下, 存在正实数 $a, b (a < b)$, 当 $a \leq x \leq b$ 时, 恰好有 $\frac{1}{b} \leq y \leq \frac{1}{a}$,

请直接写出 a, b 的值.

27. 小明研究了这样一道几何题: 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, 把 AB 绕点 A 顺时针旋转

$\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ 得到 AB' , 把 AC 绕点 A 逆时针旋转 β 得到 AC' , 连接 $B'C'$. 当

$\alpha + \beta = 180^\circ$ 时, 请问 $\triangle AB'C'$ 边 $B'C'$ 上的中线 AD 与 BC 的数量关系是什么?

以下是他的研究过程:

特例验证:

(1) ①如图 2, 当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时, AD 与 BC 的数量关系为 $AD = \underline{\hspace{2cm}} BC$;

②如图 3, 当 $\angle BAC = 90^\circ, BC = 8$ 时, 则 AD 长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

猜想论证:

(2) 在图 1 中, 当 $\triangle ABC$ 为任意三角形时, 猜想 AD 与 BC 的数量关系, 并给予证明.

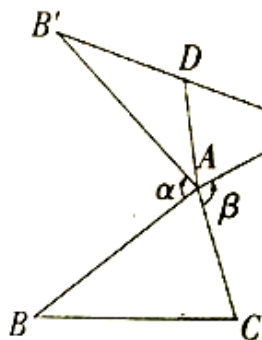


图 1

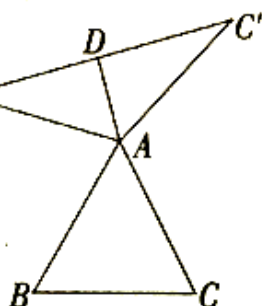


图 2

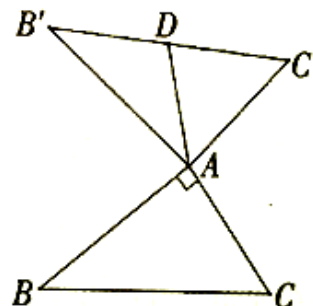


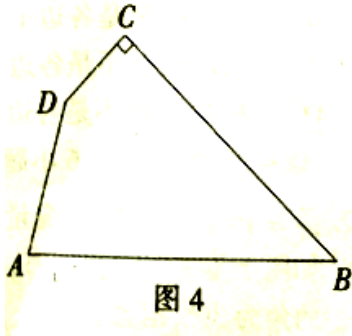
图 3

拓展应用

(3) 如图 4, 在四边形 $ABCD$,

$\angle C = 90^\circ, \angle A + \angle B = 120^\circ, BC = 12\sqrt{3}, CD = 6, DA = 6\sqrt{3}$. 在四边形内部

是否存在点 P , 使 $\triangle PDC$ 与 $\triangle PAB$ 之间满足小明探究的问题中的边角关系? 若存在, 请画出点 P 的位置 (保留作图痕迹, 不需要说明) 并直接写出 $\triangle PDC$ 的边 DC 上的中线 PQ 的长度; 若不存在, 说明理由.

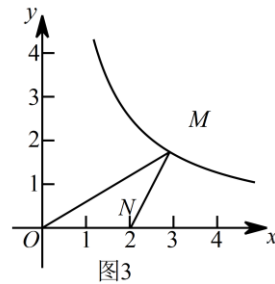
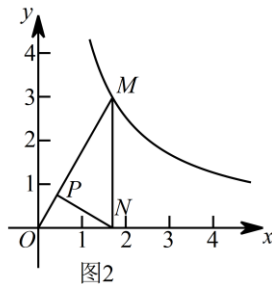
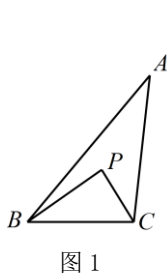


28. 定义: 点 P 是 $\triangle ABC$ 内部或边上的点 (顶点除外), 在 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCA$ 中, 若至少有一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 则称点 P 是 $\triangle ABC$ 的自相似点.

例如: 如图 1, 点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部, $\angle PBC = \angle A, \angle BCP = \angle ABC$, 则 $\triangle BCP \sim \triangle ABC$, 故点 P 是 $\triangle ABC$ 的自相似点.

请你运用所学知识, 结合上述材料, 解决下列问题:

在平面直角坐标系中, 点 M 是曲线 $y = \frac{3\sqrt{3}}{x} (x > 0)$ 上的任意一点, 点 N 是 x 轴正半轴上的任意一点.



(1) 如图 2, 点 P 是 OM 上一点, $\angle ONP = \angle M$, 请判断点 P 是 $\triangle MON$ 的自相似点吗? _____ (填是或不是); 当点 M 的坐标是 $(\sqrt{3}, 3)$, 点 N 的坐标是 $(\sqrt{3}, 0)$ 时, 请直接写出点 P 的坐标_____;

(2) 如图 3, 当点 M 的坐标是 $(3, \sqrt{3})$, 点 N 的坐标是 $(2, 0)$ 时, 求 $\triangle MON$ 的自相似点的坐标;

(3) 是否存在点 M 和点 N , 使 $\triangle MON$ 无自相似点? 若存在, 请直接写出这两点的坐标; 若不存在, 请说明理由.

北京市海淀区外国语实验学校初三 3 月份月考数学答题纸

班级_____ 姓名_____

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

1	2	3	4	5	6	7	8

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

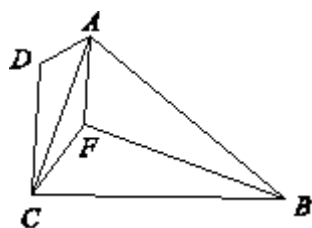
9	10	11	12
13	14	15	16

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分；第 23-26 题，每小题 6 分；第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算： $6\sin 60^\circ - \sqrt{12} + \left(\frac{1}{2}\right)^0 + |\sqrt{3} - 2020|$.

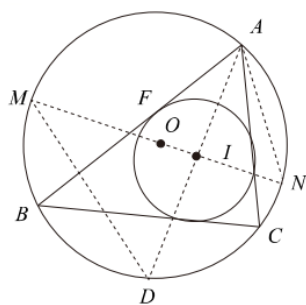
18. 已知 $x + y = xy$ ，求代数式 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - (1-x)(1-y)$ 的值.

19. 证明：



20. (1) _____、_____、_____；
(2)

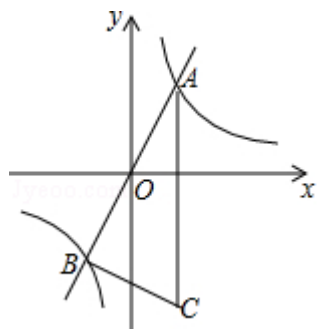
21. (1) $IN =$ _____;
 (2) 证明:



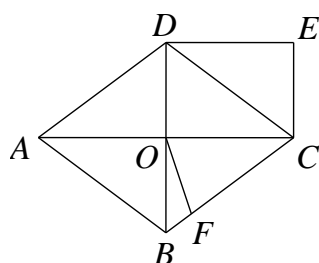
第21题图1

- (3) _____ cm.

22.



23.



27. (1) ① $AD = \underline{\hspace{2cm}} BC$;

② $AD = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2)

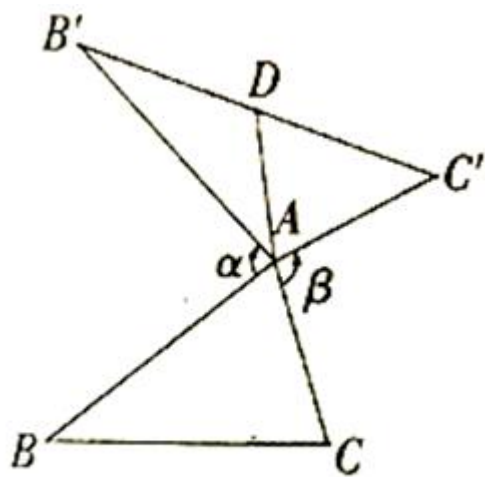


图 1

(3)

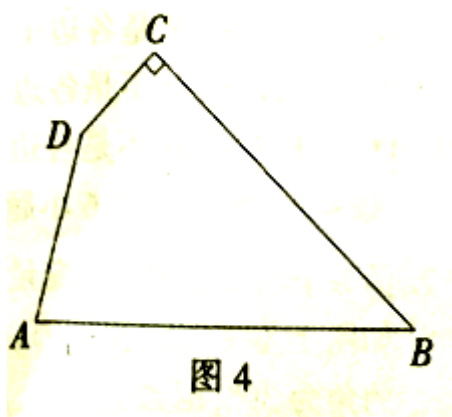
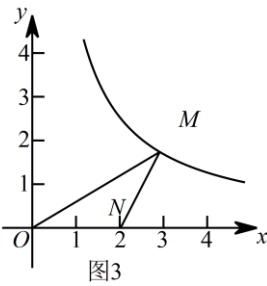


图 4

28.

(1) _____、 _____

(2)



(3)