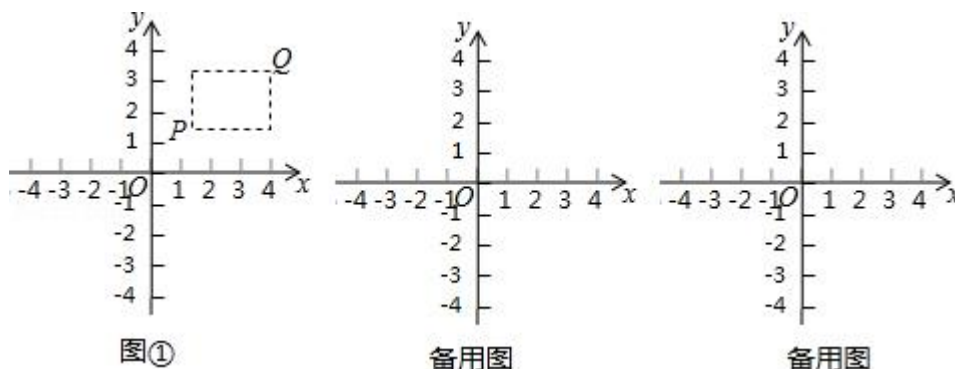


## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

### 第一部分 案例分析

#### 【案例 1】一次函数问题

在平面直角坐标系  $xOy$  中，点  $P$  的坐标为  $(x_1, y_1)$ ，点  $Q$  的坐标为  $(x_2, y_2)$ ，且  $x_1 \neq x_2$ ， $y_1 \neq y_2$ 。若  $P, Q$  为某个矩形的两个顶点，且该矩形的边均与某条坐标轴垂直，则称该矩形为点  $P, Q$  的“相关矩形”，下图①为点  $P, Q$  的“相关矩形”的示意图。



已知点  $A$  的坐标为  $(1, 0)$ ，

- (1) 若点  $B$  的坐标为  $(3, 1)$ ，求点  $A, B$  的“相关矩形”的面积；
- (2) 点  $C$  在直线  $x=3$  上，若点  $A, C$  的“相关矩形”为正方形，求直线  $AC$  的表达式；
- (3) 若点  $D$  的坐标为  $(4, 2)$ ，将直线  $y=2x+b$  平移，当它与点  $A, D$  的“相关矩形”没有公共点时，求出  $b$  的取值范围。

**【解答】**解：(1)  $\because A(1, 0), B(3, 1)$

由定义可知：点  $A, B$  的“相关矩形”的底与高分别为 2 和 1，

$\therefore$  点  $A, B$  的“相关矩形”的面积为  $2 \times 1 = 2$ ；

(2) 由定义可知： $AC$  是点  $A, C$  的“相关矩形”的对角线，

又  $\because$  点  $A, C$  的“相关矩形”为正方形

$\therefore$  直线  $AC$  与  $x$  轴的夹角为  $45^\circ$ ，

设直线  $AC$  的解析为： $y=x+m$  或  $y=-x+n$

把  $(1, 0)$  分别  $y=x+m$ ，

$\therefore m = -1$ ，

$\therefore$  直线  $AC$  的解析为： $y=x-1$ ，

把  $(1, 0)$  代入  $y=-x+n$ ，

$\therefore n = 1$ ，

$\therefore y = -x+1$ ，

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

综上所述，若点  $A, C$  的“相关矩形”为正方形，直线  $AC$  的表达式为  $y=x-1$  或  $y=-x+1$ ；

(3) 把  $A(1, 0), D(4, 2)$  分别代入  $y=2x+b\pm 2$ ,

得出  $b=0$ , 或  $b=-8$ ,

$\therefore b>0$  或  $b<-8$

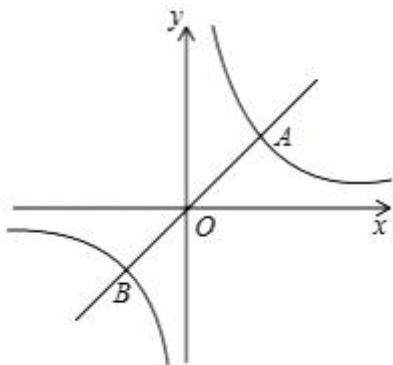
### 【案例 2】反比例函数问题

如图，定义：若双曲线  $y=\frac{k}{x}$  ( $k>0$ ) 与它的其中一条对称轴  $y=x$  相交于  $A, B$  两点，则线段  $AB$  的长度为双曲线  $y=\frac{k}{x}$  ( $k>0$ ) 的对径.

(1) 求双曲线  $y=\frac{1}{x}$  的对径.

(2) 仿照上述定义，定义双曲线  $y=\frac{k}{x}$  ( $k<0$ ) 的对径，并直接写出  $y=-\frac{3}{x}$  的对径.

(3) 若双曲线  $y=\frac{k}{x}$  的对径是  $10\sqrt{2}$ , 求  $k$  的值.



【解答】解：过  $A$  点作  $AC \perp x$  轴于  $C$ , 如图,

(1) 解方程组  $\begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ y=x \end{cases}$ , 得  $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ ,

$\therefore A$  点坐标为  $(1, 1)$ ,  $B$  点坐标为  $(-1, -1)$ ,

$\therefore OC=AC=1$ ,

$\therefore OA=\sqrt{2}OC=\sqrt{2}$ ,

$\therefore AB=2OA=2\sqrt{2}$ ,

$\therefore$  双曲线  $y=\frac{1}{x}$  的对径是  $2\sqrt{2}$ ;

(2) 若双曲线  $y=\frac{k}{x}$  ( $k<0$ ) 与它的其中一条对称轴  $y=-x$  相交于  $A, B$  两点,

则线段  $AB$  的长度为双曲线  $y=\frac{k}{x}$  ( $k<0$ ) 的对径.

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

同 (1) 的方法得出,  $y = -\frac{3}{x}$  的对径为  $2\sqrt{6}$ .

(3)  $\because$  双曲线  $y = \frac{k}{x}$  的对径为  $10\sqrt{2}$ , 即  $AB = 10\sqrt{2}$ ,  $OA = 5\sqrt{2}$ ,

$$\therefore OA = \sqrt{2}OC = \sqrt{2}AC,$$

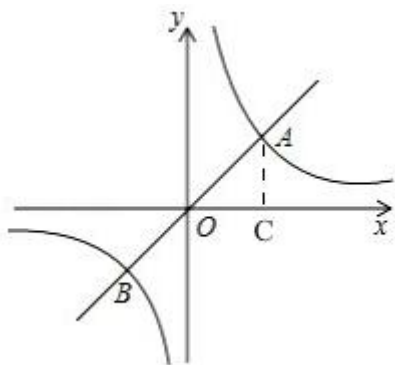
$$\therefore OC = AC = 5,$$

$\therefore$  点  $A$  坐标为  $(5, 5)$ , 或点  $A$  坐标为  $(-5, 5)$

把  $A(5, 5)$  代入双曲线  $y = \frac{k}{x}$  ( $k > 0$ ) 得  $k = 5 \times 5 = 25$ , 即  $k$  的值为 25;

把  $A(-5, 5)$  代入双曲线  $y = \frac{k}{x}$  ( $k < 0$ ) 得  $k = -5 \times 5 = -25$ , 即  $k$  的值为 -25;

即  $k$  的值为 25 或 -25.



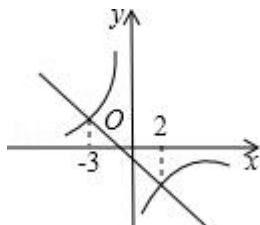
### 【案例 3】一次函数与反比例函数综合问题

定义运算  $\max\{a, b\}$ : 当  $a \geq b$  时,  $\max\{a, b\} = a$ ; 当  $a < b$  时,  $\max\{a, b\} = b$ . 如  $\max\{-3, 2\} = 2$ .

(1)  $\max\{\sqrt{7}, 3\} = \underline{3}$ ;

(2) 已知  $y_1 = \frac{k_1}{x}$  和  $y_2 = k_2x + b$  在同一坐标系中的图象如图所示, 若  $\max\{\frac{k_1}{x}, k_2x + b\} = \frac{k_1}{x}$ , 结合图象, 直接写出  $x$  的取值范围;

(3) 用分类讨论的方法, 求  $\max\{2x+1, x-2\}$  的值.



**【解答】**解: (1)  $\max\{\sqrt{7}, 3\} = 3$ .

故答案为: 3;

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

$$(2) \because \max\{\frac{k_1}{x}, k_2x+b\} = \frac{k_1}{x},$$

$$\therefore \frac{k_1}{x} \geq k_2x+b,$$

$\therefore$  从图象可知:  $x$  的取值范围为  $-3 \leq x < 0$  或  $x \geq 2$ ;

$$(3) \text{ 当 } 2x+1 \geq x-2 \text{ 时, } \max\{2x+1, x-2\} = 2x+1,$$

$$\text{当 } 2x+1 < x-2 \text{ 时, } \max\{2x+1, x-2\} = x-2.$$

## 第二部分 专项训练

### 专项训练 1: 一次函数问题

#### 一. 选择题 (共 2 小题)

1. 定义: 点  $A(x, y)$  为平面直角坐标系内的点, 若满足  $x=y$ , 则把点  $A$  叫做“平衡点”, 例如:  $M(1, 1)$ ,  $N(-2, -2)$  都是“平衡点”, 当  $-1 \leq x \leq 3$  时, 直线  $y=2x+m$  上有“平衡点”, 则  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $0 \leq m \leq 1$       B.  $-1 \leq m \leq 0$       C.  $-3 \leq m \leq 3$       D.  $-3 \leq m \leq 1$

【解答】解:  $\because x=y$ ,

$$\therefore x=2x+m, \text{ 即 } x=-m.$$

$$\because -1 \leq x \leq 3,$$

$$\therefore -1 \leq -m \leq 3,$$

$$\therefore -3 \leq m \leq 1.$$

故选: D.

2. 对于实数  $a, b$ , 我们定义符号  $\max\{a, b\}$  的意义为: 当  $a \geq b$  时,  $\max\{a, b\} = a$ ; 当  $a < b$  时,  $\max\{a, b\} = b$ ; 如:  $\max\{4, -2\} = 4$ ,  $\max\{3, 3\} = 3$ , 若关于  $x$  的函数为  $y = \max\{x+3, -x+1\}$ , 则该函数的最小值是 ( )

- A. 0      B. 2      C. 3      D. 4

【解答】解: 当  $x+3 \geq -x+1$ ,

$$\text{即: } x \geq -1 \text{ 时, } y = x+3,$$

$$\therefore \text{当 } x = -1 \text{ 时, } y_{\min} = 2,$$

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

当  $x+3 < -x+1$ ,

即:  $x < -1$  时,  $y = -x+1$ ,

$\therefore x < -1$ ,

$\therefore -x > 1$ ,

$\therefore -x+1 > 2$ ,

$\therefore y > 2$ ,

$\therefore y_{\min} = 2$ ,

故选: B.

### 二. 填空题 (共 1 小题)

3. 我们规定: 当  $k, b$  为常数,  $k \neq 0, b \neq 0, k \neq b$  时, 一次函数  $y=kx+b$  与  $y=bx+k$  互为交换函数. 例如:  $y=4x+3$  的交换函数为  $y=3x+4$ . 一次函数  $y=kx+2$  与它的交换函数图象的交点横坐标为 1.

【解答】解: 由题意可得,

$$\begin{cases} y=kx+2 \\ y=2x+k \end{cases},$$

解得,  $\begin{cases} x=1 \\ y=k+2 \end{cases}$ ,

故答案为: 1.

### 三. 解答题 (共 9 小题)

4. 如果两个一次函数  $y=k_1x+b_1$  和  $y=k_2x+b_2$  满足  $k_1=k_2, b_1 \neq b_2$ , 那么称这两个一次函数为“平行一次函数”.

已知函数  $y=-2x+4$  的图象与  $x$  轴、 $y$  轴分别交于  $A, B$  两点, 一次函数  $y=kx+b$  与  $y=-2x+4$  是“平行一次函数”

(1) 若函数  $y=kx+b$  的图象过点  $(3, 1)$ , 求  $b$  的值;

(2) 若函数  $y=kx+b$  的图象与两坐标轴围成的面积是  $\triangle AOB$  面积的  $\frac{1}{4}$ , 求  $y=kx+b$  的解

析式.

【解答】解: (1)  $\because$  一次函数  $y=kx+b$  与  $y=-2x+4$  是“平行一次函数”,

$\therefore k = -2$ , 即  $y = -2x+b$ .

$\because$  函数  $y=kx+b$  的图象过点  $(3, 1)$ ,

$\therefore 1 = -2 \times 3 + b$ ,

$\therefore b = 7$ .

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

(2) 在  $y = -2x + 4$  中, 令  $x = 0$ , 得  $y = 4$ , 令  $y = 0$ , 得  $x = 2$ ,

$\therefore A(2, 0), B(0, 4)$ ,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 4.$$

由 (1) 知  $k = -2$ , 则直线  $y = -2x + b$  与两坐标轴交点的坐标为  $(\frac{b}{2}, 0), (0, b)$ ,

$$\text{于是有 } \frac{1}{2}|b| \cdot |\frac{b}{2}| = 4 \times \frac{1}{4} = 1,$$

$$\therefore b = \pm 2,$$

即  $y = kx + b$  的解析式为  $y = -2x + 2$  或  $y = -2x - 2$ .

5. 定义: 对于给定的两个函数, 任取自变量  $x$  的一个值, 当  $x < 0$  时, 它们对应的函数值互为相反数; 当  $x \geq 0$  时, 它们对应的函数值相等, 我们称这样的两个函数互为相关函数. 例

如: 一次函数  $y = x - 1$ , 它们的相关函数为  $y = \begin{cases} -x + 1 (x < 0) \\ x - 1 (x \geq 0) \end{cases}$ .

(1) 已知点  $A(-5, 8)$  在一次函数  $y = ax - 3$  的相关函数的图象上, 求  $a$  的值;

(2) 已知二次函数  $y = -x^2 + 4x - \frac{1}{2}$ .

① 当点  $B(m, \frac{3}{2})$  在这个函数的相关函数的图象上时, 求  $m$  的值;

② 当  $-3 \leq x \leq 3$  时, 求函数  $y = -x^2 + 4x - \frac{1}{2}$  的相关函数的最大值和最小值.

**【解答】** 解: (1)  $y = ax - 3$  的相关函数  $y = \begin{cases} -ax + 3 (x < 0) \\ ax - 3 (x \geq 0) \end{cases}$ ,

将  $A(-5, 8)$  代入  $y = -ax + 3$  得:  $5a + 3 = 8$ ,

解得  $a = 1$ ;

(2) 二次函数  $y = -x^2 + 4x - \frac{1}{2}$  的相关函数为  $y = \begin{cases} x^2 - 4x + \frac{1}{2} (x < 0) \\ -x^2 + 4x - \frac{1}{2} (x \geq 0) \end{cases}$ ,

① 当  $m < 0$  时, 将  $B(m, \frac{3}{2})$  代入  $y = x^2 - 4x + \frac{1}{2}$

$$\text{得 } m^2 - 4m + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

解得:  $m = 2 + \sqrt{5}$  (舍去), 或  $m = 2 - \sqrt{5}$ ,

当  $m \geq 0$  时, 将  $B(m, \frac{3}{2})$  代入  $y = -x^2 + 4x - \frac{1}{2}$  得:

$$-m^2 + 4m - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

解得:  $m = 2 + \sqrt{2}$  或  $m = 2 - \sqrt{2}$ .

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

综上所述： $m=2-\sqrt{5}$ 或 $m=2+\sqrt{2}$ 或 $m=2-\sqrt{2}$ ;

②当 $-3\leq x<0$ 时， $y=x^2-4x+\frac{1}{2}$ ，抛物线的对称轴为 $x=2$ ，

此时 $y$ 随 $x$ 的增大而减小，

$\therefore$ 此时 $y$ 的最大值为 $\frac{43}{2}$ ，

当 $0\leq x\leq 3$ 时，函数 $y=-x^2+4x-\frac{1}{2}$ ，抛物线的对称轴为 $x=2$ ，

当 $x=0$ 有最小值，最小值为 $-\frac{1}{2}$ ，当 $x=2$ 时，有最大值，最大值 $y=\frac{7}{2}$ ，

综上所述，当 $-3\leq x\leq 3$ 时，函数 $y=-x^2+4x-\frac{1}{2}$ 的相关函数的最大值为 $\frac{43}{2}$ ，最小值为 $-\frac{1}{2}$ 。

6. 当 $m, n$ 是正实数，且满足 $m+n=mn$ 时，就称点 $P(m, \frac{m}{n})$ 为“完美点”，已知点 $A(0, 5)$ 与点 $M$ 都在直线 $y=-x+b$ 上，点 $B, C$ 是“完美点”，且点 $B$ 在线段 $AM$ 上，若 $MC=\sqrt{3}$ ， $AM=4\sqrt{2}$ ，求 $\triangle MBC$ 的面积。

【解答】解： $\because m+n=mn$ 且 $m, n$ 是正实数，

$$\therefore \frac{m}{n}+1=m, \text{ 即 } \frac{m}{n}=m-1,$$

$$\therefore P(m, m-1),$$

即“完美点” $B$ 在直线 $y=x-1$ 上，

$\because$ 点 $A(0, 5)$ 在直线 $y=-x+b$ 上，

$$\therefore b=5,$$

$$\therefore \text{直线 } AM: y=-x+5,$$

$\because$ “完美点” $B$ 在直线 $AM$ 上，

$$\therefore \text{由 } \begin{cases} y=x-1 \\ y=-x+5 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases},$$

$$\therefore B(3, 2),$$

$\because$ 一、三象限的角平分线 $y=x$ 垂直于二、四象限的角平分线 $y=-x$ ，而直线 $y=x-1$ 与直线 $y=x$ 平行，直线 $y=-x+5$ 与直线 $y=-x$ 平行，

$\therefore$ 直线 $AM$ 与直线 $y=x-1$ 垂直，

$\because$ 点 $B$ 是直线 $y=x-1$ 与直线 $AM$ 的交点，

$\therefore$ 垂足是点 $B$ ，

$\because$ 点 $C$ 是“完美点”，

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

$\therefore$  点  $C$  在直线  $y=x-1$  上,

$\therefore \triangle MBC$  是直角三角形,

$\because B(3, 2), A(0, 5),$

$\therefore AB=3\sqrt{2},$

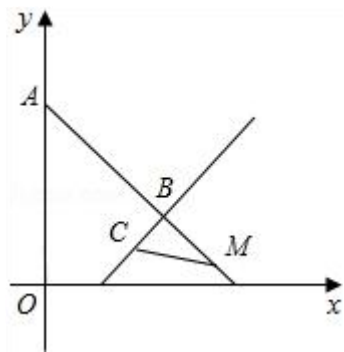
$\because AM=4\sqrt{2},$

$\therefore BM=\sqrt{2},$

又  $\because CM=\sqrt{3},$

$\therefore BC=1,$

$\therefore S_{\triangle MBC}=\frac{1}{2}BM \cdot BC=\frac{\sqrt{2}}{2}.$



7. 对于平面直角坐标系中的任意两点  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ , 我们把  $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$  叫做  $P_1$ 、 $P_2$  两点间的直角距离, 记作  $d(P_1, P_2)$ .

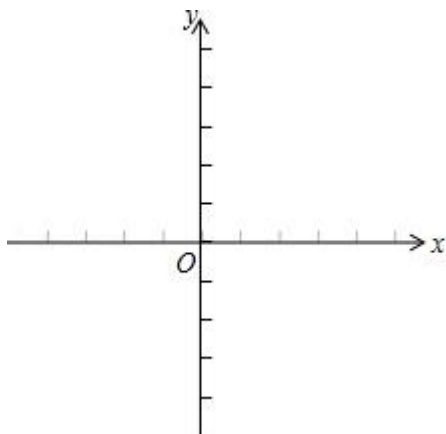
(1) 已知  $P_1(1, -2)$ ,  $P_2(-3, 4)$ , 求  $d(P_1, P_2)$ ;

(2) 已知  $O$  为坐标原点, 动点  $P(x, y)$  满足  $d(O, P) = 1$ , 请写出  $x$  与  $y$  之间满足的关系式, 并在所给的直角坐标系中画出所有符合条件的点  $P$  所组成的图形;

(3) 设  $P_0(x_0, y_0)$  是一定点,  $Q(x, y)$  是直线  $y=ax+b$  上的动点, 我们把  $d(P_0, Q)$  的最小值叫做  $P_0$  到直线  $y=ax+b$  的直角距离, 试求点  $M(2, 1)$  到直线  $y=x+2$  的直角距离.



## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版



【解答】解：（1） $\because P_1(1, -2)$ 、 $Q_1(-3, 4)$

$\therefore P_1$ 、 $Q_1$  两点的直角距离为  $d(P_1, Q_1) = |1+3| + |-2-4| = 10$ ,

（2） $\because$  坐标原点  $O$  点坐标为  $(0, 0)$ ，动点  $P(x, y)$  满足  $d(O, P) = 1$ ,

$\therefore |0-x| + |0-y| = 1$ ,

即  $|x| + |y| = 1$ .

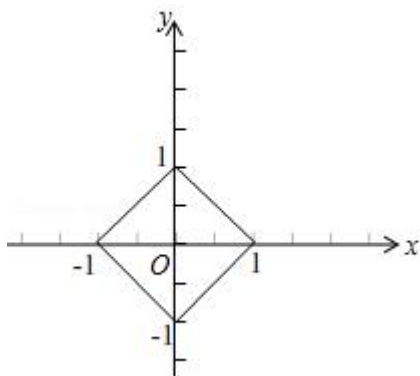
（3） $\because Q(x, y)$  是直线  $y=x+2$  上的动点， $M(2, 1)$ ,

$\therefore Q(x, x+2)$ ,

$\therefore d(M, Q) = |2-x| + |1-(x+2)| = |2-x| + |-1-x| = |x-2| + |x+1|$ ,

$\because |x-2| + |x+1|$  表示数轴上实数  $x$  所对应的点到  $-1$  和  $2$  所对应的点的距离之和，其最小值为  $3$ .

$\therefore$  点  $M(2, 1)$  到直线  $y=x+2$  的直角距离是  $3$ .



8. 我们给出如下定义：如图 1，平面内两直线  $l_1$ 、 $l_2$  相交于点  $O$ ，对于平面内的任意一点  $M$ ，

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

若  $p$ 、 $q$  分别是点  $M$  到直线  $l_1$  和  $l_2$  的距离 ( $p \geq 0, q \geq 0$ )，我们称有序非负实数对  $[p, q]$  是点  $M$  的距离坐标。

根据上述定义请解答下列问题：

如图 2，平面直角坐标系  $xOy$  中，直线  $l_1$  的解析式为  $y=x$ ，直线  $l_2$  的解析式为  $y=\frac{1}{2}x$ ，

$M$  是平面直角坐标系内的点，

- (1) 若  $p=q=0$ ，求距离坐标为  $[0, 0]$  时，点  $M$  的坐标；
- (2) 若  $q=0$ ，且  $p+q=m$  ( $m>0$ )，利用图 2，求距离坐标为  $[p, q]$  时，点  $M$  的坐标；
- (3) 若  $p=1, q=1$ ，则坐标平面内距离坐标为  $[p, q]$  的时候，点  $M$  可以有几个位置？在图 3 中画出所有符合条件的点  $M$ （简要说明画法）。

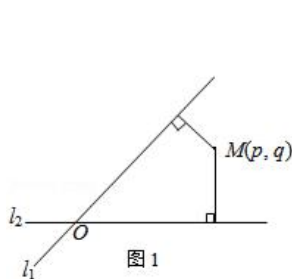


图 1

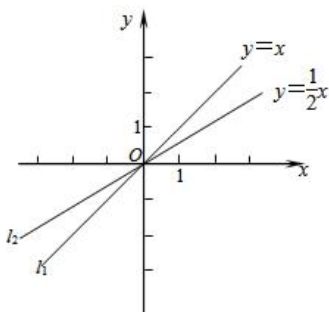


图 2

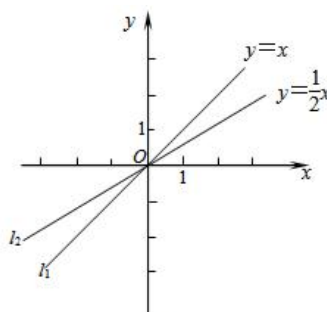


图 3

**【解答】**解：(1) 若  $p=q=0$ ，则点  $M$  既在直线  $l_1$  上又在直线  $l_2$  上，是两直线的交点，则  $M(0, 0)$ ；

(2) 若  $q=0$ ，且  $p+q=m$  ( $m>0$ )，即  $p=m$ ，则点  $M$  在直线  $l_2$  上，与直线  $l_1$  相距  $m$ 。当点  $M$  在第一象限时，如图 1：

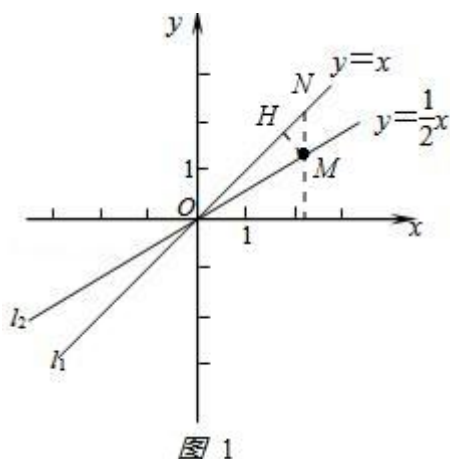


图 1

作  $MH \perp l_1$  于  $H$ ，作  $MN \parallel y$  轴，交  $l_1$  于  $N$ ，则  $MH=m$ ， $MN=\sqrt{2}m$ 。

设  $M(x, \frac{1}{2}x)$ ， $N(x, x)$ ，

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

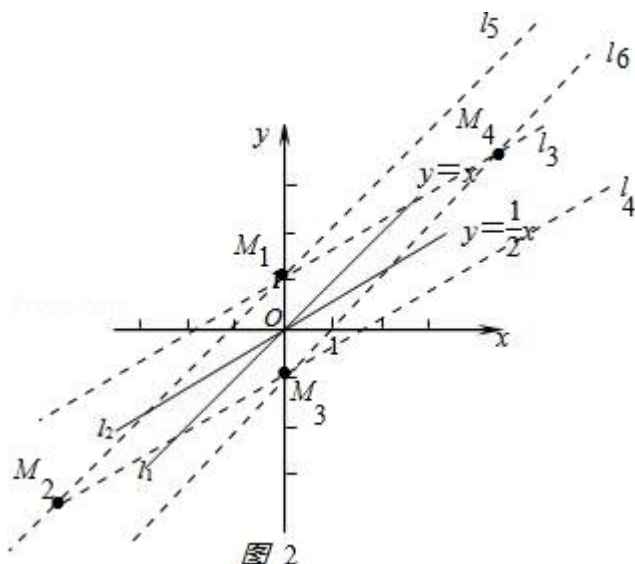
$$MN = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x = \sqrt{2}m,$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2}m,$$

$$\therefore M(2\sqrt{2}m, \sqrt{2}m),$$

当点  $M$  在第三象限时，同理可求得  $M(-2\sqrt{2}m, -\sqrt{2}m)$ ；

(3) 如图 2:



先作与  $l_1$  平行、距离为 1 的两条平行线，再作与  $l_2$  平行、距离为 1 的两条平行线，共有四个交点，即为点  $M$ ，故点  $M$  可以有四个位置。

9. 设关于  $x$  的一次函数  $y=a_1x+b_1$  与  $y=a_2x+b_2$ ，则称函数  $y=m(a_1x+b_1)+n(a_2x+b_2)$ （其中  $m+n=1$ ）为此两个函数的生成函数。

(1) 当  $x=1$  时，求函数  $y=x+1$  与  $y=2x$  的生成函数的值；

(2) 若函数  $y=a_1x+b_1$  与  $y=a_2x+b_2$  的图象的交点为  $P$ ，判断点  $P$  是否在此两个函数的生成函数的图象上，并说明理由。

**【解答】**解：(1) 当  $x=1$  时，

$$y = m(x+1) + n(2x)$$

$$= m(1+1) + n(2 \times 1)$$

$$= 2m + 2n$$

$$= 2(m+n),$$

$$\because m+n=1,$$

$$\therefore y=2;$$

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

(2) 点  $P$  在此两个函数的生成函数的图象上,

设点  $P$  的坐标为  $(a, b)$ ,

$$\because a_1 \times a + b_1 = b, \quad a_2 \times a + b_2 = b,$$

$$\therefore \text{当 } x=a \text{ 时, } y = m(a_1x + b_1) + n(a_2x + b_2),$$

$$= m(a_1 \times a + b_1) + n(a_2 \times a + b_2)$$

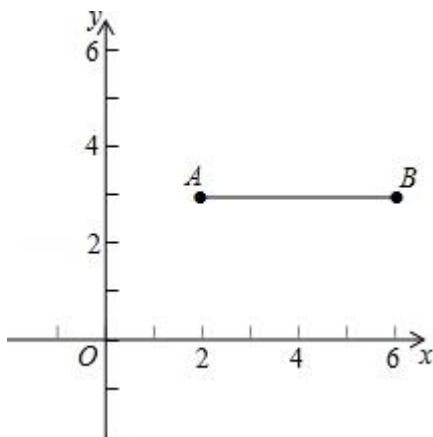
$$= mb + nb = b(m+n) = b,$$

即点  $P$  在此两个函数的生成图象上.

10. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点  $A(2, 3)$ 、 $B(6, 3)$ , 连结  $AB$ . 如果点  $P$  在直线  $y=x+1$  上, 且点  $P$  到直线  $AB$  的距离大于或等于 1, 那么称点  $P$  是线段  $AB$  的“疏远点”.

(1) 判断点  $C(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$  是否是线段  $AB$  的“疏远点”, 并说明理由;

(2) 若点  $Q(m, n)$  是线段  $AB$  的“疏远点”, 求  $m$  的取值范围.



**【解答】**解: (1) 点  $C(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$  不是线段  $AB$  的“疏远点”. 理由如下:

$$\because \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2},$$

$\therefore$  点  $C(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$  在直线  $y=x+1$  上;

$\because$  点  $A$  的纵坐标与点  $B$  的纵坐标相同,

$\therefore AB \parallel x$  轴,

$\therefore$  点  $C(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$  到线段  $AB$  的距离是  $\frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2} < 1$ ,

$\therefore$  点  $C(\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$  不是线段  $AB$  的“疏远点”;

(2)  $\because$  点  $Q(m, n)$  是线段  $AB$  的“疏远点”,

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

∴点  $Q(m, n)$  在直线  $y=x+1$  上,

∴ $n=m+1$ .

①当  $n=m+1 \geq 3$ , 即  $m \geq 2$  时,

∵ $AB \parallel x$  轴, ∴点  $Q(m, n)$  到线段  $AB$  的距离是  $n-3$ ,

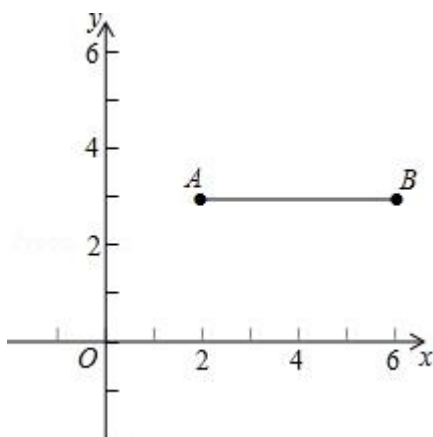
∴ $m+1-3 \geq 1$ , 解得  $m \geq 3$ ;

②当  $n=m+1 < 3$ , 即  $m < 2$  时,

∵ $AB \parallel x$  轴, ∴点  $Q(m, n)$  到线段  $AB$  的距离是  $3-n$ ,

∴ $3-m-1 \geq 1$ , 解得  $m \leq 1$ ,

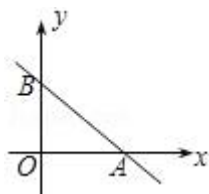
综上所述,  $m \geq 3$  或  $m \leq 1$ .



11. 在平面直角坐标系中, 一次函数的图象与坐标轴围成的三角形叫做此一次函数的坐标三角形. 例如, 图中的一次函数的图象与  $x$ ,  $y$  轴分别交于点  $A$ ,  $B$ , 则  $\triangle OAB$  为此函数的坐标三角形.

(1) 求函数  $y = -\frac{3}{4}x + 3$  的坐标三角形的三条边长;

(2) 若函数  $y = -\frac{3}{4}x + b$  ( $b$  为常数) 的坐标三角形周长为 16, 求函数关系式.



**【解答】**解: (1) ∵直线  $y = -\frac{3}{4}x + 3$  与  $x$  轴的交点坐标为  $(4, 0)$ , 与  $y$  轴交点坐标为  $(0, 3)$ ,

∴函数  $y = -\frac{3}{4}x + 3$  的坐标三角形的三条边长分别为 3, 4, 5.

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

(2) 直线  $y = -\frac{3}{4}x + b$  与  $x$  轴的交点坐标为  $(\frac{4}{3}b, 0)$ , 与  $y$  轴交点坐标为  $(0, b)$ ,

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{b^2 + (\frac{4}{3}b)^2} = \frac{5}{3}|b|,$$

当  $b > 0$  时,  $b + \frac{4}{3}b + \frac{5}{3}b = 16$ , 得  $b = 4$ ;

当  $b < 0$  时,  $-b - \frac{4}{3}b - \frac{5}{3}b = 16$ , 得  $b = -4$ ,

所以函数关系式为  $y = -\frac{3}{4}x + 4$  或  $y = -\frac{3}{4}x - 4$ .

12. 对于平面直角坐标系  $xOy$  中的点  $P$  和线段  $AB$ , 其中  $A(t, 0)$ 、 $B(t+2, 0)$  两点, 给出如下定义: 若在线段  $AB$  上存在一点  $Q$ , 使得  $P, Q$  两点间的距离小于或等于 1, 则称  $P$  为线段  $AB$  的伴随点.

(1) 当  $t = -3$  时,

①在点  $P_1(1, 1)$ ,  $P_2(0, 0)$ ,  $P_3(-2, -1)$  中, 线段  $AB$  的伴随点是  $P_2, P_3$ ;

②在直线  $y = 2x + b$  上存在线段  $AB$  的伴随点  $M, N$ , 且  $MN = \sqrt{5}$ , 求  $b$  的取值范围;

(2) 线段  $AB$  的中点关于点  $(2, 0)$  的对称点是  $C$ , 将射线  $CO$  以点  $C$  为中心, 顺时针旋转  $30^\circ$  得到射线  $l$ , 若射线  $l$  上存在线段  $AB$  的伴随点, 直接写出  $t$  的取值范围.

【解答】解: (1) 当  $t = -3$  时, 点  $A(-3, 0)$ , 点  $B(-1, 0)$ .

①  $\because P_1$  到线段  $AB$  最短的距离为  $\sqrt{[1 - (-1)]^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ ,

$P_2$  到线段  $AB$  最短的距离为  $0 - (-1) = 1$ ;

$P_3$  到线段  $AB$  最短的距离为  $0 - (-1) = 1$ .

$\therefore$  线段  $AB$  的伴随点是  $P_2, P_3$ .

故答案为:  $P_2, P_3$ .

②  $\because$  点  $M, N$  在直线  $y = 2x + b$  上, 且  $MN = \sqrt{5}$ ,

$\therefore M, N$  的纵坐标之差为 2, 横坐标之差为 1.

$\because$  点  $M, N$  为线段  $AB$  的伴随点,

$\therefore$  点  $M, N$  的纵坐标分别为 1 和 -1.

$\because$  点  $A(-3, 0)$ , 点  $B(-1, 0)$ ,

$\therefore$  当直线  $y = 2x + b$  经过点  $(-3, -1)$  时,  $b$  取得最大值, 此时  $b = 5$ ; 当直线  $y = 2x + b$  经过点  $(-1, 1)$  时,  $b$  取得最小值, 此时  $b = 3$  (如图 1 所示).

$\therefore b$  的取值范围是:  $3 \leq b \leq 5$ .

(2)  $\because A(t, 0)$ 、 $B(t+2, 0)$ ,

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

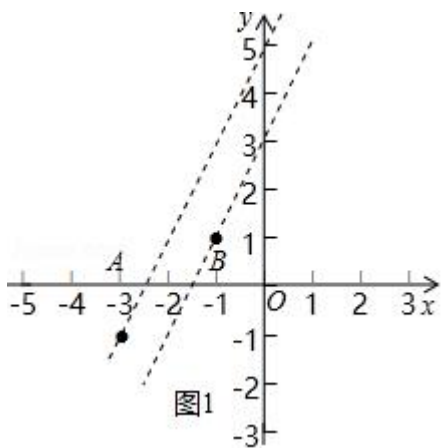
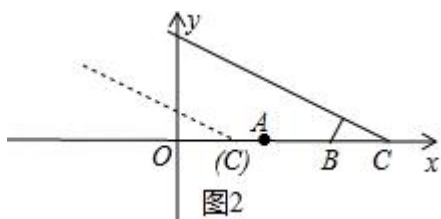
∴ 线段  $AB$  的中点为  $(t+1, 0)$ ,

∴ 点  $C$  的坐标为  $(3-t, 0)$ .

∵ 射线  $l$  上存在线段  $AB$  的伴随点,

$$\therefore \begin{cases} t-1 \leq 3-t \\ 3-t \leq t+2+2 \end{cases},$$

解得:  $-\frac{1}{2} \leq t \leq 2$ .



## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

### 专项训练 2:反比例函数问题

#### 一. 解答题（共 2 小题）

1. 在平面直角坐标系中，将一点（横坐标与纵坐标不相等）的横坐标与纵坐标互换后得到的点叫这一点的“互换点”，如  $(-3, 5)$  与  $(5, -3)$  是一对“互换点”.

(1) 任意一对“互换点”能否都在一个反比例函数的图象上？为什么？

(2)  $M$ 、 $N$  是一对“互换点”，若点  $M$  的坐标为  $(m, n)$ ，求直线  $MN$  的表达式（用含  $m$ 、 $n$  的代数式表示）；

(3) 在抛物线  $y=x^2+bx+c$  的图象上有一对“互换点”  $A$ 、 $B$ ，其中点  $A$  在反比例函数  $y=-\frac{2}{x}$  的图象上，直线  $AB$  经过点  $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，求此抛物线的表达式.

【解答】解：(1) 不一定，

设这一对“互换点”的坐标为  $(a, b)$  和  $(b, a)$ .

①当  $ab=0$  时，它们不可能在反比例函数的图象上，

②当  $ab \neq 0$  时，由  $b=\frac{k}{a}$  可得  $a=\frac{k}{b}$ ，即  $(a, b)$  和  $(b, a)$  都在反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象上；

(2) 由  $M(m, n)$  得  $N(n, m)$ ，设直线  $MN$  的表达式为  $y=cx+d$  ( $c \neq 0$ ).

$$\text{则有 } \begin{cases} mc+d=n \\ nc+d=m \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} c=-1 \\ d=m+n \end{cases},$$

$\therefore$  直线  $MN$  的表达式为  $y=-x+m+n$ ;

(3) 设点  $A(p, q)$ ，则  $q=-\frac{2}{p}$ ,

$\because$  直线  $AB$  经过点  $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，由 (2) 得  $\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+p+q$ ,

$$\therefore p+q=1,$$

$$\therefore p-\frac{2}{p}=1,$$

解并检验得： $p=2$  或  $p=-1$ ,

$$\therefore q=-1 \text{ 或 } q=2,$$

$\therefore$  这一对“互换点”是  $(2, -1)$  和  $(-1, 2)$ ,



## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

将这一对“互换点”代入  $y=x^2+bx+c$  得，

$$\therefore \begin{cases} 1-b+c=2 \\ 4+2b+c=-1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b=-2 \\ c=-1 \end{cases},$$

$\therefore$  此抛物线的表达式为  $y=x^2-2x-1$ .

2. 定义：点  $P$  为  $\triangle ABC$  内部或边上的点，若满足  $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PAC$  至少有一个三角形与  $\triangle ABC$  相似（点  $P$  不与  $\triangle ABC$  顶点重合），则称点  $P$  为  $\triangle ABC$  的自相似点.

例如：如图 1，点  $P$  在  $\triangle ABC$  的内部， $\angle PBC=\angle A$ ， $\angle PCB=\angle ABC$ ，则  $\triangle BCP \sim \triangle ABC$ ，故点  $P$  为  $\triangle ABC$  的自相似点.

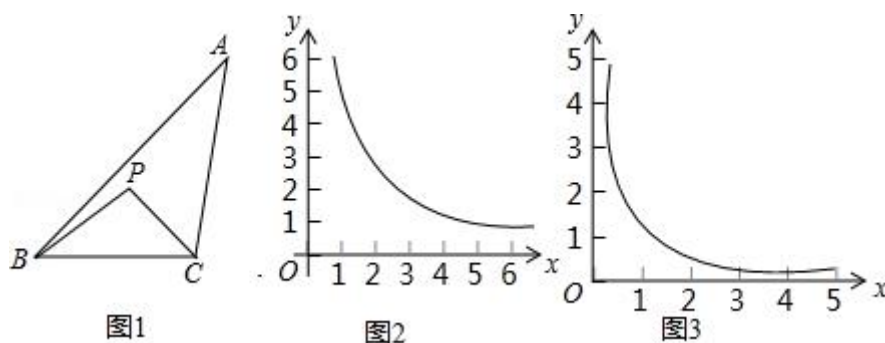
在平面直角坐标系  $xOy$  中，

(1) 点  $A$  坐标为  $(2, 2\sqrt{3})$ ， $AB \perp x$  轴于  $B$  点，在  $E(2, 1)$ ， $F(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ， $G(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  这三个点中，其中是  $\triangle AOB$  自相似点的是  $F, G$ （填字母）；

(2) 若点  $M$  是曲线  $C: y=\frac{k}{x}$  ( $k>0, x>0$ ) 上的一个动点， $N$  为  $x$  轴正半轴上一个动点；

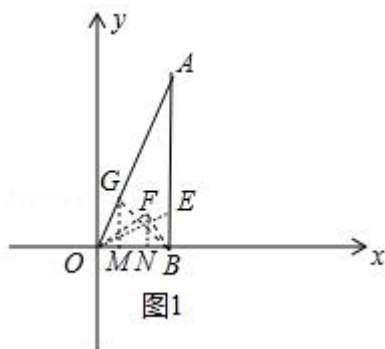
①如图 2， $k=3\sqrt{3}$ ， $M$  点横坐标为 3，且  $NM=NO$ ，若点  $P$  是  $\triangle MON$  的自相似点，求点  $P$  的坐标；

②若  $k=1$ ，点  $N$  为  $(2, 0)$ ，且  $\triangle MON$  的自相似点有 2 个，则曲线  $C$  上满足这样条件的点  $M$  共有 4 个，请在图 3 中画出这些点（保留必要的画图痕迹）.



**【解答】**解：(1) 如图 1 中，连接  $OF$ 、 $OE$ 、 $GB$ 、 $FB$ ，作  $GM \perp OB$  于  $M$ ， $FN \perp OB$  于  $N$ .

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版



由题意可知点  $G$  在  $OA$  上，

$$\because \tan \angle AOB = \frac{AB}{OB} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ,$$

$$\because \tan \angle GBM = \frac{GM}{BM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle OBG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOG = \angle AOB, \quad \angle OBG = \angle A,$$

$$\therefore \triangle OBG \sim \triangle OAB,$$

$\therefore$  点  $F$  是自相似点，

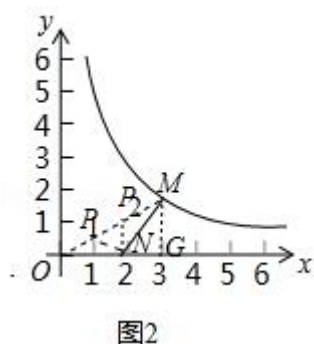
同理可得  $\angle FON = \angle A = 30^\circ$ ， $\angle FBO = \angle AOB = 60^\circ$ ，

$$\therefore \triangle FOB \sim \triangle BAO,$$

$\therefore$  点  $F$  是自相似点，

故答案为  $F, G$ 。

(2) ①如图 2，过点  $M$  作  $MG \perp x$  轴于  $G$  点。



$\because M$  点的横坐标为 3，

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

$$\therefore y = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3},$$

$$\therefore M(3, \sqrt{3}),$$

$$\therefore OM = 2\sqrt{3}, \angle MON = \angle NMO = 30^\circ, \angle ONM = 120^\circ,$$

$$\text{直线 } OM \text{ 的表达式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle MNG \text{ 中, } \angle MGN = 90^\circ, MN^2 = MG^2 + NG^2,$$

$$\text{设 } NM = NO = m, \text{ 则 } NG = 3 - m,$$

$$\therefore m^2 = (3 - m)^2 + (\sqrt{3})^2,$$

$$\therefore ON = MN = m = 2,$$

$$\because \triangle P_1ON \sim \triangle NOM, \triangle MP_2N \sim \triangle MNO,$$

$$\therefore \angle OP_1N = \angle MNO = 120^\circ, \angle MP_2N = \angle MNO = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle NP_1P_2 = \angle NP_2P_1 = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle NP_1P_2 \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore OP_1 = P_1P_2 = P_2M,$$

$$\therefore P_1 \text{ 的横坐标为 } 1, P_2 \text{ 的横坐标为 } 2, \text{ 代入 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

$$\text{可得 } P_1(1, \frac{\sqrt{3}}{3}), P_2(2, \frac{2\sqrt{3}}{3})$$

$$\text{综上所述, } P \text{ 点坐标为 } (1, \frac{\sqrt{3}}{3}) \text{ 或 } (2, \frac{2\sqrt{3}}{3}).$$

②如图 3 中, 满足条件的点  $M$  有 4 个.

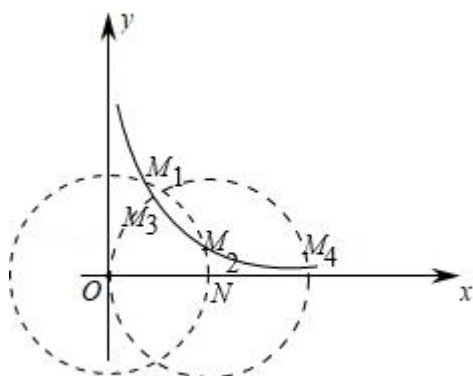


图3

以  $O$  为圆心 2 为半径作圆交反比例函数于  $M_1, M_2$ , 以  $N$  为圆心 2 为半径作圆交反比例函数的图象于  $M_3, M_4$ ,

故答案为 4.

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

### 专项训练 3:一次函数与反比例函数综合问题

#### 一. 填空题 (共 1 小题)

1. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 对于不在坐标轴上的任意一点  $P(x, y)$ , 我们把点  $P'(\frac{1}{x}, \frac{1}{y})$  称为点  $P$  的“倒影点”, 直线  $y = -x + 1$  上有两点  $A, B$ , 它们的倒影点  $A', B'$  均在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象上. 若  $AB = 2\sqrt{2}$ , 则  $k = -\frac{4}{3}$ .

【解答】解: (方法一) 设点  $A(a, -a+1)$ ,  $B(b, -b+1)$  ( $a < b$ ), 则  $A'(\frac{1}{a}, \frac{1}{1-a})$ ,

$$B'(\frac{1}{b}, \frac{1}{1-b}),$$

$$\because AB = \sqrt{(b-a)^2 + [(-b+1) - (-a+1)]^2} = \sqrt{2(b-a)^2} = \sqrt{2}(b-a) = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore b-a=2, \text{ 即 } b=a+2.$$

$\because$  点  $A', B'$  均在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象上,

$$\therefore \begin{cases} b=a+2 \\ k = \frac{1}{a(1-a)} = \frac{1}{b(1-b)} \end{cases},$$

$$\text{解得: } k = -\frac{4}{3}.$$

(方法二)  $\because$  直线  $y = -x + 1$  上有两点  $A, B$ , 且  $AB = 2\sqrt{2}$ ,

$\therefore$  设点  $A$  的坐标为  $(a, -a+1)$ , 则点  $B$  的坐标为  $(a+2, -a-1)$ , 点  $A'$  的坐标为  $(\frac{1}{a}, \frac{1}{1-a})$ , 点  $B'$  的坐标为  $(\frac{1}{a+2}, -\frac{1}{a+1})$ .

$\because$  点  $A', B'$  均在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象上,

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{1-a} = ak \\ -\frac{1}{a+1} = k(a+2) \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ k = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

故答案为:  $-\frac{4}{3}$ .

#### 二. 解答题 (共 2 小题)

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

2. 在平面直角坐标系中，我们不妨把纵坐标是横坐标的 2 倍的点称之为“理想点”，例如点  $(-2, -4)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(3, 6)$  …都是“理想点”，显然这样的“理想点”有无数多个.

(1) 若点  $M(2, a)$  是反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  为常数,  $k \neq 0$ ) 图象上的“理想点”，求这个反比例函数的表达式；

(2) 函数  $y = 3mx - 1$  ( $m$  为常数,  $m \neq 0$ ) 的图象上存在“理想点”吗？若存在，请求出“理想点”的坐标；若不存在，请说明理由.

【解答】解：∵点  $M(2, a)$  是反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  为常数,  $k \neq 0$ ) 图象上的“理想点”，

$$\therefore a = 4,$$

∵点  $M(2, 4)$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k$  为常数,  $k \neq 0$ ) 图象上，

$$\therefore k = 2 \times 4 = 8,$$

∴反比例函数的解析式为  $y = \frac{8}{x}$ .

(2) 假设函数  $y = 3mx - 1$  ( $m$  为常数,  $m \neq 0$ ) 的图象上存在“理想点” $(x, 2x)$ ,

则有  $3mx - 1 = 2x$ ,

整理得： $(3m - 2)x = 1$ ,

当  $3m - 2 \neq 0$ , 即  $m \neq \frac{2}{3}$  时, 解得： $x = \frac{1}{3m-2}$ ,

当  $3m - 2 = 0$ , 即  $m = \frac{2}{3}$  时,  $x$  无解,

综上所述, 当  $m \neq \frac{2}{3}$  时, 函数图象上存在“理想点”, 为  $(\frac{1}{3m-2}, \frac{2}{3m-2})$ ;

当  $m = \frac{2}{3}$  时, 函数图象上不存在“理想点”.

3. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 对于任意三点  $A, B, C$ , 给出如下定义:

如果矩形的任何一条边均与某条坐标轴平行, 且  $A, B, C$  三点都在矩形的内部或边界上,

则称该矩形为点  $A, B, C$  的覆盖矩形. 点  $A, B, C$  的所有覆盖矩形中, 面积最小的矩形称为点  $A, B, C$  的最优覆盖矩形. 例如, 下图中的矩形  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$ ,  $AB_3C_3D_3$

都是点  $A, B, C$  的覆盖矩形, 其中矩形  $AB_3C_3D_3$  是点  $A, B, C$  的最优覆盖矩形.

(1) 已知  $A(-2, 3)$ ,  $B(5, 0)$ ,  $C(t, -2)$ .

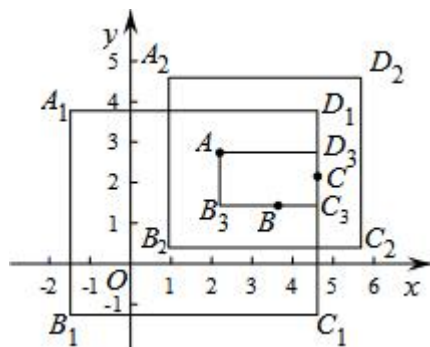
①当  $t = 2$  时, 点  $A, B, C$  的最优覆盖矩形的面积为 35;

②若点  $A, B, C$  的最优覆盖矩形的面积为 40, 求直线  $AC$  的表达式;

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

(2) 已知点  $D(1, 1)$ ,  $E(m, n)$  是函数  $y = \frac{4}{x} (x > 0)$  的图象上一点,  $\odot P$  是点  $O$ ,

$D, E$  的一个面积最小的最优覆盖矩形的外接圆, 求出  $\odot P$  的半径  $r$  的取值范围.



**【解答】**解: (1) ①  $\because A(-2, 3), B(5, 0), C(2, -2)$ , 矩形的任何一条边均与某条坐标轴平行, 且  $A, B, C$  三点都在矩形的内部或边界上, 则称该矩形为点  $A, B, C$  的覆盖矩形. 点  $A, B, C$  的所有覆盖矩形中, 面积最小的矩形称为点  $A, B, C$  的最优覆盖矩形,

$\therefore$  最优覆盖矩形的长为:  $2+5=7$ , 宽为  $3+2=5$ ,

$\therefore$  最优覆盖矩形的面积为:  $7 \times 5 = 35$ ;

②  $\because$  点  $A, B, C$  的最优覆盖矩形的面积为 40,

$\therefore$  由定义可知,  $t = -3$  或 6, 即点  $C$  坐标为  $(-3, -2)$  或  $(6, -2)$ ,

设  $AC$  表达式为  $y = kx + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} 3 = -2k + b \\ -2 = -3k + b \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 3 = -2k + b \\ -2 = 6k + b \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k = 5 \\ b = 13 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} k = -\frac{5}{8} \\ b = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$\therefore y = 5x + 13 \text{ 或 } y = -\frac{5}{8}x + \frac{7}{4};$$

(2) ①  $OD$  所在的直线交双曲线于点  $E$ , 矩形  $OFEG$  是点  $O, D, E$  的一个面积最小的最优覆盖矩形, 如图 1 所示:

$\because$  点  $D(1, 1)$ ,

$\therefore OD$  所在的直线表达式为  $y = x$ ,

$\therefore$  点  $E$  的坐标为  $(2, 2)$ ,

$$\therefore OE = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

## 2020 中考数学新定义（一次函数与反比例函数）解析版

$\therefore \odot P$  的半径最小  $r = \sqrt{2}$ ,

②当  $DE \parallel x$  轴时, 即: 点  $E$  的纵坐标为 1, 如图 2 所示:

$\because$  点  $D(1, 1)$ ,  $E(m, n)$  是函数  $y = \frac{4}{x} (x > 0)$  的图象上一点

$\therefore 1 = \frac{x}{4}$ , 解得  $x = 4$ ,

$\therefore OE = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ ,

$\therefore \odot P$  的半径最大  $r = \frac{\sqrt{17}}{2}$ ,

$\therefore \sqrt{2} \leq r \leq \frac{\sqrt{17}}{2}$ .

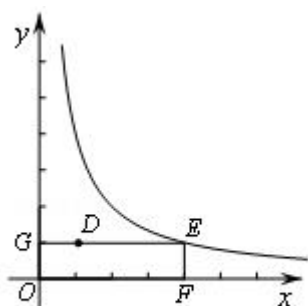


图 2

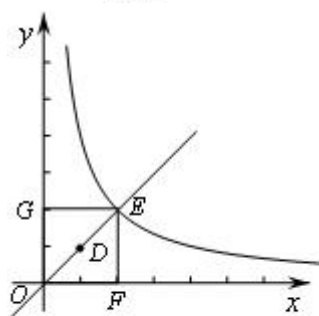


图 1