

济南市章丘区 2020 年初中学业水平考试
数学模拟试题七答案

一. 选择题

1.D 2.A 3.D 4.A 5.D 6.A 7.B 8.D 9.D 10.D 11、A 12、A

9. D 【解析】

连接 AA_1 .

由折叠的性质可得: $AA_1 \perp DE$, $DA = DA_1$,

又 $\because D$ 是 AB 中点,

$\therefore DA = DB$, $\therefore DB = DA_1$, $\therefore \angle BA_1D = \angle B$, $\therefore \angle ADA_1 = 2\angle B$,

又 $\because \angle ADA_1 = 2\angle ADE$, $\therefore \angle ADE = \angle B$,

$\therefore DE \parallel BC$, $\therefore AA_1 \perp BC$, $\therefore AA_1 = 2$, $\therefore h_1 = 2 - 1 = 1$,

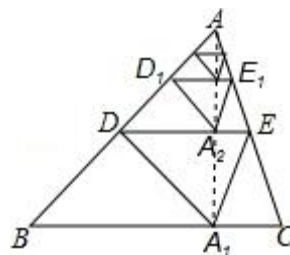
同理, $h_2 = 2 - \frac{1}{2}$, $h_3 = 2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2^2}$

...

\therefore 经过第 n 次操作后得到的折痕 $D_{n-1}E_{n-1}$ 到 BC 的距离 $h_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

$\therefore h_{2016} = 2 - \frac{1}{2^{2015}}$.

故选: D.



10.D

【解析】∵菱形 ABCD 中，AC=8，BD=6，

$$\therefore AC \perp BD \text{ 且 } OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$OB = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\text{由勾股定理得, } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{25}{8} \pi - 6.$$

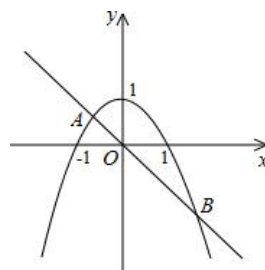
故选 D.

11. A

【解析】在同一坐标系 xOy 中，画出函数二次函数 $y = -x^2 + 1$ 与正比例函数 $y = -x$ 的图象，如图所示．设它们交于点 A、B．

$$\text{令 } -x^2 + 1 = -x, \text{ 即 } x^2 - x - 1 = 0, \text{ 解得: } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore A \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right), B \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right).$$



观察图象可知：

$$\textcircled{1} \text{ 当 } x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ 时, } \min\{-x^2 + 1, -x\} = -x^2 + 1, \text{ 函数值随 } x \text{ 的增大而增大, 其最大值为 } \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

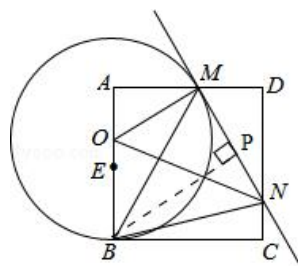
②当 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时, $\min\{-x^2+1, -x\}=-x$, 函数值随 x 的增大而减小, 其最大值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

③当 $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时, $\min\{-x^2+1, -x\}=-x^2+1$, 函数值随 x 的增大而减小, 最大值为 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

综上所述, $\min\{-x^2+1, -x\}$ 的最大值是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

故选 A.

12. A



分析：(1) 如图作 $MP \parallel AO$ 交 ON 于点 P ，当 $AM=MD$ 时，求得 $S_1=S_2+S_3$ ，

(2) 利用 MN 是 $\odot O$ 的切线, 四边形 ABCD 为正方形, 求得 $\triangle AMO \sim \triangle DMN$.

(3) 作 $BP \perp MN$ 于点 P , 利用 $RT\triangle MAB \cong RT\triangle MPB$ 和 $RT\triangle BPN \cong RT\triangle BCN$ 来证明 C, D 成立.

解：(1) 如图，作 $MP \parallel AO$ 交 ON 于点 P ，

∵点 O 是线段 AE 上的一个动点, 当 AM=MD 时, $S_{\text{梯形 ONDA}} = \frac{1}{2} (OA+DN) \cdot AD$

$$S_{\triangle MNO} = \frac{1}{2} MP \cdot AD, \because \frac{1}{2} (OA + DN) = MP, \therefore S_{\triangle MNO} = \frac{1}{2} S_{\text{梯形 } ONDA}, \therefore S_1 = S_2 + S_3,$$

\therefore 不一定有 $S_1 > S_2 + S_3$,

(2) \because MN 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore OM \perp MN$,

又 \because 四边形 ABCD 为正方形, $\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$, $\angle AMO + \angle DMN = 90^\circ$, $\angle AMO + \angle AOM = 90^\circ$, $\therefore \angle AOM = \angle DMN$,

在 $\triangle AMO$ 和 $\triangle DMN$ 中, $\begin{cases} \angle A = \angle D \\ \angle AOM = \angle DMN \end{cases}$, $\therefore \triangle AMO \sim \triangle DMN$. 故 B 成立,

(3) 如图, 作 $BP \perp MN$ 于点 P,

$\because MN, BC$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle PMB = \frac{1}{2} \angle MOB$, $\angle CBM = \frac{1}{2} \angle MOB$,

$\because AD \parallel BC$, $\therefore \angle CBM = \angle AMB$, $\therefore \angle AMB = \angle PMB$,

在 $Rt\triangle MAB$ 和 $Rt\triangle MPB$ 中, $\begin{cases} \angle BPM = \angle BAM \\ \angle PMB = \angle AMB \\ BM = BM \end{cases} \therefore Rt\triangle MAB \cong Rt\triangle MPB \text{ (AAS)}$

$\therefore AM = MP$, $\angle ABM = \angle MBP$, $BP = AB = BC$,

在 $Rt\triangle BPN$ 和 $Rt\triangle BCN$ 中, $\begin{cases} BP = BC \\ BN = BN \end{cases} \therefore Rt\triangle BPN \cong Rt\triangle BCN \text{ (HL)}$

$\therefore PN = CN$, $\angle PBN = \angle CBN$, $\therefore \angle MBN = \angle MBP + \angle PBN$,

$MN = MN + PN = AM + CN$. 故 C, D 成立, 综上所述, A 不一定成立, 故选: A.

点评: 本题主要考查了圆的切线及全等三角形的判定和性质, 关键是作出辅助线利用三角形全等证明.

二. 填空题

13. $x_1=0$ $x_2=3$ 14. $a(a+2)(a-2)$ 15. 2

16. $OF = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ 17. $\frac{7}{2}$ 18. ①②③

15. 2

【解析】

$a = 5 \times 5 - 3 - 4 - 6 - 7 = 5$,

$s^2 = \frac{1}{5} [(3-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2] = 2$.

16. $OF = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

【解析】

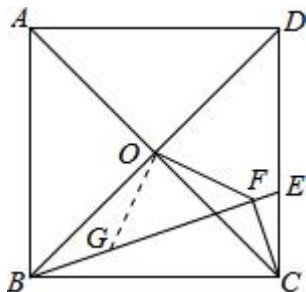
(1) 因为四边形 ABCD 是正方形, 所以 $\angle BCE = 90^\circ$,

又正方形 ABCD 的边长为 6, $DE = 2CE$, 所以 $CE = 2$, $DE = 4$, $BC = 6$,

由勾股定理可得 $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$,

$$\text{又 } \frac{1}{2}BC \cdot CE = \frac{1}{2}BE \cdot CF, \text{ 所以 } CF = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

(2)如图, 在 BE 上截取 $BG=CF$, 连接 OG,



\because RT $\triangle BCE$ 中, $CF \perp BE$, $\therefore \angle EBC = \angle ECF$,

$\because \angle OBC = \angle OCD = 45^\circ$, $\therefore \angle OBG = \angle OCF$,

在 $\triangle OBG$ 与 $\triangle OCF$ 中

$OB = OC$, $\angle OBG = \angle OCF$, $BG = CF$

$\therefore \triangle OBG \cong \triangle OCF$ (SAS) $\therefore OG = OF$, $\angle BOG = \angle COF$, $\therefore OG \perp OF$,

$\because BE = 2\sqrt{10}$, 且 $BC^2 = BF \cdot BE$,

则 $6^2 = BF \cdot 2\sqrt{10}$, 解得: $BF = \frac{9\sqrt{10}}{5}$,

$$\therefore GF = BF - BG = \frac{9\sqrt{10}}{5} - \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{6\sqrt{10}}{5}, \therefore OF = \frac{6\sqrt{10}}{5} \div \sqrt{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

17.

解：根据题意，直线 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 与 x 轴交于 C ，与 y 轴交于 D ，

分别令 $x=0$, $y=0$, 得 $y=2$, $x=4$, 即 $D(0, 2)$, $C(4, 0)$, 即 $DC=2\sqrt{5}$,

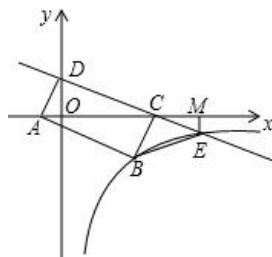
又 $AD \perp DC$ 且过点 D ，所以直线 AD 所在函数解析式为： $y=2x+2$ ，

令 $y=0$, 得 $x=-1$, 即 A $(-1, 0)$, 同理可得 B 点的坐标为 B $(3, -2)$

又 B 为双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 上, 代入得 $k = -6$. 即双曲线的解析式为 $y = \frac{-6}{x}$

与直线 DC 联立,

$$\begin{cases} y = \frac{-6}{x} \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases},$$



得 $\begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 根据题意, $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ 不合题意, 故点 E 的坐标为 (6, -1).

所以 $BC=\sqrt{5}$, $CE=\sqrt{5}$, $CM=2$, $EM=1$, 所以 $S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2} \times BC \times EC=\frac{5}{2}$, $S_{\triangle EMC}=\frac{1}{2} \times EM \times CM=1$,

故 $S_{\text{四}BEMC} = S_{\triangle BEC} + S_{\triangle EMC} = \frac{7}{2}$. 故答案为: $\frac{7}{2}$.

18、①②③

【解析】①∵四边形 ABCD 为正方形，EF//AD，

∴EF=AD=CD，∠ACD=45°，∠GFC=90°，

∴△CFG 为等腰直角三角形，

∴GF=FC，

∴EG=EF-GF，DF=CD-FC，

∴EG=DF，故①正确；

②∵△CFG 为等腰直角三角形，H 为 CG 的中点，

∴FH=CH， $\angle GFH = \frac{1}{2} \angle GFC = 45^\circ = \angle HCD$ ，

在△EHF 和△DHC 中，

$$\begin{array}{l} EF=CD \\ \{\angle EFH=\angle DCH \\ FH=CH \end{array},$$

∴△EHF≌△DHC（SAS），

∴∠HEF=∠HDC，

∴∠AEH+∠ADH=∠AEF+∠HEF+∠ADF-∠HDC=∠AEF+∠ADF=180°，故②正确；

③∵△CFG 为等腰直角三角形，H 为 CG 的中点，

∴FH=CH， $\angle GFH = \frac{1}{2} \angle GFC = 45^\circ = \angle HCD$ ，

在△EHF 和△DHC 中，

$$\begin{array}{l} EF=CD \\ \{\angle EFH=\angle DCH \\ FH=CH \end{array},$$

∴△EHF≌△DHC（SAS），故③正确；

④错误，当 $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$ ，则 $3S_{\triangle EDH} = 13S_{\triangle DHC}$ ，

理由如下：∵ $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$ ，

∴AE=2BE，

∵△CFG 为等腰直角三角形，H 为 CG 的中点，

∴FH=GH，∠FHG=90°，

∵∠EGH=∠FHG+∠HFG=90°+∠HFG=∠HFD，

在△EGH 和△DFH 中，

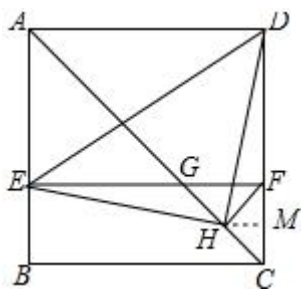
$$\begin{array}{l} ED=DF \\ \{\angle EGH=\angle HFD \\ GH=FH \end{array},$$

∴△EGH≌△DFH（SAS），

∴∠EHG=∠DHF，EH=DH，∠DHE=∠EHG+∠DHG=∠DHF+∠DHG=∠FHG=90°，

∴△EHD 为等腰直角三角形，

过 H 点作 HM 垂直于 CD 于 M 点，如图所示：



设 $HM=x$, 则 $DM=5x$, $DH=\sqrt{26}x$, $CD=6x$,

则 $S_{\triangle DHC} = \frac{1}{2} \times HM \times CD = 3x^2$, $S_{\triangle EDH} = \frac{1}{2} \times DH^2 = 13x^2$,

$\therefore 3S_{\triangle EDH} = 13S_{\triangle DHC}$, 故④错误.

三. 解答题

$$19. \text{解:} = 2\sqrt{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + 2 \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4$$

$$= 4 \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$20. \text{解:} = \left[\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} - \frac{3}{x+1} \right] \times \frac{x+1}{(x+2)^2} \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x+1} \times \frac{x+1}{(x+2)^2} \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

$$= \frac{x-2}{x+2} \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

$$\therefore \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{5} = 0 \therefore \text{解得: } x = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{\frac{1}{3} - 2}{\frac{1}{3} + 2} = -\frac{5}{7} \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

21.证明：(1)∵四边形ABCD是平行四边形，

∴ AD = BC，

在RT△ABC中，∠BAC = 90°，在E是BC边的中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{2}BC = CE,$$

同理，AF = $\frac{1}{2}$ AD = CF，.....2分

$$\therefore AE = CE = AF = CF$$

∴ 四边形AECF是菱形；.....3分

(2) 解：连接EF交AC于点O，如图所示：

在RT△ABC中，∠BAC = 90°，∠B = 30°，BC = 10，

$$\therefore AC = \frac{1}{2}BC = 5, AB = \sqrt{3}AC = 5\sqrt{3}, \dots\dots\dots 4分$$

∵ 四边形AECF是菱形，

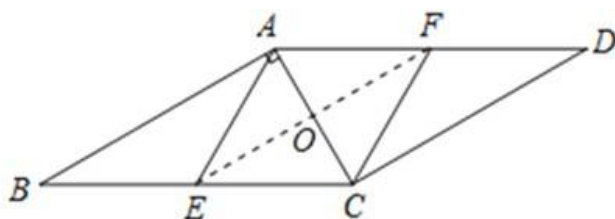
$$\therefore AC \perp EF, OA = OC,$$

∴ OE是△ABC的中位线，

$$\therefore OE = \frac{1}{2}AB = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore EF = 5\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{菱形AECF的面积} = \frac{1}{2}AC \cdot EF = \frac{25\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 6分$$



22.解：设长跑队跑步的速度为x 千米/小时，则

$$\frac{10}{x} - \frac{10}{2.5x} = 2 - 0.5, \dots\dots\dots 5分$$

解得：x = 4，.....7分

经检验：x = 4是所列方程的根

答：长跑队跑步的速度为4 千米/小时。.....8分

23.解答： (1) 证明：连结 OD，如图，

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle C = \angle A = \angle B = 60^\circ$ ，

而 $OD = OB$ ，

$\therefore \triangle ODB$ 是等边三角形， $\angle ODB = 60^\circ$ 2 分

$\therefore \angle ODB = \angle C$ ，

$\therefore OD \parallel AC$ ， 3 分

$\because DF \perp AC$ ，

$\therefore OD \perp DF$ ，

$\therefore DF$ 是 $\odot O$ 的切线； 4 分

(2) 解： $\because OD \parallel AC$ ，点 O 为 AB 的中点，

$\therefore OD$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore BD = CD = 6$ 6 分

在 $Rt\triangle CDF$ 中， $\angle C = 60^\circ$ ，

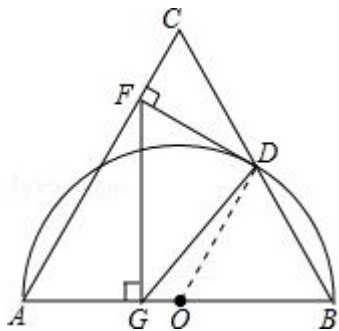
$\therefore \angle CDF = 30^\circ$ ，

$\therefore CF = \frac{1}{2}CD = 3$ ，

$\therefore AF = AC - CF = 12 - 3 = 9$ ， 7 分

在 $Rt\triangle AFG$ 中， $\because \angle A = 60^\circ$ ，

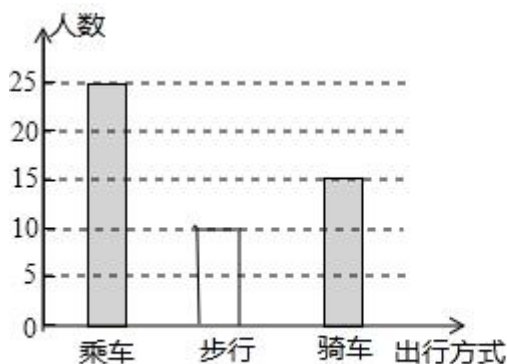
$\therefore FG = AF \times \sin A = 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ ； 8 分



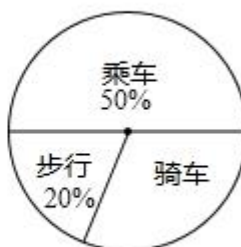
24、解答： 解：（1） $25 \times 2 = 50$ 人；

$50 - 25 - 15 = 10$ 人；

如图所示条形图，



图(1)



图(2)

.....2 分

圆心角度数 $= \frac{30}{100} \times 360^\circ = 108^\circ$;4 分

（2）估计该年级步行人数 $= 600 \times 20\% = 120$ 人；

.....6 分

（3）设 3 名“喜欢乘车”的学生表示为 A、B、C，1 名“喜欢步行”的学生表示为 D，1 名“喜欢骑车”的学生表示为 E，

则有 AB、AC、BC、AD、BD、CD、AE、BE、CE、DE 10 种等可能的情况，

2 人都是“喜欢乘车”的学生的概率 $P = \frac{3}{10}$10

分

25、解：（1）当 $k = -1$ 时， $l_1: y = -x + 2\sqrt{2}$,

联立得， $\begin{cases} y = -x + 2\sqrt{2} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ ，化简得 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$,

解得： $x_1 = \sqrt{2} - 1$ ， $x_2 = \sqrt{2} + 1$,1 分

设直线 l_1 与 y 轴交于点 C ，则 $C(0, 2\sqrt{2})$ 。

$$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (x_2 - x_1) = 2\sqrt{2};$$

.....3 分

(2) 根据题意得：
$$\begin{cases} y - \sqrt{2} = k(x - \sqrt{2}) \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$
 整理得： $kx^2 + \sqrt{2}(1-k)x - 1 = 0 (k < 0)$,

$$\therefore \Delta = [\sqrt{2}(1-k)]^2 - 4 \times k \times (-1) = 2(1+k^2) > 0,$$

$\therefore x_1, x_2$ 是方程的两根，

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{2}(k-1)}{k} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{k} \end{cases} \quad \text{①},$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2},$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 \left(1 + \frac{1}{x_1 \cdot x_2}\right)},$$

$$= \sqrt{[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2] \left(1 + \frac{1}{x_1 \cdot x_2}\right)},$$

.....4 分

将①代入得，
$$AB = \sqrt{\frac{2(k^2+1)^2}{k^2}} = \frac{\sqrt{2}(k^2+1)}{-k} (k < 0),$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}(k^2+1)}{-k} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

整理得： $2k^2+5k+2=0$,

解得： $k=2$ ，或 $k=-\frac{1}{2}$ ；6 分

(3) $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ，7 分

如图：设 $P(x, \frac{1}{x})$ ，则 $M(-\frac{1}{x}+\sqrt{2}, \frac{1}{x})$ ，

$$\text{则 } PM = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4},$$

$$\therefore PF = \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4},$$

$\therefore PM = PF$9 分

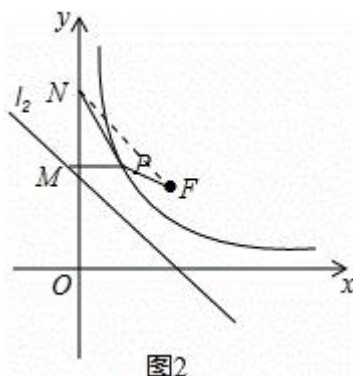
$\therefore PM + PN = PF + PN \geq NF = 2$,

当点 P 在 NF 上等号成立，此时 NF 的方程为 $y = -x + 2\sqrt{2}$,

由 (1) 知 $P(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ ，

\therefore 当 $P(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ 时， $PM+PN$ 最小值是 2.

.....10 分



26、(1)【解析】

$$\because \angle DBC = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore AC \parallel BD,$$

$$\therefore \angle DBE = \angle CAE$$

$$\text{右} \because \angle DEB = \angle AEC,$$

$$\therefore \triangle DBE \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \frac{BD}{AC} = \frac{DE}{CE},$$

$$\text{又} \because BD = BC = 2AC,$$

$$\therefore DE = 2CE;$$

故答案为 $DE = 2CE$ 4 分

$$(2) \text{证明: 如图 2, } \because \angle DBC = \angle ACB = 120^\circ, BD = BC,$$

$$\therefore \angle D = \angle BCD = 30^\circ, \therefore \angle ACD = 90^\circ,$$

过点 B 作 $BM \perp DC$ 于 M, 则 $DM = MC$, $BM = \frac{1}{2}BC$,

$$\because AC = \frac{1}{2}BC, \therefore BM = AC, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

\therefore 在 $\triangle BME$ 和 $\triangle ACE$ 中

$$\begin{cases} \angle BME = \angle ACE \\ \angle MEB = \angle AEC \\ BM = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BME \cong \triangle ACE \text{ (AAS),}$$

$$\therefore ME = CE = \frac{1}{2}CM,$$

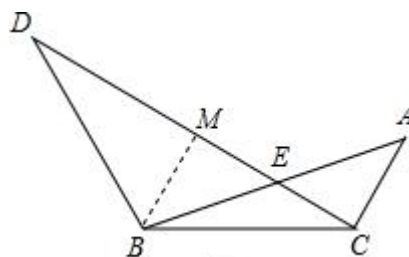


图2

∴DE=3EC;8 分

(3) 如图, 过点 B 作 $BM' \perp DC$ 于点 M' , 过点 F 作 $FN \perp DB$ 交 DB 的延长线于点 N,

设 $BF=a$,

$$\because \angle DBF=120^\circ,$$

$$\therefore \angle FBN=60^\circ,$$

$$\therefore FN=\frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad BN=\frac{1}{2}a,$$

$$\because DB=BC=2BF=2a, \quad \therefore DN=DB+BN=\frac{5}{2}a,$$

$$\therefore DF=\sqrt{DN^2+FN^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\sqrt{7}a, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because AC=\frac{1}{2}BC, \quad BF=\frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore BF=AC,$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle BCA \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BDF=\angle CBA,$$

$$\text{又} \because \angle BFG=\angle DFB,$$

$$\therefore \triangle FBG \sim \triangle FDB,$$

$$\therefore \frac{FG}{BF} = \frac{BF}{DF} = \frac{BG}{DB},$$

$$\therefore BF^2=FG \times FD,$$

$$\therefore a^2=\sqrt{7}a \times FG,$$

$$\therefore FG=\frac{\sqrt{7}}{7}a,$$

$$\therefore DG=DF-FG=\frac{6\sqrt{7}}{7}a, \quad BG=\frac{FG \times DB}{BF}=\frac{2\sqrt{7}}{7}a,$$

.....10 分

$\because \triangle DKG$ 和 $\triangle DBG$ 关于直线 DG 对称,

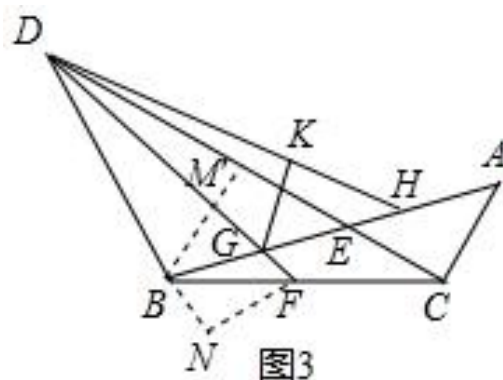
$$\therefore \angle GDH=\angle BDF,$$

$$\therefore \angle ABC=\angle GDH,$$

$$\text{又} \because \angle BGF=\angle DGH,$$

$$\therefore \triangle BGF \sim \triangle DGH,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{BG}{DG} &= \frac{GF}{GH}, \\ \therefore GH &= \frac{DG \times GF}{BG} = \frac{3\sqrt{7}}{7} a, \dots\dots\dots 11 \text{ 分} \\ \therefore BH &= BG + GH = \frac{5\sqrt{7}}{7} a = 10, \\ \therefore a &= 2\sqrt{7}; \\ \therefore BC &= 2a = 4\sqrt{7}, \\ CM' &= BC \cos 30^\circ = 2\sqrt{21}, \\ \therefore DC &= 2CM' = 4\sqrt{21}, \\ \therefore DE &= 3EC, \\ \therefore EC &= \frac{1}{4}DC = \sqrt{21}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$



27.解： (1) 由 $\text{RT}\triangle AOB \cong \text{RT}\triangle CDA$ ，得 $OD = 3$ ， $CD = 1$ ；.....1分

$\therefore C(-3, 1)$2分

\because 抛物线经过点C

$\therefore 1 = a(-3)^2 + a(-3) - 2$ ，.....3分

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

\therefore 抛物线表达式为： $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$4分

(2) 解法一：在抛物线（对称轴的右侧）上存在点P，Q，

使四边形ABPQ是正方形，

以AB为边在AB的右侧作正方形ABPQ，

过P作 $PE \perp OB$ 于E， $QG \perp x$ 轴于G，

可证 $\triangle PBE \cong \triangle AQG \cong \triangle BAO$ ，.....6分

$\therefore PE = AG = BO = 2$ ， $BE = QG = AO = 1$ ，

$\therefore P(2, 1)$ ， $Q(1, -1)$7分

\because 由(1) 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ ，当 $x = 2$ 时， $y = 1$ ；当 $x = 1$ 时， $y = -1$

$\therefore P, Q$ 在抛物线上

故在抛物线（对称轴的右侧）上存在点P(2,1)，Q(1,-1)，

使四边形ABPQ是正方形。.....8分

解法二：在抛物线（对称轴右侧）上存在点P，Q，使四边形ABPQ是正方形，

延长CA交抛物线于Q，过B作 $BP \parallel CA$ 交抛物线于P，连PQ，

设直线CA、BP的解析式分别为 $y = k_1x + b_1$ ， $y = k_2x + b_2$

$\therefore A(-1,0), C(-3,1)$

$\therefore CA$ 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,

同理得**BP**的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$,.....6分

$$\text{解方程组} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

得**Q** (1, -1) ,

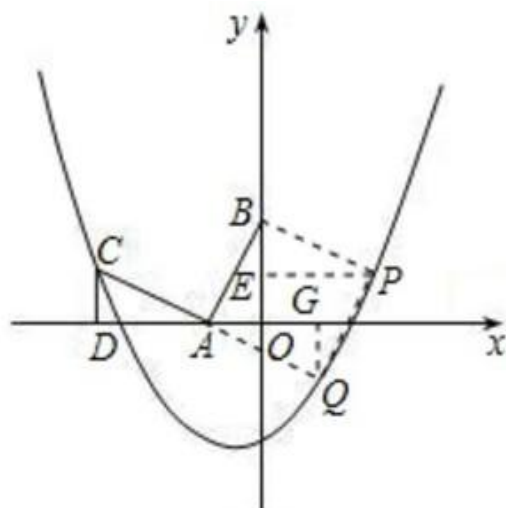
同理得**P** (2,1) ,.....7分

由勾股定理得**AQ** = **BP** = **AB** = $\sqrt{5}$,

而 $\angle BAQ = 90^\circ$, 四边形**ABPQ**是正方形,

故在抛物线 (对称轴右侧) 上存在点**P** (2,1) **Q** (1, -1) ,

使四边形**ABPQ**是正方形.....8分



(3) 结论: $\frac{BF}{AF} = \frac{BG}{AG}$ 成立,9分

证明: 连接 **EF**, 过点 **F** 作 **FM** // **BG** 交 **AB** 的延长线于 **M**, 则 $\triangle AMF \sim \triangle ABG$,

$$\therefore \frac{MF}{AF} = \frac{BG}{AG} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

由 (1) 知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 45^\circ,$$

$$\therefore AF = AE,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle 1 = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = 90^\circ,$$

$\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle EBF = 90^\circ, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\therefore FM \parallel BG,$$

$$\therefore \angle MFB = \angle EBF = 90^\circ, \angle M = \angle 2 = 45^\circ,$$

$$\therefore BF = MF,$$

$$\therefore \frac{BF}{AF} = \frac{BG}{AG} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

