

济南市章丘区 2020 年初中学业水平考试  
数学模拟试题七答案

一. 选择题

1.D 2.A 3.D 4.A 5.D 6.A 7.B 8.D 9.D 10.D 11、A 12、A

9. D 【解析】

连接  $AA_1$ .

由折叠的性质可得:  $AA_1 \perp DE$ ,  $DA = DA_1$ ,

又  $\because D$  是  $AB$  中点,

$\therefore DA = DB$ ,  $\therefore DB = DA_1$ ,  $\therefore \angle BA_1D = \angle B$ ,  $\therefore \angle ADA_1 = 2\angle B$ ,

又  $\because \angle ADA_1 = 2\angle ADE$ ,  $\therefore \angle ADE = \angle B$ ,

$\therefore DE \parallel BC$ ,  $\therefore AA_1 \perp BC$ ,  $\therefore AA_1 = 2$ ,  $\therefore h_1 = 2 - 1 = 1$ ,

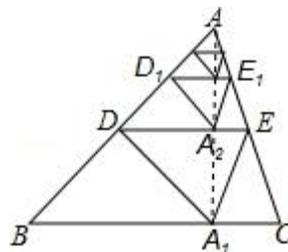
同理,  $h_2 = 2 - \frac{1}{2}$ ,  $h_3 = 2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2^2}$

...

$\therefore$  经过第  $n$  次操作后得到的折痕  $D_{n-1}E_{n-1}$  到  $BC$  的距离  $h_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ .

$\therefore h_{2016} = 2 - \frac{1}{2^{2015}}$ .

故选: D.



10.D

【解析】∵菱形 ABCD 中，AC=8，BD=6，

$$\therefore AC \perp BD \text{ 且 } OA = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4,$$

$$OB = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\text{由勾股定理得, } AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{25}{8} \pi - 6.$$

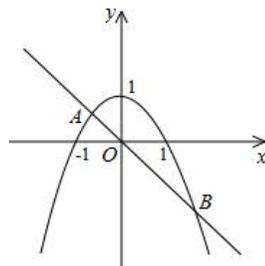
故选 D.

11. A

【解析】在同一坐标系 xOy 中，画出函数二次函数  $y = -x^2 + 1$  与正比例函数  $y = -x$  的图象，如图所示。设它们交于点 A、B。

$$\text{令 } -x^2 + 1 = -x, \text{ 即 } x^2 - x - 1 = 0, \text{ 解得: } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore A \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right), B \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right).$$



观察图象可知：

$$\textcircled{1} \text{ 当 } x \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ 时, } \min\{-x^2 + 1, -x\} = -x^2 + 1, \text{ 函数值随 } x \text{ 的增大而增大, 其最大值为 } \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

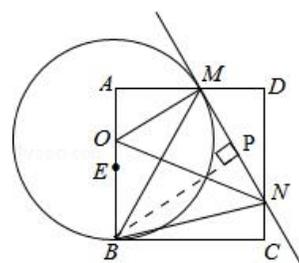
②当  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  时,  $\min\{-x^2+1, -x\}=-x$ , 函数值随  $x$  的增大而减小, 其最大值为  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ;

③当  $x \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  时,  $\min\{-x^2+1, -x\}=-x^2+1$ , 函数值随  $x$  的增大而减小, 最大值为  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$  .

综上所述,  $\min\{-x^2+1, -x\}$  的最大值是  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  .

故选 A.

12. A



分析: (1) 如图作  $MP \parallel AO$  交  $ON$  于点  $P$ , 当  $AM=MD$  时, 求得  $S_1=S_2+S_3$ ,  
 (2) 利用  $MN$  是  $\odot O$  的切线, 四边形  $ABCD$  为正方形, 求得  $\triangle AMO \sim \triangle DMN$ .  
 (3) 作  $BP \perp MN$  于点  $P$ , 利用  $RT\triangle MAB \cong RT\triangle MPB$  和  $RT\triangle BPN \cong RT\triangle BCN$  来证明  $C, D$  成立.

解: (1) 如图, 作  $MP \parallel AO$  交  $ON$  于点  $P$ ,

$\because$  点  $O$  是线段  $AE$  上的一个动点, 当  $AM=MD$  时,  $S_{\text{梯形 ONDA}} = \frac{1}{2} (OA+DN) \cdot AD$

$S_{\triangle MNO} = \frac{1}{2} MP \cdot AD$ ,  $\because \frac{1}{2} (OA+DN) = MP$ ,  $\therefore S_{\triangle MNO} = \frac{1}{2} S_{\text{梯形 ONDA}}$ ,  $\therefore S_1 = S_2 + S_3$ ,

$\therefore$  不一定有  $S_1 > S_2 + S_3$ ,

(2)  $\because MN$  是  $\odot O$  的切线,  $\therefore OM \perp MN$ ,  
 又  $\because$  四边形  $ABCD$  为正方形,  $\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ$ ,  $\angle AMO + \angle DMN = 90^\circ$ ,  $\angle AMO + \angle AOM = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle AOM = \angle DMN$ ,

在 $\triangle AMO$ 和 $\triangle DMN$ 中,  $\begin{cases} \angle A = \angle D \\ \angle AOM = \angle DMN \end{cases}$ ,  $\therefore \triangle AMO \sim \triangle DMN$ . 故 B 成立,

(3) 如图, 作  $BP \perp MN$  于点 P,

$\because MN, BC$  是  $\odot O$  的切线,  $\therefore \angle PMB = \frac{1}{2} \angle MOB, \angle CBM = \frac{1}{2} \angle MOB,$

$\because AD \parallel BC, \therefore \angle CBM = \angle AMB, \therefore \angle AMB = \angle PMB,$

在  $Rt\triangle MAB$  和  $Rt\triangle MPB$  中,  $\begin{cases} \angle BPM = \angle BAM \\ \angle PMB = \angle AMB \\ BM = BM \end{cases} \therefore Rt\triangle MAB \cong Rt\triangle MPB (AAS)$

$\therefore AM = MP, \angle ABM = \angle MBP, BP = AB = BC,$

在  $Rt\triangle BPN$  和  $Rt\triangle BCN$  中,  $\begin{cases} BP = BC \\ BN = BN \end{cases} \therefore Rt\triangle BPN \cong Rt\triangle BCN (HL)$

$\therefore PN = CN, \angle PBN = \angle CBN, \therefore \angle MBN = \angle MBP + \angle PBN,$

$MN = MN + PN = AM + CN$ . 故 C, D 成立, 综上所述, A 不一定成立, 故选: A.

点评: 本题主要考查了圆的切线及全等三角形的判定和性质, 关键是作出辅助线利用三角形全等证明.

## 二. 填空题

13.  $x_1=0 \quad x_2=3$       14.  $a(a+2)(a-2)$       15. 2

16.  $OF = \frac{6\sqrt{5}}{5}$       17.  $\frac{7}{2}$       18. ①②③

15. 2

**【解析】**

$a = 5 \times 5 - 3 - 4 - 6 - 7 = 5,$

$s^2 = \frac{1}{5} [(3-5)^2 + (5-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2] = 2.$

16.  $OF = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

**【解析】**

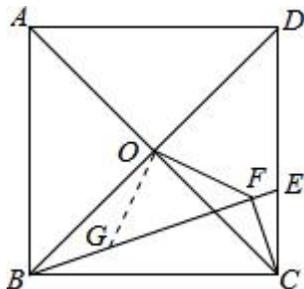
(1) 因为四边形 ABCD 是正方形, 所以  $\angle BCE = 90^\circ,$

又正方形 ABCD 的边长为 6,  $DE = 2CE,$  所以  $CE = 2, DE = 4, BC = 6,$

由勾股定理可得  $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ ,

$$\frac{1}{2}BC \cdot CE = \frac{1}{2}BE \cdot CF, \text{ 所以 } CF = \frac{3\sqrt{10}}{5},$$

(2)如图, 在 BE 上截取  $BG=CF$ , 连接 OG,



$\because$   $RT\triangle BCE$  中,  $CF \perp BE$ ,  $\therefore \angle EBC = \angle ECF$ ,

$\because \angle OBC = \angle OCD = 45^\circ$ ,  $\therefore \angle OBG = \angle OCF$ ,

在  $\triangle OBG$  与  $\triangle OCF$  中

$OB = OC$ ,  $\angle OBG = \angle OCF$ ,  $BG = CF$

$\therefore \triangle OBG \cong \triangle OCF$  (SAS)  $\therefore OG = OF$ ,  $\angle BOG = \angle COF$ ,  $\therefore OG \perp OF$ ,

$\because BE = 2\sqrt{10}$ , 且  $BC^2 = BF \cdot BE$ ,

$$\text{则 } 6^2 = BF \cdot 2\sqrt{10}, \text{ 解得: } BF = \frac{9\sqrt{10}}{5},$$

$$\therefore GF = BF - BG = \frac{9\sqrt{10}}{5} - \frac{3\sqrt{10}}{5} = \frac{6\sqrt{10}}{5}, \therefore OF = \frac{6\sqrt{10}}{5} \div \sqrt{2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

17.  $\frac{7}{2}$

解：根据题意，直线  $y = -\frac{1}{2}x + 2$  与  $x$  轴交于  $C$ ，与  $y$  轴交于  $D$ ，

分别令  $x=0$ ， $y=0$ ，得  $y=2$ ， $x=4$ ，即  $D(0, 2)$ ， $C(4, 0)$ ，即  $DC=2\sqrt{5}$ ，

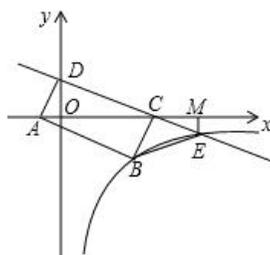
又  $AD \perp DC$  且过点  $D$ ，所以直线  $AD$  所在函数解析式为： $y=2x+2$ ，

令  $y=0$ ，得  $x=-1$ ，即  $A(-1, 0)$ ，同理可得  $B$  点的坐标为  $B(3, -2)$

又  $B$  为双曲线  $y = \frac{k}{x}$  ( $k < 0$ ) 上，代入得  $k = -6$ 。即双曲线的解析式为  $y = \frac{-6}{x}$

与直线  $DC$  联立，

$$\begin{cases} y = \frac{-6}{x} \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases},$$



得  $\begin{cases} x = 6 \\ y = -1 \end{cases}$  和  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$  根据题意， $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$  不合题意，故点  $E$  的坐标为  $(6, -1)$ 。

所以  $BC = \sqrt{5}$ ， $CE = \sqrt{5}$ ， $CM = 2$ ， $EM = 1$ ，所以  $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} \times BC \times EC = \frac{5}{2}$ ， $S_{\triangle EMC} = \frac{1}{2} \times EM \times CM = 1$ ，

故  $S_{\text{四} BEMC} = S_{\triangle BEC} + S_{\triangle EMC} = \frac{7}{2}$ 。故答案为： $\frac{7}{2}$ 。

18、①②③

【解析】①∵四边形 ABCD 为正方形，EF//AD，

∴EF=AD=CD，∠ACD=45°，∠GFC=90°，

∴△CFG 为等腰直角三角形，

∴GF=FC，

∴EG=EF-GF，DF=CD-FC，

∴EG=DF，故①正确；

②∵△CFG 为等腰直角三角形，H 为 CG 的中点，

∴FH=CH， $\angle GFH = \frac{1}{2} \angle GFC = 45^\circ = \angle HCD$ ，

在△EHF 和△DHC 中，

$$\begin{array}{l} EF=CD \\ \{\angle EFH=\angle DCH \\ FH=CH \end{array} ,$$

∴△EHF≌△DHC (SAS) ，

∴∠HEF=∠HDC，

∴∠AEH+∠ADH=∠AEF+∠HEF+∠ADF-∠HDC=∠AEF+∠ADF=180°，故②正确；

③∵△CFG 为等腰直角三角形，H 为 CG 的中点，

∴FH=CH， $\angle GFH = \frac{1}{2} \angle GFC = 45^\circ = \angle HCD$ ，

在△EHF 和△DHC 中，

$$\begin{aligned} EF &= CD \\ \{ \angle EFH &= \angle DCH \\ FH &= CH \end{aligned} ,$$

∴  $\triangle EHF \cong \triangle DHC$  (SAS), 故③正确;

④错误, 当  $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$ , 则  $3S_{\triangle EDH} = 13S_{\triangle DHC}$ ,

理由如下: ∵  $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$ ,

∴  $AE = 2BE$ ,

∵  $\triangle CFG$  为等腰直角三角形, H 为 CG 的中点,

∴  $FH = GH$ ,  $\angle FHG = 90^\circ$ ,

∵  $\angle EGH = \angle FHG + \angle HFG = 90^\circ + \angle HFG = \angle HFD$ ,

在  $\triangle EGH$  和  $\triangle DFH$  中,

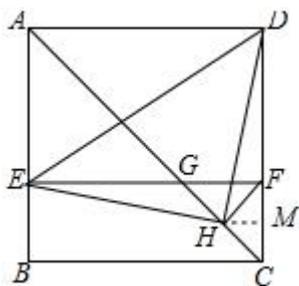
$$\begin{aligned} ED &= DF \\ \{ \angle EGH &= \angle HFD \\ GH &= FH \end{aligned} ,$$

∴  $\triangle EGH \cong \triangle DFH$  (SAS),

∴  $\angle EHG = \angle DHF$ ,  $EH = DH$ ,  $\angle DHE = \angle EHG + \angle DHG = \angle DHF + \angle DHG = \angle FHG = 90^\circ$ ,

∴  $\triangle EHD$  为等腰直角三角形,

过 H 点作 HM 垂直于 CD 于 M 点, 如图所示:



设  $HM=x$ , 则  $DM=5x$ ,  $DH=\sqrt{26}x$ ,  $CD=6x$ ,

$$\text{则 } S_{\triangle DHC} = \frac{1}{2} \times HM \times CD = 3x^2, \quad S_{\triangle EDH} = \frac{1}{2} \times DH^2 = 13x^2,$$

$\therefore 3S_{\triangle EDH} = 13S_{\triangle DHC}$ , 故④错误.

### 三. 解答题

$$19. \text{解:} = 2\sqrt{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + 2 \dots \dots \dots 4 \text{分}$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4$$

$$= 4 \dots \dots \dots 6 \text{分}$$

$$20. \text{解:} = \left[ \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} - \frac{3}{x+1} \right] \times \frac{x+1}{(x+2)^2} \dots \dots \dots 1 \text{分}$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{x+1} \times \frac{x+1}{(x+2)^2} \dots \dots \dots 3 \text{分}$$

$$= \frac{x-2}{x+2} \dots \dots \dots 4 \text{分}$$

$$\therefore \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{5} = 0 \therefore \text{解得: } x = \frac{1}{3} \dots \dots \dots 5 \text{分}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{\frac{1}{3} - 2}{\frac{1}{3} + 2} = -\frac{5}{7} \dots \dots \dots 6 \text{分}$$

21.证明: (1)∵ 四边形ABCD是平行四边形,

∴  $AD = BC$ ,

在RT△ABC中, ∠BAC = 90°, 在E是BC边的中点,

∴  $AE = \frac{1}{2}BC = CE$ ,

同理,  $AF = \frac{1}{2}AD = CF$ ,.....2分

∴  $AE = CE = AF = CF$

∴ 四边形AECF是菱形;.....3分

(2) 解: 连接EF交AC于点O, 如图所示:

在RT△ABC中, ∠BAC = 90°, ∠B = 30°, BC = 10,

∴  $AC = \frac{1}{2}BC = 5$ ,  $AB = \sqrt{3}AC = 5\sqrt{3}$ ,.....4分

∵ 四边形AECF是菱形,

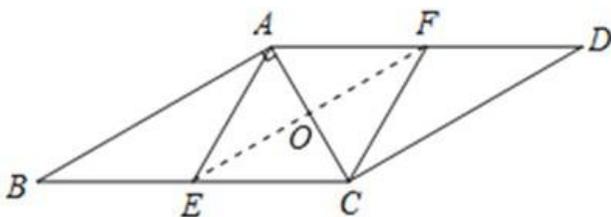
∴  $AC \perp EF$ ,  $OA = OC$ ,

∴ OE是△ABC的中位线,

∴  $OE = \frac{1}{2}AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ,

∴  $EF = 5\sqrt{3}$ ,

∴ 菱形AECF的面积 =  $\frac{1}{2}AC \cdot EF = \frac{25\sqrt{3}}{2}$ .....6分



22.解: 设长跑队跑步的速度为x 千米/小时, 则

$\frac{10}{x} - \frac{10}{2.5x} = 2 - 0.5$ ,.....5分

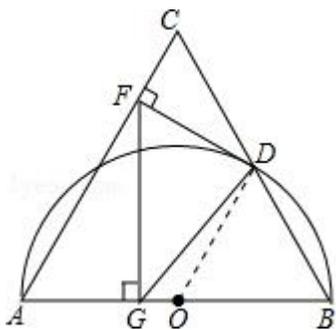
解得:  $x = 4$ ,.....7分

经检验:  $x = 4$ 是所列方程的根

答: 长跑队跑步的速度为4 千米/小时。.....8分

23.解答： (1) 证明：连结 OD，如图，  
 $\because \triangle ABC$  为等边三角形，  
 $\therefore \angle C = \angle A = \angle B = 60^\circ$ ，  
 而  $OD = OB$ ，  
 $\therefore \triangle ODB$  是等边三角形， $\angle ODB = 60^\circ$  ..... 2 分  
 $\therefore \angle ODB = \angle C$ ，  
 $\therefore OD \parallel AC$ ， ..... 3 分  
 $\because DF \perp AC$ ，  
 $\therefore OD \perp DF$ ，  
 $\therefore DF$  是  $\odot O$  的切线； ..... 4 分

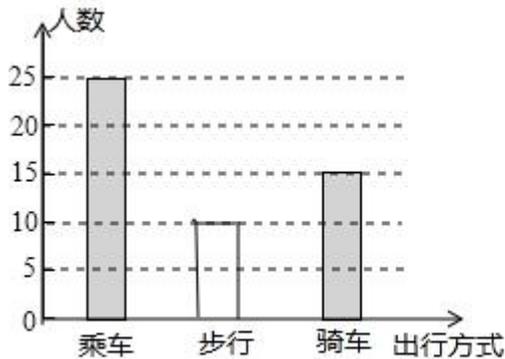
(2) 解：  $\because OD \parallel AC$ ，点 O 为 AB 的中点，  
 $\therefore OD$  为  $\triangle ABC$  的中位线，  
 $\therefore BD = CD = 6$ 。 ..... 6 分  
 在  $Rt\triangle CDF$  中， $\angle C = 60^\circ$ ，  
 $\therefore \angle CDF = 30^\circ$ ，  
 $\therefore CF = \frac{1}{2}CD = 3$ ，  
 $\therefore AF = AC - CF = 12 - 3 = 9$ ， ..... 7 分  
 在  $Rt\triangle AFG$  中， $\because \angle A = 60^\circ$ ，  
 $\therefore FG = AF \times \sin A = 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ ； ..... 8 分



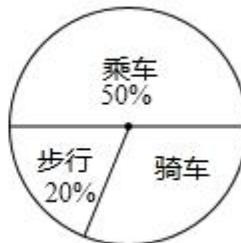
24、解答： 解：(1)  $25 \times 2 = 50$  人；

$50 - 25 - 15 = 10$  人；

如图所示条形图，



图(1)



图(2)

.....2 分

圆心角度数 =  $\frac{30}{100} \times 360^\circ = 108^\circ$ ; ..... 4 分

(2) 估计该年级步行人数 =  $600 \times 20\% = 120$  人；

.....6 分

(3) 设 3 名“喜欢乘车”的学生表示为 A、B、C，1 名“喜欢步行”的学生表示为 D，1 名“喜欢骑车”的学生表示为 E，

则有 AB、AC、BC、AD、BD、CD、AE、BE、CE、DE 10 种等可能的情况，

2 人都是“喜欢乘车”的学生的概率  $P = \frac{3}{10}$ . ..... 10

分

25、解：(1) 当  $k = -1$  时， $l_1: y = -x + 2\sqrt{2}$ ,

联立得，
$$\begin{cases} y = -x + 2\sqrt{2} \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$
，化简得  $x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ ,

解得： $x_1 = \sqrt{2} - 1$ ， $x_2 = \sqrt{2} + 1$ ，.....1 分

设直线  $l_1$  与  $y$  轴交于点  $C$ , 则  $C(0, 2\sqrt{2})$ .

$$S_{\triangle OAB} = S_{\triangle AOC} - S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (x_2 - x_1) = 2\sqrt{2};$$

.....3分

(2) 根据题意得: 
$$\begin{cases} y - \sqrt{2} = k(x - \sqrt{2}) \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$
 整理得:  $kx^2 + \sqrt{2}(1-k)x - 1 = 0 (k < 0)$ ,

$$\therefore \Delta = [\sqrt{2}(1-k)]^2 - 4 \times k \times (-1) = 2(1+k^2) > 0,$$

$\therefore x_1, x_2$  是方程的两根,

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{\sqrt{2}(k-1)}{k} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{k} \end{cases} \quad \text{①},$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2},$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 \left(1 + \frac{1}{x_1 \cdot x_2}\right)},$$

$$= \sqrt{[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2] \left(1 + \frac{1}{x_1 \cdot x_2}\right)},$$

.....4分

将①代入得,  $AB = \sqrt{\frac{2(k^2+1)^2}{k^2}} = \frac{\sqrt{2}(k^2+1)}{-k} (k < 0)$ ,

$$\therefore \frac{\sqrt{2}(k^2+1)}{-k} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

整理得： $2k^2+5k+2=0$ ,

解得： $k=2$ ，或  $k=-\frac{1}{2}$ ； .....6分

(3)  $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ， .....7分

如图：设  $P(x, \frac{1}{x})$ ，则  $M(-\frac{1}{x}+\sqrt{2}, \frac{1}{x})$ ，

$$\text{则 } PM = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4},$$

$$\therefore PF = \sqrt{\left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4},$$

$\therefore PM=PF$ . .....9分

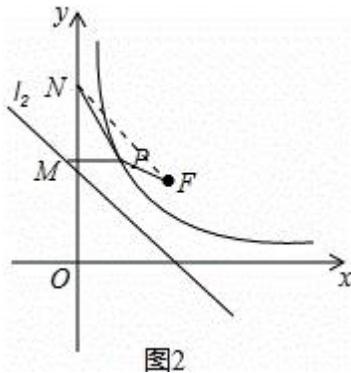
$\therefore PM+PN=PF+PN \geq NF=2$ ,

当点  $P$  在  $NF$  上时等号成立，此时  $NF$  的方程为  $y = -x + 2\sqrt{2}$ ,

由 (1) 知  $P(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ ，

$\therefore$  当  $P(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$  时， $PM+PN$  最小值是 2.

.....10分



26、(1)【解析】

∵  $\angle DBC = \angle ACB = 90^\circ$ ,  
 ∴  $\angle DBC + \angle ACB = 180^\circ$ ,  
 ∴  $AC \parallel BD$ ,

∴  $\angle DBE = \angle CAE$

右 ∵  $\angle DEB = \angle AEC$ ,

∴  $\triangle DBE \sim \triangle CAE$ ,

$$\frac{BD}{AC} = \frac{DE}{CE},$$

又 ∵  $BD = BC = 2AC$ ,

∴  $DE = 2CE$ ;

故答案为  $DE = 2CE$ . ..... 4 分

(2) 证明: 如图 2, ∵  $\angle DBC = \angle ACB = 120^\circ$ ,  $BD = BC$ ,  
 ∴  $\angle D = \angle BCD = 30^\circ$ , ∴  $\angle ACD = 90^\circ$ ,

过点 B 作  $BM \perp DC$  于 M, 则  $DM = MC$ ,  $BM = \frac{1}{2}BC$ ,

∵  $AC = \frac{1}{2}BC$ , ∴  $BM = AC$ , ..... 6 分

∵ 在  $\triangle BME$  和  $\triangle ACE$  中

$$\begin{cases} \angle BME = \angle ACE \\ \angle MEB = \angle AEC \\ BM = AC \end{cases}$$

∴  $\triangle BME \cong \triangle ACE$  (AAS),

∴  $ME = CE = \frac{1}{2}CM$ ,

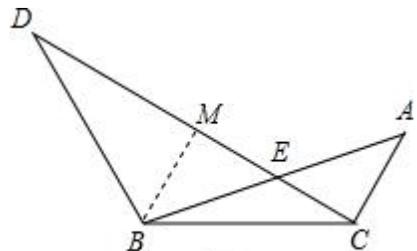


图2

∴DE=3EC; .....8分

(3) 如图, 过点 B 作  $BM' \perp DC$  于点  $M'$ , 过点 F 作  $FN \perp DB$  交 DB 的延长线于点 N, 设  $BF=a$ ,

$$\because \angle DBF=120^\circ,$$

$$\therefore \angle FBN=60^\circ,$$

$$\therefore FN = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad BN = \frac{1}{2}a,$$

$$\because DB=BC=2BF=2a, \quad \therefore DN=DB+BN=\frac{5}{2}a,$$

$$\therefore DF = \sqrt{DN^2 + FN^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \sqrt{7}a, \quad \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\because AC = \frac{1}{2}BC, \quad BF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore BF=AC,$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle BCA \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BDF = \angle CBA,$$

$$\text{又} \because \angle BFG = \angle DFB,$$

$$\therefore \triangle FBG \sim \triangle FDB,$$

$$\therefore \frac{FG}{BF} = \frac{BF}{DF} = \frac{BG}{DB},$$

$$\therefore BF^2 = FG \times FD,$$

$$\therefore a^2 = \sqrt{7}a \times FG,$$

$$\therefore FG = \frac{\sqrt{7}}{7}a,$$

$$\therefore DG = DF - FG = \frac{6\sqrt{7}}{7}a, \quad BG = \frac{FG \times DB}{BF} = \frac{2\sqrt{7}}{7}a,$$

.....10分

∴△DKG 和△DBG 关于直线 DG 对称,

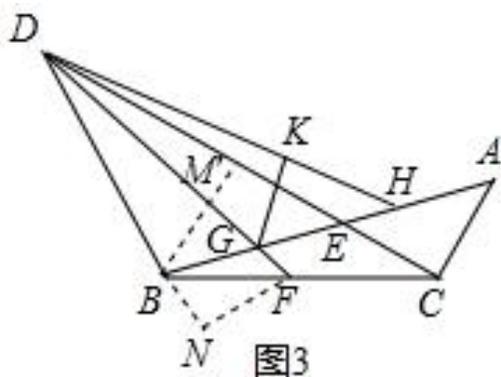
$$\therefore \angle GDH = \angle BDF,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle GDH,$$

$$\text{又} \because \angle BGF = \angle DGH,$$

$$\therefore \triangle BGF \sim \triangle DGH,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{BG}{DG} = \frac{GF}{GH}, \\
&\therefore GH = \frac{DG \times GF}{BG} = \frac{3\sqrt{7}}{7} a, \dots\dots\dots 11 \text{ 分} \\
&\therefore BH = BG + GH = \frac{5\sqrt{7}}{7} a = 10, \\
&\therefore a = 2\sqrt{7}; \\
&\therefore BC = 2a = 4\sqrt{7}, \\
&CM' = BC \cos 30^\circ = 2\sqrt{21}, \\
&\therefore DC = 2CM' = 4\sqrt{21}, \\
&\therefore DE = 3EC, \\
&\therefore EC = \frac{1}{4}DC = \sqrt{21}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}
\end{aligned}$$



27.解： (1) 由 $RT\triangle AOB \cong RT\triangle CDA$ ，得 $OD = 3$ ， $CD = 1$ ；.....1分

$\therefore C(-3,1)$ .....2分

$\therefore$  抛物线经过点C

$\therefore 1 = a(-3)^2 + a(-3) - 2$ .....3分

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

$\therefore$  抛物线表达式为： $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ .....4分

(2) 解法一：在抛物线（对称轴的右侧）上存在点P，Q，  
使四边形ABPQ是正方形，

以AB为边在AB的右侧作正方形ABPQ，

过P作PE  $\perp$  OB于E，QG  $\perp$  x轴于G，

可证 $\triangle PBE \cong \triangle AQG \cong \triangle BAO$ .....6分

$\therefore PE = AG = BO = 2$ ， $BE = QG = AO = 1$ ，

$\therefore P(2,1)$ ， $Q(1,-1)$ .....7分

$\therefore$  由(1) 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ ，当 $x = 2$ 时， $y = 1$ ；当 $x = 1$ 时， $y = -1$

$\therefore P, Q$ 在抛物线上

故在抛物线（对称轴的右侧）上存在点P(2,1)，Q(1,-1)，  
使四边形ABPQ是正方形.....8分

解法二：在抛物线（对称轴右侧）上存在点P，Q，使四边形ABPQ是正方形，  
延长CA交抛物线于Q，过B作BP  $\parallel$  CA交抛物线于P，连PQ，

设直线CA、BP的解析式分别为 $y = k_1x + b_1$ ， $y = k_2x + b_2$

$\therefore A(-1,0), C(-3,1)$

$\therefore CA$ 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ,

同理得**BP**的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ,.....6分

$$\text{解方程组} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

得**Q** (1, -1) ,

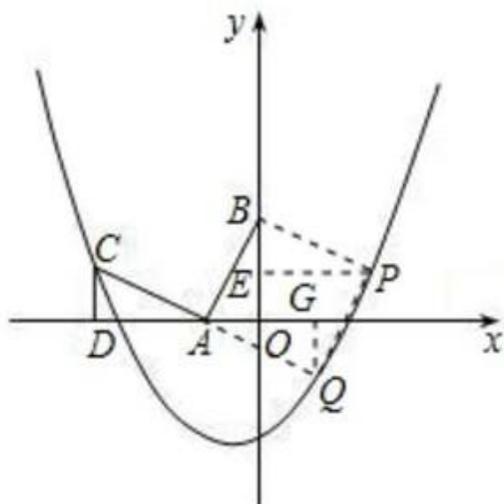
同理得**P** (2,1) ,.....7分

由勾股定理得**AQ = BP = AB =  $\sqrt{5}$** ,

而 $\angle BAQ = 90^\circ$ , 四边形**ABPQ**是正方形,

故在抛物线 (对称轴右侧) 上存在点**P** (2,1) **Q** (1, -1) ,

使四边形**ABPQ**是正方形.....8分



(3) 结论:  $\diamond \frac{BF}{AF} = \frac{BG}{AG}$  成立, .....9分

证明: 连接EF, 过点F作FM // BG交AB的延长线于M, 则  
 $\triangle AMF \sim \triangle ABG$ ,

$$\therefore \frac{MF}{AF} = \frac{BG}{AG} \dots\dots\dots 10分$$

由 (1) 知  $\triangle ABC$  是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 45^\circ,$$

$$\therefore AF = AE,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle 1 = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = 90^\circ,$$

$\therefore EF$  是  $\odot O$  的直径,

$$\therefore \angle EBF = 90^\circ, \dots\dots\dots 11分$$

$$\therefore FM \parallel BG,$$

$$\therefore \angle MFB = \angle EBF = 90^\circ, \quad \angle M = \angle 2 = 45^\circ,$$

$$\therefore BF = MF,$$

$$\therefore \frac{BF}{AF} = \frac{BG}{AG} \dots\dots\dots 12分$$

