

济南市章丘区 2020 年初中学业水平考试

数学模拟试题六参考答案

本试题分选择题和非选择题两部分. 选择题部分共 3 页, 满分为 48 分; 非选择题部分共 5 页, 满分为 102 分. 本试题共 8 页, 满分为 150 分. 考试时间 120 分钟. 本考试不允许使用计算器. (宋体五号加粗)

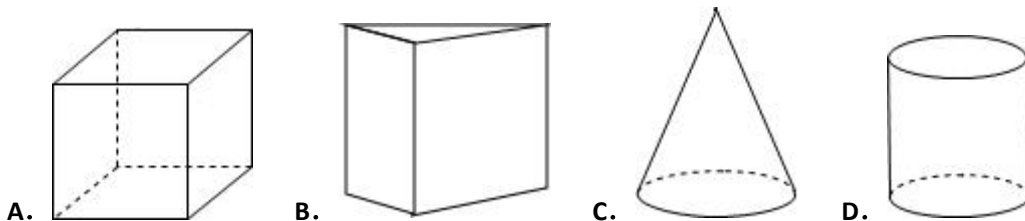
选择题部分 共 48 分

一. 选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 4 分, 共 48 分. 在每个小题给出四个选项中, 只有一项符合题目要求) (宋体五号加粗)

1. 下列整数中, 小于 -3 的整数是 (A)

- A. -4 B. -2 C. 2 D. 3

2. 下面四个立体图形中, 主视图是三角形的是 (C)



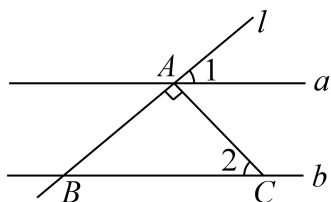
3. 随着高铁的发展, 预计今年济南西客站客流量特达到 2150 万人, 数字 2150 用科学记数法表示为 (B)

- A. 0.215×10^4 B. 2.15×10^3 C. 2.15×10^4 D. 21.5×10^2

【答案】 B

【解析】 2150 这个数共有 4 位整数位, 所以将它用科学计数法表示为 2.15×10^3 .
故答案选 B.

4. 如图, 直线 $a \parallel b$, 直线 l 与 a, b 分别相交于 A, B 两点, $AC \perp AB$ 交 b 于点 C , $\angle 1 = 40^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 (C).



- A. 40° B. 45° C. 50° D. 60°

【答案】 C

【解析】

试题分析: 根据两直线平行, 同位角相等, 可得 $\angle ABC = \angle 1 = 40^\circ$, 然后根据直角三角形的两锐角互余可求得 $\angle 2 = 50^\circ$.

故选：C

考点：1、平行线的性质，2、直角三角形

5. 下列运算正确的是（ ）

A. $a^2 + a = 2a^3$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

C. $(-2a^3)^2 = 4a^6$

D. $a^6 \div a^2 = a^3$

【答案】C

【解析】因为 a^2 与 a 不是同类项，它们不能合并，所以 A 选项不正确；

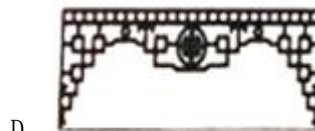
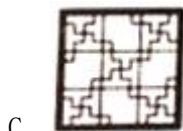
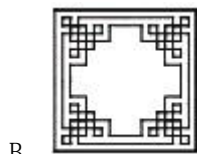
因为 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，所以 B 选项不正确；

因为 $(-2a^3)^2 = (-2)^2(a^3)^2 = 4a^6$ ，所以 C 选项正确；

因为 $a^6 \div a^2 = a^4$ ，所以 D 选项不正确；

故答案选 C.

6. 中国古代建筑中的窗格图案实用大方，寓意吉祥．以下给出的图案中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）．



【答案】B

【解析】

试题分析：根据中心对称图形和轴对称图形的意义，可知：A 项、D 项不是中心对称图形，C 项不是轴对称图形，B 项既是轴对称图形又是中心对称图形，故选 B．

考点：1、中心对称图形，2、轴对称图形

7. 化简 $\frac{m-1}{m} \div \frac{m-1}{m^2}$ 的结果是

A. m

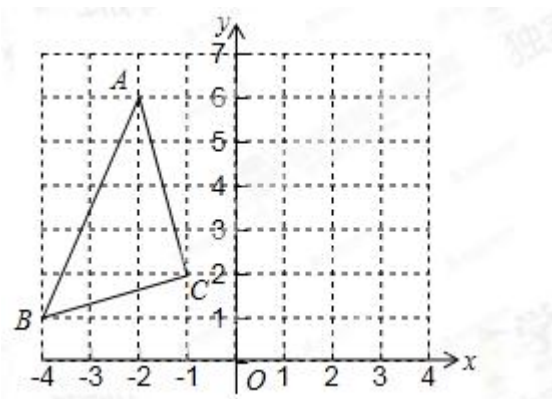
B. $\frac{1}{m}$

C. $m-1$

D. $\frac{1}{m-1}$

【解析】 $\frac{m-1}{m} \div \frac{m-1}{m^2} = \frac{m-1}{m} \times \frac{m^2}{m-1} = m$ ，故选 A.

8. 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的顶点都在方格纸的格点上，如果将 $\triangle ABC$ 先向右平移 4 个单位长度，在向下平移 1 个单位长度，得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，那么点 A 的对应点 A_1 的坐标为（ ）



- A. (4, 3) B. (2, 4) C. (3, 1) D. (2, 5)

【答案】D

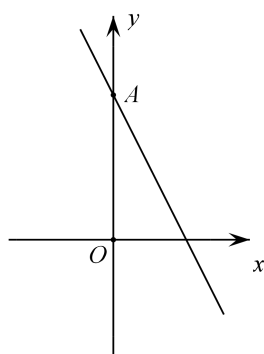
【解析】

试题分析：根据点的平移规律：横坐标，右移加，左移减；纵坐标，上移加，下移减可得：由坐标系可得 A (-2, 6)，将 $\triangle ABC$ 先向右平移 4 个单位长度，在向下平移 1 个单位长度，点 A 的对应点 A_1 的坐标为 (-2+4, 6-1)，即 (2, 5)，故选：D.

考点：坐标与图形变化-平移.

9.如图，若一次函数 $y = -2x + b$ 的图像交 y 轴于点 $A(0, 3)$ ，则不等式 $-2x + b > 0$ 的解集为 ()

- A. $x > \frac{3}{2}$ B. $x > 3$ C. $x < \frac{3}{2}$ D. $x < 3$



第 9 题图

【答案】C

【解析】把点 $A(0, 3)$ 代入 $y = -2x + b$ ，得 $3 = 0 + b$. $\therefore b = 3$.
一次函数解析式为 $y = -2x + 3$.

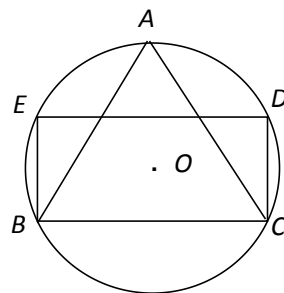
由 $-2x + 3 > 0$ ，得 $x < \frac{3}{2}$.

故答案选 C.

10. 如图, 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 与 x 轴, y 轴分别交于 A, B 两点,

把 $\triangle AOB$ 沿着直线 AB 翻折后得到 $\triangle AO'B$, 则点 O' 的坐标是

- A. $(\sqrt{3}, 3)$ B. $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$
C. $(2, 2\sqrt{3})$ D. $(2\sqrt{3}, 4)$



第 10 题图

【解析】连接 OO' , 由直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$ 可知 $OB=2, OA=2\sqrt{3}$, 故 $\angle BAO = 30^\circ$, 点 O' 为点 O 关于直线

AB 的对称点, 故 $\angle O'AO = 60^\circ$, $\triangle AOO'$ 是等边三角形, O' 点的横坐标是 OA 长度的一半 $\sqrt{3}$, 纵坐标则是 $\triangle AOO'$ 的高 3, 故选 A.

11. 定义: 点 $A(x, y)$ 为平面直角坐标系内的点, 若满足 $x=y$, 则把点 A 叫做“平衡点”. 例如: $M(1, 1)$,

$N(-2, -2)$ 都是“平衡点”. 当 $-1 \leq x \leq 3$ 时, 直线 $y=2x+m$ 上有“平衡点”, 则 m 的取值范围是()

- A. $0 \leq m \leq 1$ B. $-3 \leq m \leq 1$ C. $-3 \leq m \leq 3$ D. $-1 \leq m \leq 0$

【答案】B

【解析】

(1) 把 $x=-1$ 代入 $y=x$, 得 $y=-1$.

把 $(-1, -1)$ 代入 $y=2x+m$, 得 $m=1$.

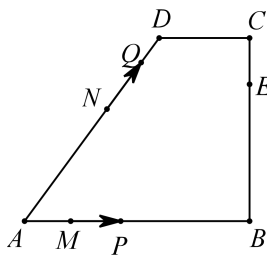
(2) 把 $x=3$ 代入 $y=x$, 得 $y=3$.

把 $(3, 3)$ 代入 $y=2x+m$, 得 $m=-3$.

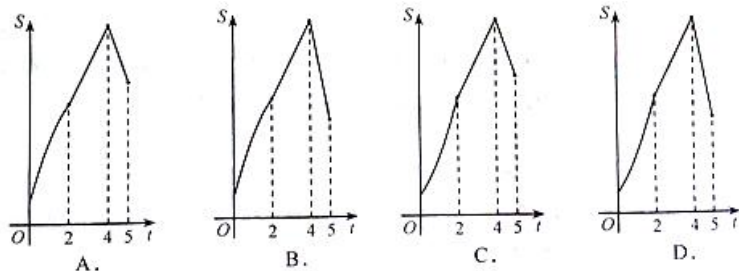
$\therefore m$ 的取值范围是: $-3 \leq m \leq 1$.

\therefore 选项 B 正确.

12. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle B = 90^\circ$, $AB=AD=5$, $BC=4$, M, N, E 分别是 AB, AD, CB 上的点, $AM=CE=1$, $AN=3$, 点 P 从点 M 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度沿折线 $MB-BE$ 向点 E 运动, 同时点 Q 从点 N , 以相同的速度沿折线 $ND-DC-CE$ 向点 E 运动, 设 $\triangle APQ$ 的面积为 S , 运动的时间为 t 秒, 则 S 与 t 函数关系的大致图象为()



第 15 题图



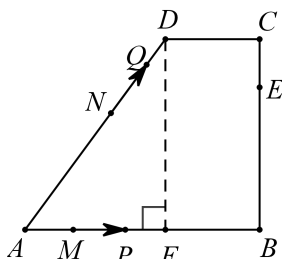
【答案】D

【解析】过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F (如图 1), 则 $DF = BC = 4$.

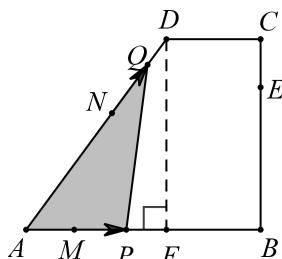
$\because AD = 5, DF = 4, \therefore AF = 3$.

$\therefore \sin \angle A = \frac{DF}{AD} = \frac{4}{5}, MF = 3 - 1 = 2, BF = AB - AF = 5 - 3 = 2, DC = BF = 2$.

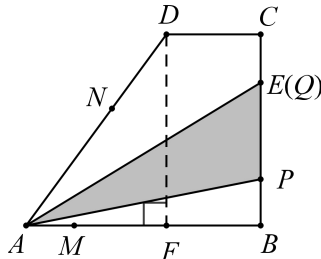
$\because AD = 5, AN = 3, \therefore ND = 5 - 3 = 2$.



第 15 题答案图 1



第 15 题答案图 2



第 15 题答案图 3

(1) 当 $0 \leq t \leq 2$ 时, 点 P 在 MF 上, 点 Q 在 ND 上 (如图 2),

此时 $AP = AM + MP = 1 + t, AQ = AN + NQ = 3 + t$.

$\therefore S = \frac{1}{2} AP \cdot AQ \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} (1 + t) (3 + t) \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5} (t + 2)^2 - \frac{2}{5}$. 当 $0 \leq t \leq 2$ 时, S 随 t 的增大而增大, 且当 $t = 2$ 时, $S = 6$. 由此可知 A, B 选项都不对.

(2) 当 $t = 5$ 时, 点 P 在 MF 上, 点 Q 在 ND 上 (如图 3),

此时 $BP = 1, PE = BC - BP - CE = 4 - 1 - 1 = 2$.

$\therefore S = \frac{1}{2} AB \cdot PE = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5$.

$\because 6 > 5$,

\therefore 选项 D 正确.

二. 填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分) (宋体五号加粗下同)

13. 分解因式: $a^2 - 4b^2 =$ _____.

【答案】 $(a + 2b)(a - 2b)$

【解析】应用平方差公式得 $a^2 - 4b^2 = (a + 2b)(a - 2b)$

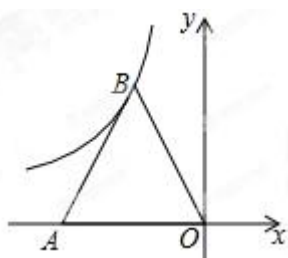
14. 在一个不透明的口袋中，装有若干个出颜色不同其余都相同的球．如果口袋中装有 3 个红球且摸到红球的概率为 $\frac{1}{5}$ ，那么口袋中球的总个数为_____.

【解析】设口袋中球的总个数为 N ，则摸到红球的概率为 $\frac{3}{N} = \frac{1}{5}$ ，所以 $N = 15$ ，应填 15.

15. 若代数式 $\frac{1}{x-2}$ 和 $\frac{3}{2x+1}$ 的值相等，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】解方程 $\frac{1}{x-2} = \frac{3}{2x+1}$ ，的 $x = 7$ ，应填 7.

16. 如图，等边三角形 AOB 的顶点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，顶点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 的图象上，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】-4

【解析】

试题分析：过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于点 D，

$\because \triangle AOB$ 是等边三角形，点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$ ， $OB = OA = AB = 4$ ，

$\therefore OD = OB \cos 60^\circ = 2$ ， $BD = OB \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore B(-2, 2)$ ，

$\therefore k = -2 \times 2 = -4$ ．

考点：1. 反比例函数图象上点的坐标特征；2. 等边三角形的性质．

17. 用一条宽相等的足够长的纸条，打一个结，如图（1）所示，然后轻轻拉紧、压平就可以得到如图（2）所示的正五边形 ABCDE，其中 $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$ 度．



图1

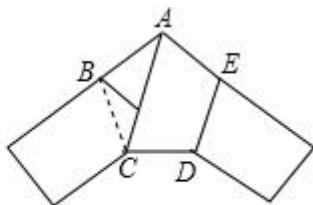


图2

【答案】36

【解析】试题分析：由题可知，五边形 $ABCDE$ 是正五边形，每个角的度数是 $180^\circ \times (5-1) = 720^\circ$ ，其中 $\angle ABC = 144^\circ$ ，因为 $AB = BC$ ，所以 $\angle BAC = \angle BCA = (180^\circ - 144^\circ) \div 2 = 18^\circ$ 。

考点：多边形内角和公式

点评：该题是常考题，主要考查学生对多边形内角和公式的理解和应用，要求学生熟记。

18. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + 4x - 3$ 与 x 轴交于点 A ， B （点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C 。垂直于 y 轴的直线 l 与抛物线交于点 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，与直线 BC 交于点 $N(x_3, y_3)$ ，若 $x_1 < x_2 < x_3$ ，记 $s = x_1 + x_2 + x_3$ ，则 s 的取值范围为_____

【解析】解：当 $y = 0$ 时， $-x^2 + 4x - 3 = 0$ ，解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 3$ ，则 $A(1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，

当 $x = 0$ 时， $y = -x^2 + 4x - 3 = -3$ ，则 $C(0, -3)$ ，

$\because y = -x^2 + 4x - 3 = -(x - 2)^2 + 1$ ，

\therefore 抛物线的顶点坐标为 $(2, 1)$ ，

易得直线 BC 的解析式为 $y = x - 3$ ，

$\because x_1 < x_2 < x_3$ ，

$\therefore 0 < y_1 = y_2 = y_3 \leq 1$ ，

当 $y_3 = 1$ 时， $x - 3 = 1$ ，解得 $x = 4$ ，

$\therefore 3 < x_3 < 4$ ，

\because 点 P 和点 Q 为抛物线上的对称点，

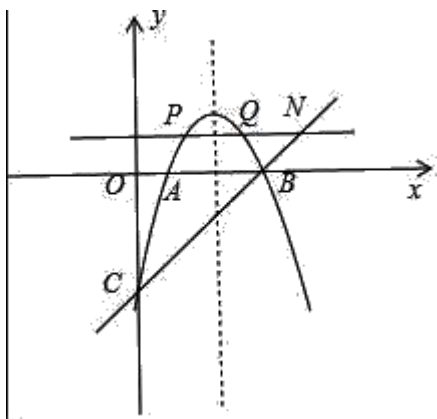
$\therefore x_2 - 2 = 2 - x_1$ ，

$\therefore x_1 + x_2 = 4$ ，

$\therefore s = 4 + x_3$ ，

$\therefore 7 < s < 8$ 。

故选：C。



三. 解答题 (本大题共 9 小题, 共 78 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

19. (本小题满分 6 分)

计算: $\sqrt{12} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - (\pi - 3.14)^0 - \tan 60^\circ$.

计算: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^0 + 2 \sin 30^\circ + |-3|$

【解析】解: (1) 原式 $= 4 - 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \dots\dots\dots 1$ 分
 $= 4 - 1 + 1 + 3 \dots\dots\dots 2$ 分
 $= 7$

20. 解不等式组: $\begin{cases} x - 3 < 1 \\ 4x + 9 \geq x + 1 \end{cases}$. 并写出所有符合条件的整数解。

【解析】由 $x - 3 < 1$ 得 $x < 4$; 由 $4x + 9 \geq x + 1$ 得 $x \geq -2\frac{2}{3}$.

所以原不等式组的解为 $-2\frac{2}{3} \leq x < 4$.

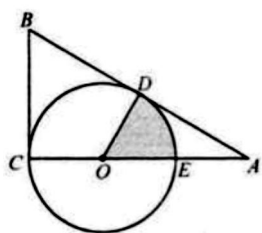
所有符合条件的整数解为: $-2, -1, 0, 1, 2, 3$,

21. 如图, O 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC 上一点, 以 OC 为半径的 $\odot O$ 与斜边 AB 相切于点 D, 交 OA 于点

E. 已知 $BC = \sqrt{3}$, $AC = 3$.

(1) 求 AD 的长;

(2) 求图中阴影部分的面积.



(第 21 题)

【答案】 (1) $\sqrt{3}$ (2) $\frac{\pi}{6}$

【解析】

试题分析：(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，利用勾股定理求出 AB 的长，然后根据切线的判定证出 BC 为切线，然后根据切线长定理可求解；

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，根据 $\angle A$ 的正弦求出 $\angle A$ 的度数，然后根据切线的性质求出 OD 的长，和扇形圆心角的度数，再根据扇形的面积公式可求解。

试题解析：(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$\because BC \perp OC$

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的切线

$\therefore BD = BC = \sqrt{3}$

$\therefore AD = AB - BD = \sqrt{3}$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$\therefore \angle A = 30^\circ$

$\because AB$ 切 $\odot O$ 于点 D

$\therefore OD \perp AB$

$\therefore \angle AOD = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$

$\because \frac{OD}{AD} = \tan A = \tan 30^\circ$

$\therefore \frac{OD}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore OD = 1$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{60\pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{6}$$

考点：1、切线的性质，2、勾股定理，3、解直角三角形，4、扇形的面积

22.化简求值： $\frac{x-1}{x^2+2x+1} \div \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)$ ，其中 $x = \sqrt{3} - 1$.

【答案】 $\frac{1}{x+1}, \frac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】

试题分析：根据分式的混合运算，先算括号里面（通分），然后对分子分母分解因式后约分化简，再在带入求值即可.

试题解析：原式 = $\frac{x-1}{(x+1)^2} \div \frac{x+1-2}{x+1}$

$$= \frac{x-1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{1}{x+1},$$

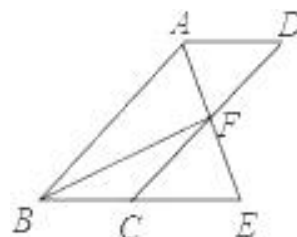
当 $x = \sqrt{3} - 1$ 时，原式 = $\frac{1}{\sqrt{3}-1+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

考点：分式的化简求值

23、如图，四边形 ABCD 为平行四边形， $\angle BAD$ 的角平分线 AE 交 CD 于点 F，交 BC 的延长线于点 E.

(1) 求证：BE=CD；

(2) 连接 BF，若 $BF \perp AE$ ， $\angle BEA = 60^\circ$ ，AB=4，求平行四边形 ABCD 的面积.



【答案】 (1) 详见解析； (2) $4\sqrt{3}$.

【解析】

【详解】 试题分析：(1) 由平行四边形的性质和角平分线易证 $\angle BAE = \angle BEA$ ，根据等腰三角形的性质可

得 $AB=BE$ ；（2）易证 $\triangle ABE$ 是等边三角形，根据等边三角形的性质可得 $AE=AB=4$ ， $AF=EF=2$ ，由勾股定理求出 BF ，再由 AAS 证明 $\triangle ADF \cong \triangle ECF$ ，即 $\triangle ADF$ 的面积 $= \triangle ECF$ 的面积，因此平行四边形 $ABCD$ 的面积 $= \triangle ABE$ 的面积 $= \frac{1}{2} AE \cdot BF$ ，即可得出结果．

试题解析：（1）证明： \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD \parallel BC, AB \parallel CD, AB=CD,$$

$$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ, \angle AEB = \angle DAE,$$

$\because AE$ 是 $\angle BAD$ 的平分线，

$$\therefore \angle BAE = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AEB,$$

$$\therefore AB=BE, \therefore BE=CD;$$

（2）解： $\because AB=BE, \angle BEA=60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形，

$$\therefore AE=AB=4,$$

$$\because BF \perp AE,$$

$$\therefore AF=EF=2,$$

$$\therefore BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle D = \angle ECF, \angle DAF = \angle E,$$

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ECF$ 中，

$$\begin{cases} \angle D = \angle ECF \\ \angle DAF = \angle E, \\ AF = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ECF \text{ (AAS)},$$

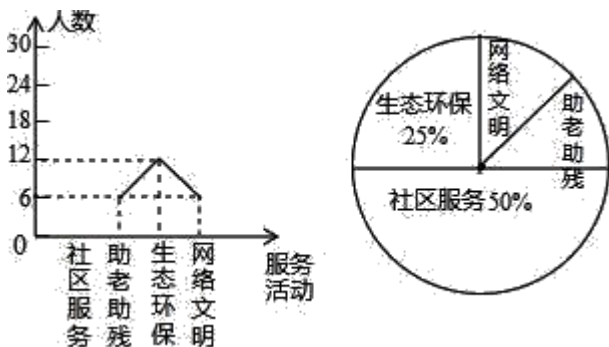
$$\therefore \triangle ADF \text{ 的面积} = \triangle ECF \text{ 的面积},$$

$$\therefore \text{平行四边形 } ABCD \text{ 的面积} = \triangle ABE \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AE \cdot BF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

考点：全等三角形的判定与性质；平行四边形的性质．

24. （8分）为大力弘扬“奉献、友爱、互助、进步”的志愿服务精神，传播“奉献他人、提升自我”的志愿服务理念，合肥市某中学利用周末时间开展了“助老助残、社区服务、生态环保、网络文明”四个志愿服务活动（每人只参加一个活动），九年级某班全班同学都参加了志愿服务，班长为了解志愿服务的情况，收集整理数据后，绘制以下不完整的统计图，请你根据统计图所提供的信息解答下列问题：

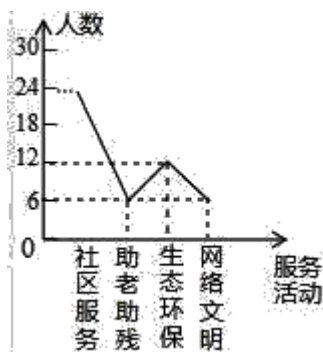
- （1）请把折线统计图补充完整；
- （2）求扇形统计图中，网络文明部分对应的圆心角的度数；
- （3）小明和小丽参加了志愿服务活动，请用树状图或列表法求出他们参加同一服务活动的概率．



解：（1）该班全部人数： $12 \div 25\% = 48$ 人．

社区服务的人数为 $48 \times 50\% = 24$ ，

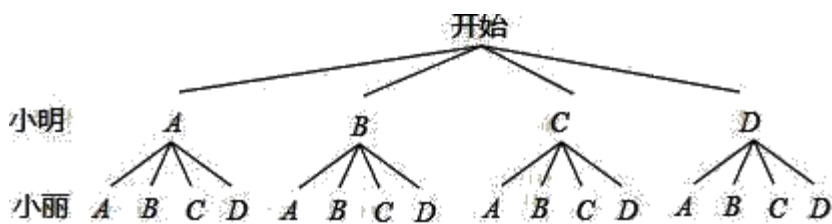
补全折线统计如图所示：



$$\text{（2）网络文明部分对应的圆心角的度数为 } 360^\circ \times \frac{6}{48} = 45^\circ;$$

（3）分别用 A，B，C，D 表示“社区服务、助老助残、生态环保、网络文明”四个服务活动，

画树状图得：



∴共有 16 种等可能的结果，他们参加同一服务活动的有 4 种情况，

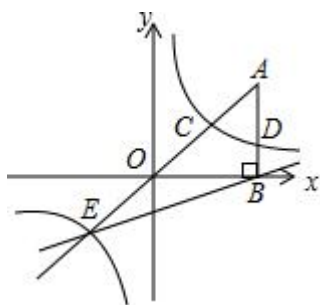
∴他们参加同一服务活动的概率为 $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

25.如图，在平面直角坐标系中，A 点的坐标为 $(a, 6)$ ， $AB \perp x$ 轴于点 B， $\cos \angle OAB = \frac{3}{5}$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象的一支分别交 AO、AB 于点 C、D. 延长 AO 交反比例函数的图象的另一支于点 E. 已知点 D 的纵坐标为 $\frac{3}{2}$.

(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 求直线 EB 的解析式；

(3) 求 $S_{\triangle OEB}$.



【答案】(1) 反比例函数的解析式为 $y = \frac{12}{x}$ ；(2) 直线 BE 的解式为： $y = \frac{1}{4}x - 2$ ；(3) $S_{\triangle OEB} = 12$.

【解析】分析：(1) 利用待定系数法求反比例函数的解析式；

(2) 根据点 A 的坐标可求得直线 OA 的解析式，联立直线 OA 和反比例函数解析式列方程组可得点 E 的坐标，再利用待定系数法求 BE 的解析式；

(3) 根据三角形的面积公式计算即可.

详解：（1） \because A 点的坐标为（a，6）， $AB \perp x$ 轴，

$$\therefore AB=6,$$

$$\therefore \cos \angle OAB = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{6}{OA} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore OA=10,$$

由勾股定理得：OB=8，

$$\therefore A(8, 6),$$

$$\therefore D(8, \frac{3}{2}),$$

\because 点 D 在反比例函数的图象上，

$$\therefore k = 8 \times \frac{3}{2} = 12,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为：} y = \frac{12}{x};$$

（2）设直线 OA 的解析式为： $y = bx$ ，

$$\therefore A(8, 6),$$

$$\therefore 8b=6, b=\frac{3}{4},$$

$$\therefore \text{直线 OA 的解析式为：} y = \frac{3}{4}x,$$

$$\text{则 } \frac{12}{x} = \frac{3x}{4}, x = \pm 4,$$

$$\therefore E(-4, -3),$$

设直线 BE 的解式为： $y = mx + n$ ，

$$\text{把 } B(8, 0), E(-4, -3) \text{ 代入得：} \begin{cases} 8m + n = 0 \\ -4m + n = -3 \end{cases},$$

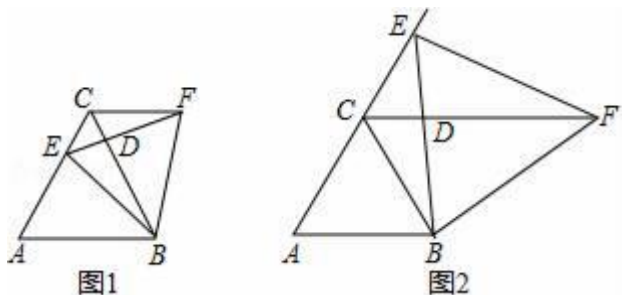
解得： $\begin{cases} m=\frac{1}{4}, \\ n=-2 \end{cases}$

∴直线 BE 的解式为： $y=\frac{1}{4}x-2$;

(3) $S_{\triangle OEB}=\frac{1}{2}OB \cdot |y_E|=\frac{1}{2} \times 8 \times 3=12$.

点睛：本题考查了一次函数与反比例函数的交点问题，用待定系数法求反比例函数的解析式及计算图形面积的问题。解题的关键是：确定交点的坐标。

26.在数学兴趣小组活动中，小亮进行数学探究活动. $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形， E 是 AC 上一点，小亮以 BE 为边向 BE 的右侧作等边三角形 BEF ，连接 CF 。



(1) 如图 1，当点 E 在线段 AC 上时， EF 、 BC 相交于点 D ，小亮发现有两个三角形全等，请你找出来，并证明。

(2) 当点 E 在线段上运动时，点 F 也随着运动，若四边形 $ABFC$ 的面积为 $\frac{7}{4}\sqrt{3}$ ，求 AE 的长。

(3) 如图 2，当点 E 在 AC 的延长线上运动时， CF 、 BE 相交于点 D ，请你探求 $\triangle ECD$ 的面积 S_1 与 $\triangle DBF$ 的面积 S_2 之间的数量关系。并说明理由。

(4) 如图 2，当 $\triangle ECD$ 的面积 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，求 AE 的长。

【答案】 (1) $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ ，证明见解析； (2) $\frac{3}{2}$ ； (3) $S_2 - S_1 = \sqrt{3}$ ，证明见解析； (4) 3

【解析】分析：(1) 结论： $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ 。理由等边三角形的性质，根据 SAS 即可证明；

(2) 由 $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ ，推出 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BCF}$ ，推出 $S_{\text{四边形 BECF}} = S_{\triangle BEC} + S_{\triangle BCF} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$ ，由 $S_{\text{四边形}}$

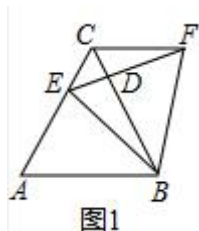
形 $ABCF = \frac{7\sqrt{3}}{4}$ ，推出 $S_{\triangle ABE} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，再利用三角形的面积公式求出 AE 即可；

(3) 结论： $S_2 - S_1 = \sqrt{3}$ 。利用全等三角形的性质即可证明；

(4) 首先求出 $\triangle BDF$ 的面积，由 $CF \parallel AB$ ，则 $\triangle BDF$ 的 BF 边上的高为 $\sqrt{3}$ ，可得 $DF = \frac{7}{3}$ ，设 $CE = x$ ，则 $2 + x = CD + DF = CD + \frac{7}{3}$ ，推出 $CD = x - \frac{1}{3}$ ，由 $CD \parallel AB$ ，可得 $\frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE}$ ，即 $\frac{x - \frac{1}{3}}{2} = \frac{x}{x+2}$ ，求出 x 即可；

详解：(1) 结论： $\triangle ABE \cong \triangle CBF$ 。

理由：如图 1 中，



$\because \triangle ABC, \triangle BEF$ 都是等边三角形，

$\therefore BA = BC, BE = BF, \angle ABC = \angle EBF,$

$\therefore \angle ABE = \angle CBF,$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF.$

(2) 如图 1 中， $\because \triangle ABE \cong \triangle CBF,$

$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BCF},$

$\therefore S_{\text{四边形 } BECF} = S_{\triangle BEC} + S_{\triangle BCF} = S_{\triangle BCE} + S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC} = \sqrt{3},$

$\therefore S_{\text{四边形 } ABCF} = \frac{7\sqrt{3}}{4},$

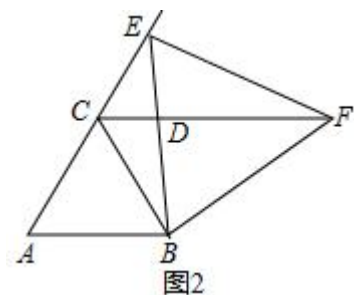
$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore AE = \frac{3}{2}.$$

(3) 结论: $S_2 - S_1 = \sqrt{3}$.

理由: 如图 2 中,



$\because \triangle ABC, \triangle BEF$ 都是等边三角形,

$\therefore BA = BC, BE = BF, \angle ABC = \angle EBF,$

$\therefore \angle ABE = \angle CBF,$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF,$

$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle BCF},$

$\therefore S_{\triangle BCF} - S_{\triangle BCE} = S_2 - S_1,$

$\therefore S_2 - S_1 = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle BCE} = S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}.$

(4) 由 (3) 可知: $S_{\triangle BDF} - S_{\triangle ECD} = \sqrt{3},$

$$\therefore S_{\triangle ECD} = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore S_{\triangle BDF} = \frac{7\sqrt{3}}{6},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF,$$

$$\therefore AE = CF, \angle BAE = \angle BCF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DCB,$$

$$\therefore CF \parallel AB, \text{ 则 } \triangle BDF \text{ 的 } BF \text{ 边上的高为 } \sqrt{3}, \text{ 可得 } DF = \frac{7}{3},$$

$$\text{设 } CE = x, \text{ 则 } 2 + x = CD + DF = CD + \frac{7}{3},$$

$$\therefore CD = x - \frac{1}{3},$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{CE}{AE}, \text{ 即 } \frac{x - \frac{1}{3}}{2} = \frac{x}{x + 2},$$

$$\text{化简得: } 3x^2 - x - 2 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 1 \text{ 或 } -\frac{2}{3} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore CE = 1, AE = 3.$$

点睛：本题考查四边形综合题、全等三角形的判定和性质、平行线等分线段定理、解直角三角形等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，学利用参数构建方程解决问题，属于中考压轴题．

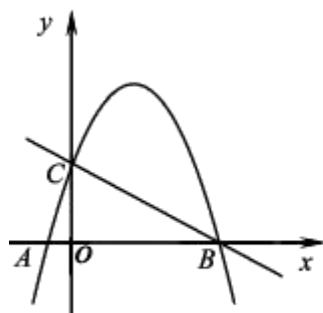
27. (本小题满分 12 分)

如图 1，抛物线 $y = ax^2 + bx + 2 (a \neq 0)$ 过点 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$ ，与 y 轴相交于点 C ．

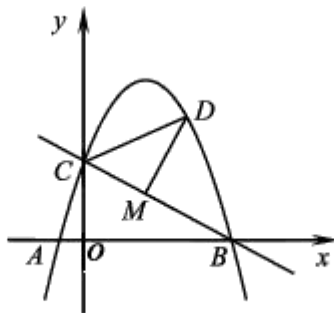
(1) 求抛物线的解析式；

(2) 在 x 轴正半轴上存在点 E ，使得 $\triangle BCE$ 是等腰三角形，请求出点 E 的坐标；

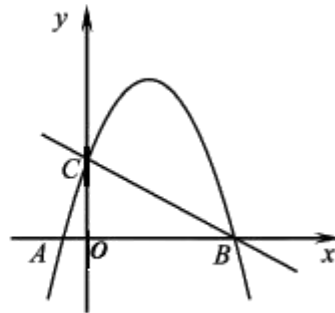
(3) 如图 2，点 D 是直线 BC 上方抛物线上的一个动点，过点 D 作 $DM \perp BC$ 于点 M ，是否存在点 D ，使得 $\triangle CDM$ 的某个角恰好等于 $\angle ABC$ 的 2 倍？若存在，请求出点 D 的横坐标；若不存在，请说明理由．



第 27 题图 1



第 27 题图 2



第 27 题备用图

27. 解: (1) \because 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 过点 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} a - b + 2 = 0 \\ 16a + 4b + 2 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \dots\dots\dots$$

\therefore 二次函数的表达式为: $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

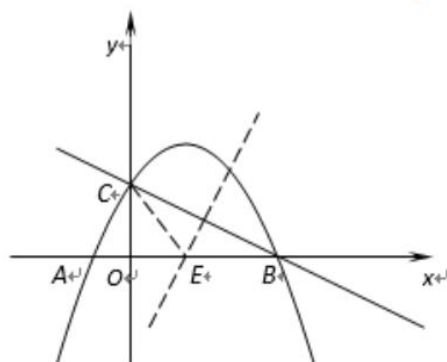


图 1

(2) 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$,

当 $x = 0$ 时, $y = 2$; 当 $y = 0$ 时, $x_2 = 4$;

$\therefore A(-1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 2)$ $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\therefore OB = 4$, $OC = 2$

$$\therefore BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 2\sqrt{5}$$

①当 $EB = EC$ 时, 如图 1, E 点是线段 BC 的中垂线

与 x 轴的交点,

设 $OE = x$, 则 $BE = CE = 4 - x$, 在 $Rt\triangle OCE$ 中,

$$x^2 + 2^2 = (4 - x)^2, \text{ 解得 } x = \frac{3}{2},$$

$\therefore E(\frac{3}{2}, 0)$ $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

②当 $BC = BE$ 时, $OE = BE + OB = 2\sqrt{5} + 4$

$\therefore E(2\sqrt{5} + 4, 0)$ $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3) 2 或 $\frac{29}{11}$. . .

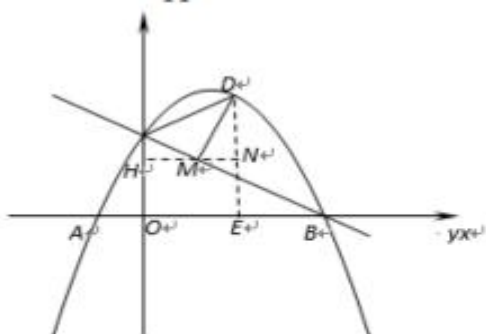


图 4

如图 4, 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E , 过点 M 作

$MH \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 H , 交 DE 于点 N , .

易证 $\triangle CHM \sim \triangle MND$.

$$\therefore \frac{CM}{DM} = \frac{CH}{MN} = \frac{HM}{DN}, .$$

在 (2) 的图 1 中 $EB = EC$.

$$\therefore \angle ECB = \angle ABC .$$

$$\therefore \angle OEC = \angle ECB + \angle ABC = 2\angle ABC .$$

$$\tan 2\angle ABC = \tan \angle OEC = \frac{OC}{OE} = \frac{4}{3} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore B(4, 0), C(0, 2) .$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 的解析式是: } y = -\frac{1}{2}x + 2 .$$

$$\text{设 } M(m, -\frac{1}{2}m + 2) .$$

$$\text{则 } MH = m, CH = 2 - (-\frac{1}{2}m + 2) = \frac{1}{2}m \dots\dots\dots$$

$$\text{①当 } \angle DCM = 2\angle ABC \text{ 时, } \tan \angle DCM = \frac{DM}{CM} = \frac{4}{3}, .$$

$$\therefore \frac{MN}{CH} = \frac{DN}{MH} = \frac{4}{3}, \text{ 即 } \frac{MN}{\frac{1}{2}m} = \frac{DN}{m} = \frac{4}{3} .$$

$$\therefore MN = \frac{2}{3}m, DM = \frac{4}{3}m .$$

$$\therefore HN = \frac{5}{3}m, DE = \frac{4}{3}m + (-\frac{1}{2}m + 2) = \frac{5}{6}m + 2 .$$

$$\therefore D(\frac{5}{3}m, \frac{5}{6}m + 2) \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

注意: 1.试卷中文字为宋体; 数字为 TimesNewRoman; 字母为 TimesNewRoman, 斜体。

2.页面设计(布局): 页边距: 上、下、左、右均为 20 毫米

纸张方向: 纵向

纸张大小: B5

27、如图 1, 矩形 $OABC$ 的顶点 A, C 的坐标分别为 $(4, 0), (0, 6)$, 直线 AD 交 BC 于点 D , $\tan \angle OAD = 2$, 抛物线 $M_1: y = ax^2 + bx (a \neq 0)$ 过 A, D 两点.

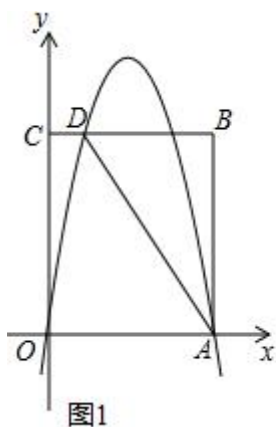


图1

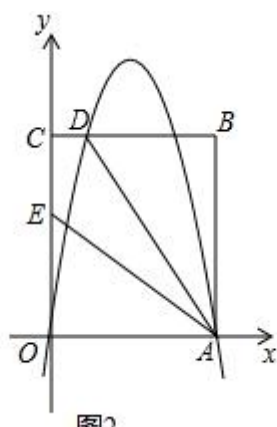


图2

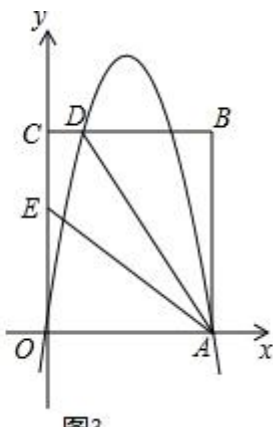


图3

(1)求点 D 的坐标和抛物线 M_1 的表达式;

(2)点 P 是抛物线 M_1 对称轴上一动点, 当 $\angle CPA = 90^\circ$ 时, 求所有符合条件的点 P 的坐标;

(3)如图 2, 点 $E(0, 4)$, 连接 AE , 将抛物线 M_1 的图象向下平移 $m(m > 0)$ 个单位得到抛物线 M_2 .

①设点 D 平移后的对应点为点 D' , 当点 D' 恰好在直线 AE 上时, 求 m 的值;

②当 $1 \leq x \leq m(m > 1)$ 时, 若抛物线 M_2 与直线 AE 有两个交点, 求 m 的取值范围.

【答案】解: (1)如图 1 中, 作 $DH \perp OA$ 于 H . 则四边形 $CDHO$ 是矩形.

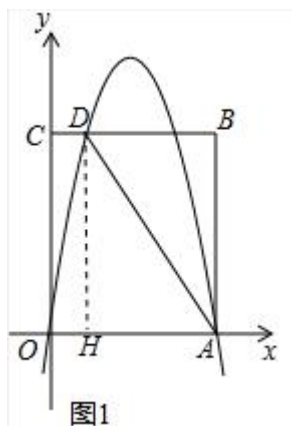


图1

\because 四边形 $CDHO$ 是矩形,

$\therefore OC = DH = 6$,

$\because \tan \angle DAH = \frac{DH}{AH} = 2$,

$\therefore AH = 3$,

$\because OA = 4$,

$\therefore CD = OH = 1$,

$\therefore D(1, 6)$,

把 $D(1, 6)$, $A(4, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx$ 中, 则有 $\begin{cases} a+b=6 \\ 16a+4b=0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=-2 \\ b=8 \end{cases}$,

\therefore 抛物线 M_1 的表达式为 $y = -2x^2 + 8x$.

(2)如图 1-1 中, 设 $P(2, m)$.

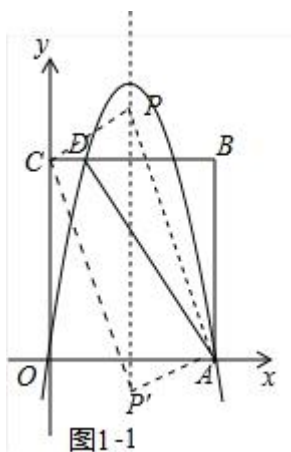


图1-1

$$\because \angle CPA = 90^\circ,$$

$$\therefore PC^2 + PA^2 = AC^2,$$

$$\therefore 2^2 + (m-6)^2 + 2^2 + m^2 = 4^2 + 6^2,$$

$$\text{解得 } m = 3 \pm \sqrt{13},$$

$$\therefore P(2, 3 + \sqrt{13}), P'(2, 3 - \sqrt{13}).$$

(3)①如图2中,

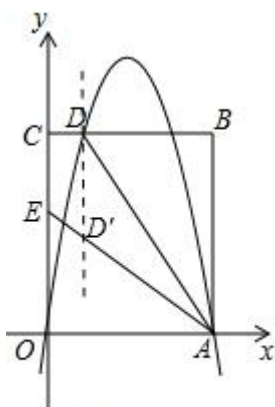


图2

易知直线 AE 的解析式为 $y = -x + 4$,

$$x = 1 \text{ 时, } y = 3,$$

$$\therefore D'(1, 3),$$

平移后的抛物线的解析式为 $y = -2x^2 + 8x - m$,

把点 D' 坐标代入可得 $3 = -2 + 8 - m$,

$$\therefore m = 3.$$

$$\textcircled{2} \text{ 由 } \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = -2x^2 + 8x - m \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得到 } 2x^2 - 9x + 4 + m = 0,$$

当抛物线与直线 AE 有两个交点时, $\Delta > 0$,

$$\therefore 9^2 - 4 \times 2 \times (4 + m) > 0,$$

$$\therefore m < \frac{49}{8},$$

$$\textcircled{3} x = m \text{ 时, } -m + 4 = -2m^2 + 8m - m, \text{ 解得 } m = 2 + \sqrt{2} \text{ 或 } 2 - \sqrt{2} (\text{舍去}),$$

综上所述, 当 $2 + \sqrt{2} \leq m < \frac{49}{8}$ 时, 抛物线 M_2 与直线 AE 有两个交点.

【解析】(1)如图1中, 作 $DH \perp OA$ 于 H . 则四边形 $CDHO$ 是矩形. 在 $Rt \triangle ADH$ 中, 解直角三角形, 求出点 D 坐标, 利用待定系数法即可解决问题;

(2)如图 1-1 中, 设 $P(2,m)$. 由 $\angle CPA = 90^\circ$, 可得 $PC^2 + PA^2 = AC^2$, 可得 $2^2 + (m-6)^2 + 2^2 + m^2 = 4^2 + 6^2$, 解方程即可;

(3)①求出 D' 的坐标; ②构建方程组, 利用判别式 $\Delta > 0$, 求出抛物线与直线 AE 有两个交点时的 m 的范围;

③求出 $x = m$ 时, 求出平移后的抛物线与直线 AE 的交点的横坐标; 结合上述的结论即可判断.

本题考查二次函数综合题、一次函数的应用、解直角三角形、锐角三角函数、勾股定理等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 学会构建方程组, 利用判别式解决问题, 属于中考压轴题.