

济南市章丘区 2020 年初中学业水平考试

数学模拟试题五

参考答案

1. D

【解析】

【详解】

试题分析：两个数相乘积为 1,则这两个数互为倒数.  $\therefore -\frac{1}{3}$  的倒数是-3,

-3 的绝对值为 3, 故选: D

考点: 倒数

2. C

【解析】

【分析】

根据从左边看得到的图形是左视图, 从左边看, 共 2 列, 均有 2 个正方形, 从而确定答案.

【详解】

从左面看该几何体共有两列, 每一列均有两个正方形,

故选 C.

【点睛】

本题考查由三视图判断几何体, 简单组合体的三视图.

3. A

【解析】

试题分析: 根据科学记数法的概念— $a \times 10^n$ , 确定出 a 为 3, n 为 7, 所以用科学记数法表示为  $3 \times 10^7$ .

故选 A

点睛: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式, 其中  $1 \leq |a| < 10$ , n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. C

【解析】

试题分析: 根据轴对称图形与中心对称图形的概念可判断出只有 C 选项符合要求. 故选 C.

考点: 1. 中心对称图形; 2. 轴对称图形.

5. C

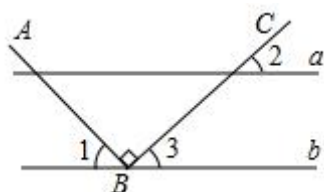
【解析】

【分析】

由垂线的性质可得 $\angle ABC=90^\circ$ ，所以 $\angle 3=180^\circ - 90^\circ - \angle 1=35^\circ$ ，再由平行线的性质可得到 $\angle 2$ 的度数.

【详解】

解：



由垂线的性质可得 $\angle ABC=90^\circ$ ,

所以 $\angle 3=180^\circ - 90^\circ - \angle 1=35^\circ$ ,

又 $\because a \parallel b$ ,

所以 $\angle 2=\angle 3=35^\circ$ .

故选 C.

【点睛】

本题主要考查了平行线的性质.

6. D

【解析】

分析：

根据表示数  $a$ 、 $b$  的点在数轴上的位置结合绝对值的意义和有理数的加减法法则进行分析判断即可.

详解：

由表示数  $a$ 、 $b$  的点在数轴上的位置可知： $a < 0 < b$ ，且 $|a| < |b|$ ，

$\therefore a+b > 0$ ， $b-a > 0$ ， $|a-b| > 0$ ， $|a|-|b| < 0$ ，

$\therefore$ 上述各式中，值一定为负的是 $|a|-|b|$ .

故选 D.

点睛：本题的解题要点有两点：（1）能够从数轴上获取到信息： $a < 0 < b$ ，且 $|a| < |b|$ ；（2）

熟记有理数加减法的法则.

7. D

【解析】

【分析】

把  $y=0$  代入所给的方程  $(m-1)y^2+my+4m^2-4=0$ , 求出  $m$  的值即可.

【详解】

把  $y=0$  代入  $(m-1)y^2+my+4m^2-4=0$  得:

$4m^2-4=0$ , 即  $m^2-1=0$

解得:  $m_1=1$ ,  $m_2=-1$

当  $m=1$  时, 关于  $y$  的方程由于二次项系数为 0, 不是一元二次方程,

所以  $m=-1$ .

故选 D.

【点睛】

本题考查了一元二次方程的定义和一元二次方程的解法, 难度不大. 本题易错, 容易出现求出  $m$  就作答, 忽略需满足方程是一元二次方程的条件.

8. D

【解析】

【分析】

根据已知条件“点  $(k, b)$  为第二象限内的点”推知  $k$ 、 $b$  的符号, 由它们的符号可以得到一次函数  $y=-kx+b$  的图象所经过的象限.

【详解】

解:  $\because$  点  $(k, b)$  为第二象限内的点,

$\therefore k < 0$ ,  $b > 0$ ,

$\therefore -k > 0$ .

$\therefore$  一次函数  $y=-kx+b$  的图象经过第一、二、三象限, 观察选项, D 选项符合题意.

故选: D.

【点睛】

本题主要考查一次函数图象在坐标平面内的位置与  $k$ 、 $b$  的关系. 解答本题注意理解: 直线  $y=kx+b$  所在的位置与  $k$ 、 $b$  的符号有直接的关系.  $k > 0$  时, 直线必经过一、三象限;  $k < 0$  时, 直线必经过二、四象限;  $b > 0$  时, 直线与  $y$  轴正半轴相交;  $b=0$  时, 直线过原点;  $b < 0$

时，直线与 y 轴负半轴相交.

9. B

【解析】

分析：根据中位线的概念求出中位数，利用算术平均数的计算公式求出平均数.

详解：把这组数据排列顺序得：35 38 40 42 44 45 45 47，则这组数据的中位数为：

$$\frac{42+44}{2}=43, \quad \bar{x}=\frac{1}{8}(35+38+42+44+40+47+45+45)=42.$$

故选 B.

点睛：本题考查的是中位数的确定、算术平均数的计算，掌握中位数的概念、算术平均数的计算公式是解题的关键。

10. D

【解析】

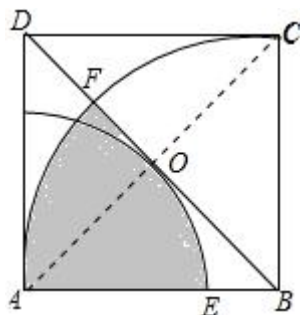
【分析】

连接 AC 交 BD 于 O，由正方形的性质得出  $OA=OB=\frac{1}{2}BD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $\angle BAD=90^\circ$ ,  $AB=AD=2$ ,

$\angle BAO=\angle ABF=45^\circ$ ，由勾股定理求出 BD，得出  $OA=OB=\sqrt{2}$ ，求出  $\triangle AOB$  的面积、扇形 AOE 的面积、扇形 ABF 的面积，即可得出图中阴影部分的面积.

【详解】

连接 AC 交 BD 于 O，如图所示：



$\because$  四边形 ABCD 是正方形，

$\therefore OA=OB=\frac{1}{2}BD$ ,  $AC \perp BD$ ,  $\angle BAD=90^\circ$ ,  $AB=AD=2$ ,  $\angle BAO=\angle ABF=45^\circ$ ,

$\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ ,

$\therefore OA=OB=\sqrt{2}$ ,

$\therefore \triangle AOB$  的面积  $=\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}=1$ ,

∵以正方形 ABCD 的顶点 A 为圆心的弧恰好与对角线 BD 相切，AC⊥BD，

∴O 为切点，

∴扇形 AOE 的面积 =  $\frac{45\pi \times (\sqrt{2})^2}{360} = \frac{\pi}{4}$ ，扇形 ABF 的面积 =  $\frac{45\pi \times 2^2}{360} = \frac{\pi}{2}$ ，

∴图中阴影部分的面积 =  $\frac{\pi}{2} - (1 - \frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4} - 1$ 。

故选 D。

【点睛】

本题考查了切线的性质、正方形的性质、勾股定理、扇形面积的计算；熟练掌握切线的性质和正方形的性质，求出扇形的面积是解决问题的关键。

11. C

【解析】

【详解】

试题分析：仿照张华的推导，在面积是 9 的矩形中设矩形的一边长为 x，则另一边长是  $\frac{9}{x}$ ，

矩形的周长是  $2(x + \frac{9}{x})$ ；当矩形成为正方形时，就有  $x = \frac{9}{x}$  ( $x > 0$ )，解得  $x = 3$ ，这时矩形的

周长  $2(x + \frac{9}{x}) = 12$  最小，因此  $\frac{x^2 + 9}{x} = x + \frac{9}{x}$  ( $x > 0$ ) 的最小值是 6。故选 C。

考点：1.阅读理解型问题；2.转换思想的应用。

12. A

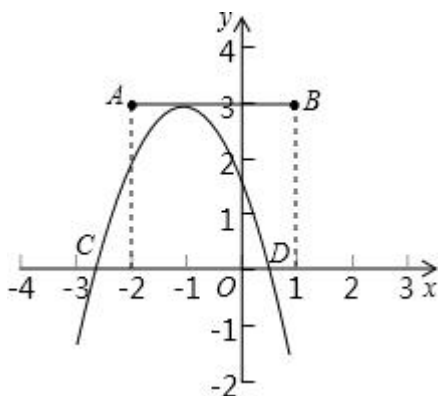
【解析】

∵点 A, B 的坐标分别为(-2,3)和(1,3)，

∴线段 AB 与 y 轴的交点坐标为(0,3)，

又∵抛物线的顶点在线段 AB 上运动，抛物线与 y 轴的交点坐标为(0,c)，

∴ $c \leq 3$ ，(顶点在 y 轴上时取“=”)，故①错误；



∵抛物线的顶点在线段  $AB$  上运动,

∴当  $x < -2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大,

因此, 当  $x < -3$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 故②正确;

若点  $D$  的横坐标最大值为 5, 则此时对称轴为直线  $x=1$ ,

根据二次函数的对称性, 点  $C$  的横坐标最小值为  $-2-4=-6$ , 故③错误;

根据顶点坐标公式,  $\frac{4ac-b^2}{4a}=3$ ,

令  $y=0$ , 则  $ax^2+bx+c=0$ ,

$$CD^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \times \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2},$$

根据顶点坐标公式,  $\frac{4ac-b^2}{4a}=3$ ,

$$\therefore \frac{b^2 - 4ac}{a} = -12,$$

$$\therefore CD^2 = \frac{1}{a} \times (-12) = \frac{12}{-a},$$

∵四边形  $ACDB$  为平行四边形,

$$\therefore CD = AB = 1 - (-2) = 3,$$

$$\therefore \frac{12}{-a} = 3^2 = 9,$$

解得  $a = -\frac{4}{3}$ , 故④正确;

综上所述, 正确的结论有②④.

故选 A.

13.  $2a(2a+1)$

【解析】

试题分析: 原式提取公因式即可得到结果. 原式  $= 2a(2a+1)$

考点: 因式分解-提公因式法.

14. 15

【解析】

【详解】

试题分析: 设小球共有  $x$  个, 则  $\frac{3}{x} = \frac{1}{5}$ , 解得:  $x=15$

考点: 概率的计算

15.  $108^\circ$

【解析】

【分析】

设这个多边形顶点边数为  $n$ ，根据多边形内角和公式可求出  $n$  值，根据每个内角都相等即可得答案.

【详解】

设这个多边形顶点边数为  $n$ ,

$\because$  这个多边形的内角和是  $540^\circ$ ,

$$\therefore (n-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ,$$

解得:  $n=5$ ,

$\because$  这个多边形的各个内角都相等,

$$540^\circ \div 5 = 108^\circ,$$

故答案为:  $108^\circ$

【点睛】

本题考查多边形内角和, 熟练掌握多边形内角和公式是解题关键. 16. 9

【分析】

根据题意列出方程  $\frac{1}{x-2} = \frac{3}{2x+3}$ , 求出方程的解即可得到  $x$  的值. 由于列出的方程是分式方程, 所以求出  $x$  的值后要检验.

【详解】

解: 根据题意得:

$$\frac{1}{x-2} = \frac{3}{2x+3},$$

去分母得:  $2x+3=3x-6$ ,

解得:  $x=9$ ,

经检验  $x=9$  是分式方程的解,

故答案为 9

【点睛】

本题考查了分式方程的解法, 其基本思路是把方程的两边都乘以各分母的最简公分母, 化为整式方程求解, 求出  $x$  的值后不要忘记检验.

17.  $4\sqrt{3}-4$

【解析】

【分析】

分析:利用特殊三角函数值,解直角三角形, $AM=MD$ ,再用正切函数,利用  $MB$  求  $CM$ ,作差可求  $DC$ .

【详解】

因为  $\angle MAD=45^\circ$ ,  $AM=4$ ,所以  $MD=4$ ,

因为  $AB=8$ , 所以  $MB=12$ ,

因为  $\angle MBC=30^\circ$ , 所以  $CM=MB\tan 30^\circ=4\sqrt{3}$ .

所以  $CD=4\sqrt{3}-4$ .

【点睛】

本题考查了解直角三角形的应用,熟练掌握三角函数的相关定义以及变形是解题的关键.

18. ①②③.

【解析】

【分析】

①解法一:如图 1,作辅助线,构建三角形全等和平行四边形,证明  $\triangle BFG \cong \triangle EFP(SAS)$ ,得  $BG=PE$ ,再证明四边形  $ABGP$  是平行四边形,可得结论;

解法二:如图 2,连接  $AE$ ,利用四点共圆证明  $\triangle APE$  是等腰直角三角形,可得结论;

②如图 3,作辅助线,证明四边形  $DCGP$  是平行四边形,可得结论;

③证明四边形  $OCGF$  是矩形,可作判断;

④证明  $\triangle AOP \cong \triangle PFE(AAS)$ , 则  $S_{\triangle AOP} = S_{\triangle PEF}$ , 可作判断.

【详解】

①解法一:如图 1,在  $EF$  上取一点  $G$ ,使  $FG=FP$ ,连接  $BG$ 、 $PG$ ,



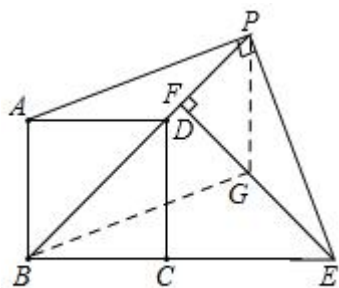


图1

$\because EF \perp BP$ ,

$\therefore \angle BFE = 90^\circ$ ,

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$\therefore \angle FBC = \angle ABD = 45^\circ$ ,

$\therefore BF = EF$ ,

在  $\triangle BFG$  和  $\triangle EFP$  中,

$$\because \begin{cases} BF = EF \\ \angle BFG = \angle EFP \\ FG = FP \end{cases},$$

$\therefore \triangle BFG \cong \triangle EFP$  (SAS),

$\therefore BG = PE$ ,  $\angle PEF = \angle GBF$ ,

$\because \angle ABD = \angle FPG = 45^\circ$ ,

$\therefore AB \parallel PG$ ,

$\because AP \perp PE$ ,

$\therefore \angle APE = \angle APF + \angle FPE = \angle FPE + \angle PEF = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle APF = \angle PEF = \angle GBF$ ,

$\therefore AP \parallel BG$ ,

$\therefore$  四边形  $ABGP$  是平行四边形,

$\therefore AP = BG$ ,

$\therefore AP = PE$ ;

解法二: 如图 2, 连接  $AE$ ,  $\because \angle ABC = \angle APE = 90^\circ$ ,

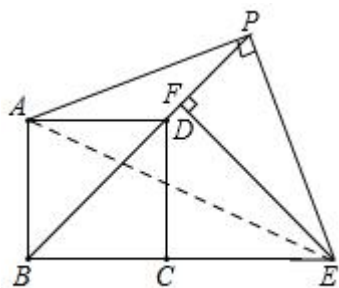


图2

$\therefore A、B、E、P$  四点共圆，

$\therefore \angle EAP = \angle PBC = 45^\circ$ ，

$\because AP \perp PE$ ，

$\therefore \angle APE = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle APE$  是等腰直角三角形，

$\therefore AP = PE$ ，

故①正确；

②如图 3，连接  $CG$ ，由①知： $PG \parallel AB$ ， $PG = AB$ ，

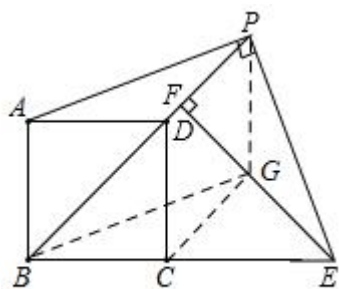


图3

$\because AB = CD$ ， $AB \parallel CD$ ，

$\therefore PG \parallel CD$ ， $PG = CD$ ，

$\therefore$  四边形  $DCGP$  是平行四边形，

$\therefore CG = PD$ ， $CG \parallel PD$ ，

$\because PD \perp EF$ ，

$\therefore CG \perp EF$ ，即  $\angle CGE = 90^\circ$ ，

$\because \angle CEG = 45^\circ$ ，

$\therefore CE = \sqrt{2}CG = \sqrt{2}PD$ ；

故②正确；

③如图 4，连接  $AC$  交  $BD$  于  $O$ ，由②知：  $\angle CGF = \angle GFD = 90^\circ$ ，

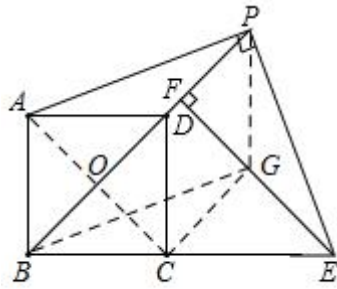


图4

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形，

$\therefore AC \perp BD$ ，

$\therefore \angle COF = 90^\circ$ ，

$\therefore$  四边形  $OCGF$  是矩形，

$\therefore CG = OF = PD$ ，

$\therefore \frac{1}{2}BD = OB = BF - OF = BF - PD$ ，

故③正确；

④如图 4 中，在  $\triangle AOP$  和  $\triangle PFE$  中，

$$\therefore \begin{cases} \angle AOP = \angle EFP = 90^\circ \\ \angle APF = \angle PEF \\ AP = PE \end{cases},$$

$\therefore \triangle AOP \cong \triangle PFE$  (AAS)，

$\therefore S_{\triangle AOP} = S_{\triangle PEF}$ ，

$\therefore S_{\triangle ADP} < S_{\triangle AOP} = S_{\triangle PEF}$ ，

故④不正确；

本题结论正确的有：①②③，

故答案为：①②③.

### 【点睛】

此题属于四边形综合题，涉及的知识有：全等三角形的判定与性质，正方形的性质，平行四边形和矩形的判定和性质，勾股定理，以及等腰直角三角形的性质，熟练掌握判定与性质是解本题的关键.

19. -3.

**【解析】**

分析：根据零指数幂，特殊角的三角函数值，二次根式化简，负整数指数幂一一化简计算即可得出答案.

$$\begin{aligned}\text{详解：原式} &= 1 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3} - 4, \\ &= 1 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 4, \\ &= -3.\end{aligned}$$

点睛：此题主要考查了实数运算，正确把握相关性质是解题关键.

20.  $-2 < x \leq \frac{1}{3}$ ，见解析，非负整数解为：0.

**【解析】**

**【分析】**

先求出两个不等式的解集，再求其公共解，然后找出整数值即可.

**【详解】**

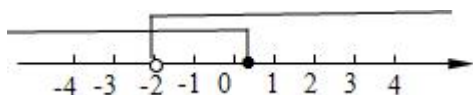
$$\begin{cases} 3(x+1) < 5x+1 & \text{①} \\ \frac{x-1}{2} \geq 2x-1 & \text{②} \end{cases}$$

解不等式①得：  $x > -2$ ；

解不等式②得  $x \leq \frac{1}{3}$ ；

所以，不等式组的解集是  $-2 < x \leq \frac{1}{3}$ ，

将解集表示在数轴上：



所以非负整数解为：0.

**【点睛】**

本题主要考查了一元一次不等式组解集的求法，其简便求法就是用口诀求解. 求不等式组解集的口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）.

21. (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

试题分析：（1）根据平行四边形的性质，可得  $AB$  与  $CD$  的关系，根据平行四边形的判定，可得  $BFDE$  是平行四边形，再根据矩形的判定，可得答案；

（2）根据平行线的性质，可得  $\angle DFA = \angle FAB$ ，根据等腰三角形的判定与性质，可得  $\angle DAF = \angle DFA$ ，根据角平分线的判定，可得答案．

试题分析：（1）证明： $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，

$\therefore AB \parallel CD$ ．

$\because BE \parallel DF$ ， $BE = DF$ ，

$\therefore$  四边形  $BFDE$  是平行四边形．

$\because DE \perp AB$ ，

$\therefore \angle DEB = 90^\circ$ ，

$\therefore$  四边形  $BFDE$  是矩形；

（2） $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，

$\therefore AB \parallel DC$ ，

$\therefore \angle DFA = \angle FAB$ ．

在  $Rt\triangle BCF$  中，由勾股定理，得

$$BC = \sqrt{FC^2 + FB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\therefore AD = BC = DF = 5$ ，

$\therefore \angle DAF = \angle DFA$ ，

$\therefore \angle DAF = \angle FAB$ ，

即  $AF$  平分  $\angle DAB$ ．

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，利用了平行四边形的性质，矩形的判定，等腰三角形的判定与性质，利用等腰三角形的判定与性质得出  $\angle DAF = \angle DFA$  是解题关键．

22. （1）A 种型号电风扇的销售单价为 240 元、B 种型号电风扇的销售单价为 200 元；（2）超市最多采购 A 种型号电风扇 10 台时，采购金额不多于 5100 元．

【解析】

试题分析：（1）设 A 种型号电风扇的销售单价为  $x$  元、B 种型号电风扇的销售单价为  $y$  元，根据 3 台 A 型号 5 台 B 型号的电扇收入 1720 元，4 台 A 型号 10 台 B 型号的电扇收入 2960

元，列方程组求解；

(2) 设采购 A 种型号电风扇 a 台，则采购 B 种型号电风扇 (30-a) 台，根据金额不多于 5100 元，列不等式求解。

【解答】解：(1) 设 A 种型号电风扇的销售单价为 x 元、B 种型号电风扇的销售单价为 y 元，

依题意得：

$$\begin{cases} 3x+5y=1720 \\ 4x+10y=2960 \end{cases},$$

解得：

$$\begin{cases} x=240 \\ y=200 \end{cases}.$$

答：A 种型号电风扇的销售单价为 240 元、B 种型号电风扇的销售单价为 200 元；

(2) 设采购 A 种型号电风扇 a 台，则采购 B 种型号电风扇 (30-a) 台。

依题意得：190a+160(30-a) ≤ 5100，

解得：a ≤ 10。

答：超市最多采购 A 种型号电风扇 10 台时，采购金额不多于 5100 元。

【点睛】本题考查了二元一次方程组 and 一元一次不等式的应用，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系和不等关系，列方程组和不等式求解。

23. (1)  $52^\circ$ ；(2)  $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】

(1) 根据垂径定理得到  $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ ，根据圆周角定理解答；

(2) 根据圆周角定理得到  $\angle C = 90^\circ$ ，根据等腰三角形的性质得到  $\angle A = \angle AEC = 30^\circ$ ，根据余弦的定义求出 AE 即可。

【详解】

(1) 连接 OC。

$\because OC \perp AB,$

$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC},$

$\therefore \angle AOC = \angle BOC,$

$$\therefore \angle AOC = 52^\circ.$$

$$\therefore \angle EBA = 90^\circ,$$

$$\therefore OC \parallel BE,$$

$$\because OC = OE ,$$

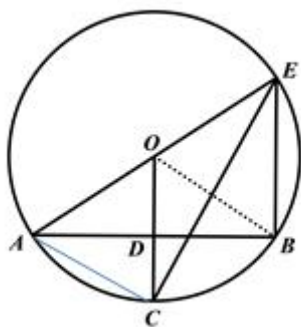
$$\because \angle CEA = \angle A,$$

$\because EC=6$ ，连接 AC

$$\therefore \angle ECA = 90^\circ,$$

解得  $AE=4\sqrt{3}$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 2\sqrt{3}.$$



本题考查圆周角定理，垂径定理，圆心角，弧，弦之间的关系及锐角三角函数等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

24. (1) 12; (2) 补图见解析; (3) 0.44; (4)  $\frac{1}{3}$

【解析】

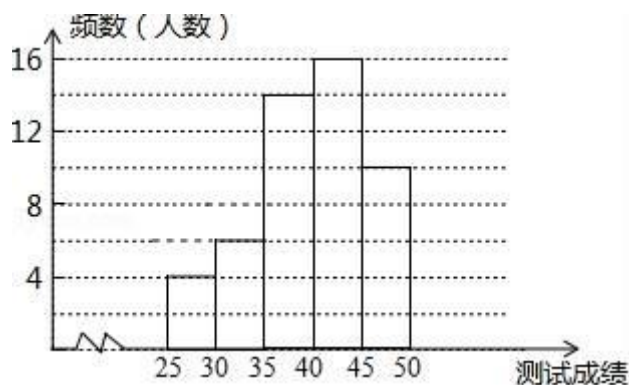
【分析】

- 1、仔细阅读题目，从频数分布直方图和频数分布表中你能得到哪些信息？
- 2、用总人数减去第 1、2、3、5 组的人数，即可求出 a 的值，进而补全统计图；
- 3、用成绩不低于 40 分的频数除以总数，即可得出本次测试的优秀率；
- 4、用 A 表示小宇，B 表示小强，C、D 表示其他两名同学，画出树状图，再根据概率公式列式计算即可.

【详解】

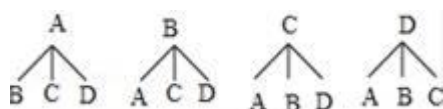
解：(1)  $a = 50 - 4 - 6 - 14 - 10 = 16$ .

(2) 频数分布直方图如图所示：



(3) 优秀率  $= \frac{16+10}{50} \times 100\% = 52\%$ .

(4) 用 A 表示小宇、B 表示小强，C、D 表示其他两名同学，  
根据题意画树状图如下：



从上图可知共有 12 种等可能情况，小宇与小强两名男同学分在同一组的情况有 4 种，

则小宇与小强两名男同学分在同一组的概率是  $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .

【点睛】

本题主要考查的是频数分布直方图和利用树状图求概率.利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图.



就本题（4）而言，就是首先列举出所有的情况，接下来利用找出满足条件的情况数，然后利用概率公式进行计算即可完成解答。

25. (1) 3; (2) 证明见解析; (3)  $P$  点坐标为  $(1, -3\sqrt{2} - 3)$ 。

【解析】

【分析】

(1) 由点  $B$  的坐标，利用反比例函数图象上点的坐标特征可求出  $k$  值；

(2) 设  $A$  点坐标为  $(a, \frac{3}{a})$ ，则  $D$  点坐标为  $(0, \frac{3}{a})$ ， $P$  点坐标为  $(1, \frac{3}{a})$ ， $C$  点坐标为  $(1, 0)$ ，

进而可得出  $PB, PC, PA, PD$  的长度，由四条线段的长度可得出  $\frac{PC}{PB} = \frac{PD}{PA}$ ，结合  $\angle P = \angle P$  可得出  $\triangle PDC \sim \triangle PAB$ ，由相似三角形的性质可得出  $\angle CDP = \angle A$ ，再利用“同位角相等，两直线平行”可证出  $CD \parallel AB$ ；

(3) 由四边形  $ABCD$  的面积和  $\triangle PCD$  的面积相等可得出  $S_{\triangle PAB} = 2S_{\triangle PCD}$ ，利用三角形的面积公式可得出关于  $a$  的方程，解之取其负值，再将其代入  $P$  点的坐标中即可求出结论。

【详解】

(1) 解：  $\because B$  点  $(1, 3)$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  的图象，

$$\therefore k = 1 \times 3 = 3.$$

故答案为：3.

(2) 证明：  $\because$  反比例函数解析式为  $y = \frac{3}{x}$ ，

$\therefore$  设  $A$  点坐标为  $(a, \frac{3}{a})$ 。

$\because PB \perp x$  轴于点  $C$ ， $PA \perp y$  轴于点  $D$ ，

$\therefore D$  点坐标为  $(0, \frac{3}{a})$ ， $P$  点坐标为  $(1, \frac{3}{a})$ ， $C$  点坐标为  $(1, 0)$ ，

$$\therefore PB = 3 - \frac{3}{a}, PC = -\frac{3}{a}, PA = 1 - a, PD = 1,$$

$$\therefore \frac{PC}{PB} = \frac{-\frac{3}{a}}{3 - \frac{3}{a}} = \frac{1}{1 - a}, \frac{PD}{PA} = \frac{1}{1 - a},$$



(2) 根据题意画出图形, 猜想:  $BE=DE$ , 取  $AB$  的中点  $F$ , 连接  $EF$ , 由  $\angle ACB=90^\circ$ ,

$\angle ABC=30^\circ$ , 可知  $\angle 1=60^\circ$ ,  $CF=AF=\frac{1}{2}AB$ , 故  $\triangle ACF$  是等边三角形, 再由  $\triangle ADE$  是等

边三角形可得出  $\angle CAD=\angle FAE$ , 由全等三角形的判定定理可知  $\triangle ACD\cong\triangle AFE$ , 故  $\angle ACD=\angle AFE=90^\circ$ . 由  $F$  是  $AB$  的中点, 可知  $EF$  是  $AB$  的垂直平分线, 进而可得出  $BE=AE$ , 结合  $DE=AE$  可得  $BE=DE$ ;

(3) 分三种情况讨论: ①当  $AP=AB$  时, ②当  $BP=AB$  时, ③当  $AP=BP$  时, 根据等腰三角形的性质以及三角形内角和定理分别计算即可.

【详解】

解: (1) 如图 2,

$\because \angle C=90^\circ, \angle ABC=30^\circ,$

$\therefore \angle BAC=60^\circ,$

$\because \triangle ADE$  是等边三角形,

$\therefore AE=CE,$

$\therefore$  点  $E$  落在  $AB$  的中点处;

$\therefore AE=CE=BE=DE,$

故答案为:  $60^\circ$ ;  $AB$  的中点处;  $BE=DE$ ;

(2)  $BE=DE$  依然成立.

证明: 如图 3. 取  $AB$  的中点  $F$ , 连接  $EF$ .

$\because \angle ACB=90^\circ, \angle ABC=30^\circ,$

$\therefore \angle 1=60^\circ, CF=AF=\frac{1}{2}AB,$

$\therefore \triangle ACF$  是等边三角形.

$\therefore AC=AF$ ①,

$\because \triangle ADE$  是等边三角形,

$\therefore \angle 2=60^\circ, AD=AE$ ②,

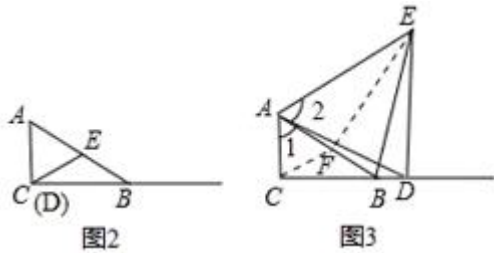
$\therefore \angle 1=\angle 2.$

$\therefore \angle 1+\angle BAD=\angle 2+\angle BAD$ , 即  $\angle CAD=\angle FAE$ ③

由①②③得  $\triangle ACD\cong\triangle AFE$  (SAS).

$\therefore \angle ACD=\angle AFE=90^\circ.$

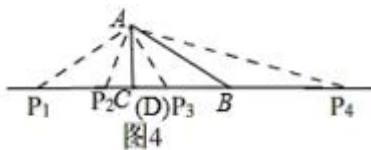
$\because F$  是  $AB$  的中点,  
 $\therefore EF$  是  $AB$  的垂直平分线,  
 $\therefore BE=AE$ ,  
 $\because \triangle ADE$  是等边三角形,  
 $\therefore DE=AE$ ,  
 $\therefore BE=DE$ ;



(3) 如图 4,

$\because \triangle PAB$  为等腰三角形,  
 $\therefore$  ①当  $AP=AB$  时, 即:  $AP_1=AB$ ,  
 $\therefore \angle AP_1B = \angle ABP_1 = 30^\circ$ ;  
 ②当  $BP=AB$  时,  
 I、 $BP_2=AB$ ,  
 $\therefore \angle AP_2B = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ABC) = 75^\circ$ ,  
 II、 $BP_4=AB$ ,  
 $\therefore \angle BAP_4 = \angle AP_4B$ ,  
 $\because \angle ABC = 30^\circ = \angle BAP_4 + \angle AP_4B$ ,  
 $\therefore \angle AP_4B = 15^\circ$ ;  
 ③当  $AP=BP$  时, 即:  $AP_3=BP_3$ ,  
 $\therefore \angle BAP_3 = \angle ABC = 30^\circ$ ,  
 $\therefore \angle AP_3B = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAP_3 = 120^\circ$ ,

综上所述, 若  $\triangle PAB$  为等腰三角形,  $\angle APB$  的度数为  $15^\circ$  或  $30^\circ$  或  $75^\circ$  或  $120^\circ$ .



【点睛】

本题是三角形综合题，主要考查的是等边三角形的性质，等腰三角形的性质、直角三角形的性质、全等三角形的判定与性质，根据题意画出图形，利用数形结合求解是解答此题的关键。

27. 【答案】(1)  $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ;  $(-2, 2\sqrt{3})$ ;  $(1, 0)$ ;

(2) N 点的坐标为  $(0, 2\sqrt{3}-3)$ ,  $(0, 2\sqrt{3}+3)$ ;

(3) E  $(-1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ 、F  $(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$  或 E  $(-1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ , F  $(-4, \frac{10\sqrt{3}}{3})$

【解析】

【分析】

(1) 由抛物线的“衍生直线”知道二次函数解析式的 a 即可；(2) 过 A 作  $AD \perp y$  轴于点 D，则可知  $AN=AC$ ，结合 A 点坐标，则可求出 ON 的长，可求出 N 点的坐标；(3) 分别讨论当 AC 为平行四边形的边时，当 AC 为平行四边形的对角线时，求出满足条件的 E、F 坐标即可

【详解】

(1)  $\because y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$ ,  $a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 则抛物线的“衍生直线”的解析式为

$$y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

联立两解析式求交点  $\begin{cases} y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3} \\ y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2\sqrt{3} \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ,

$\therefore A(-2, 2\sqrt{3})$ ,  $B(1, 0)$ ;

(2) 如图 1，过 A 作  $AD \perp y$  轴于点 D，

在  $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$  中，令  $y=0$  可求得  $x=-3$  或  $x=1$ ,

$\therefore C(-3, 0)$ , 且  $A(-2, 2\sqrt{3})$ ,

$$\therefore AC = \sqrt{(-2+3)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{13}$$



∴当 F 点的横坐标为 0 时，则  $F(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ ，此时点 E 在直线 AB 下方，

∴E 到 y 轴的距离为  $EH-OF=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，即 E 的纵坐标为  $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

∴  $E(-1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ ；

当 F 点的横坐标为 -2 时，则 F 与 A 重合，不合题意，舍去；

②当 AC 为平行四边形的对角线时，

∵  $C(-3,0)$ ，且  $A(-2, 2\sqrt{3})$ ，

∴线段 AC 的中点坐标为  $(-2.5, \sqrt{3})$ ，

设  $E(-1, t)$ ， $F(x, y)$ ，

则  $x-1=2 \times (-2.5)$ ， $y+t=2\sqrt{3}$ ，

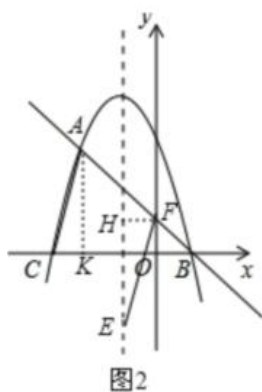
∴  $x=-4$ ， $y=2\sqrt{3}-t$ ，

$2\sqrt{3}-t=-\frac{2\sqrt{3}}{3} \times (-4) + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，解得  $t=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ，

∴  $E(-1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ ， $F(-4, \frac{10\sqrt{3}}{3})$ ；

综上所述存在满足条件的点 F，此时  $E(-1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ 、 $(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$  或  $E(-1, -\frac{4\sqrt{3}}{3})$ ，F

$(-4, \frac{10\sqrt{3}}{3})$



【点睛】

本题是对二次函数的综合知识考查，熟练掌握二次函数，几何图形及辅助线方法是解决本题的关键，属于压轴题