

数学试卷

2020.6

学校 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 教育 ID 号 _____

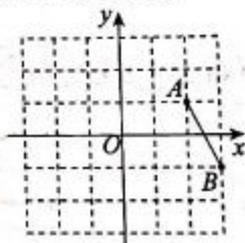
考生须知

1. 本试卷共 8 页,共三道大题,28 道小题,满分 100 分,考试时间 120 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校、班级、姓名和教育 ID 号。
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。
4. 在答题卡上,选择题、作图题用 2B 铅笔作答,其他试题用黑色字迹签字笔作答。
5. 考试结束,将本试卷、答案卡和草稿纸一并交回。

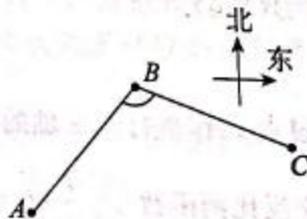
一、选择题(本题共 16 分,每小题 2 分)

第 1—8 题均有四个选项,符合题意的选项只有一个。

1. 在实数 $|-3.14|$, -3 , $-\sqrt{3}$, π 中,最小的数是
A. $-\sqrt{3}$ B. -3 C. $|-3.14|$ D. π
2. 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $A(2,1)$,点 $B(3,-1)$,平移线段 AB ,使点 A 落在点 $A_1(-2,2)$ 处,则点 B 的对应点 B_1 的坐标为



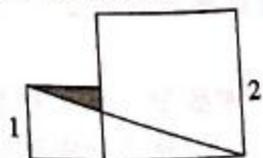
- A. $(-1,-1)$ B. $(-1,0)$ C. $(1,0)$ D. $(3,0)$
3. 判断命题“如果 $x < 1$,那么 $x^2 - 1 < 0$ ”是假命题,只需举出一个反例.反例中的 x 可以为
A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$
4. 若点 $A(1, y_1)$, $B(2, y_2)$ 在抛物线 $y = a(x+1)^2 + 2$ ($a < 0$) 上,则下列结论正确的是
A. $2 > y_1 > y_2$ B. $2 > y_2 > y_1$ C. $y_1 > y_2 > 2$ D. $y_2 > y_1 > 2$
5. 如图,小明从 A 处出发沿北偏东 40° 方向行走至 B 处,又从 B 处沿南偏东 70° 方向行走至 C 处,则 $\angle ABC$ 等于



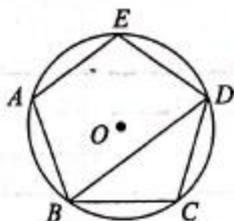
- A. 130° B. 120° C. 110° D. 100°
6. 把边长分别为 1 和 2 的两个正方形按如图的方式放置.则图中阴影部分的面积为

- A. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{5}$

- B. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{6}$



7. 如图, 正五边形 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$, 连接 BD , 则 $\angle ABD$ 的度数是



- A. 60° B. 70° C. 72° D. 144°
8. 五名学生投篮, 每人投 10 次, 统计他们每人投中的次数, 得到五个数据, 并对数据进行整理和分析, 给出如下信息:

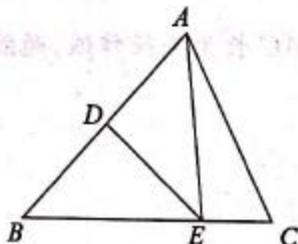
平均数	中位数	众数
m	6	7

则下列选项正确的是

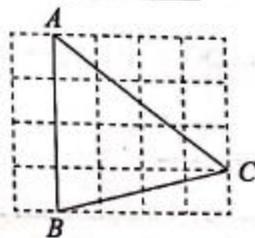
- A. 可能会有学生投中了 8 次
 B. 五个数据之和的最大值可能为 30
 C. 五个数据之和的最小值可能为 20
 D. 平均数 m 一定满足 $4.2 \leq m \leq 5.8$

二、填空题(本题共 16 分, 每小题 2 分)

9. 分解因式: $3a^3 - 6a^2 + 3a =$ _____.
10. 在“中国汉字听写大赛”选拔赛中, 甲、乙两位同学的平均分都是 90 分, 甲同学成绩的方差是 15, 乙同学成绩的方差是 3, 由此推断甲、乙两人中成绩稳定的是 _____.
11. 若点 $(a, 10)$ 在直线 $y = 3x + 1$ 上, 则 a 的值等于 _____.
12. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle ABO$ 三个顶点的坐标分别为 $A(-2, 4)$, $B(-4, 0)$, $O(0, 0)$. 以原点 O 为位似中心, 把这个三角形缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到 $\triangle CDO$, 则点 A 的对应点 C 的坐标是 _____.
13. 已知圆锥的母线长为 5 cm, 侧面积为 $15\pi \text{ cm}^2$, 则这个圆锥的底面半径为 _____ cm.
14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AB 的垂直平分线交 AB 于点 D , 交 BC 于点 E , 若 $BC = 6 \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$, 则 $\triangle ACE$ 的周长为 _____ cm.



15. 如图, 在 5×4 的正方形网格中, 每个小正方形的边长都是 1, $\triangle ABC$ 的顶点都在这些小正方形的顶点上, 则 $\sin \angle BAC$ 的值为 _____.



16. 某快餐店外卖促销, 佳佳和点点想点外卖, 每单需支付送餐费 5 元, 每种餐食外卖价格如下表:

餐食种类	价格(单位:元)
汉堡套餐	40
鸡翅	16
鸡块	15
冰激凌	14
蔬菜沙拉	9

促销活动:

- (1) 汉堡套餐 5 折优惠, 每单仅限一套;
- (2) 全部商品(包括打折套餐)满 20 元减 4 元, 满 40 元减 10 元, 满 60 元减 15 元, 满 80 元减 20 元.

佳佳想要汉堡套餐、鸡翅、冰激凌、蔬菜沙拉各一份; 点点想要汉堡套餐、鸡块、冰激凌各一份, 若他们把想要的都买全, 最少要花_____元(含送餐费).

- 三、解答题(本题共 68 分, 第 17—22 题, 每小题 5 分, 第 23—26 题, 每小题 6 分, 第 27—28 题, 每小题 7 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 下面是“作一个 45° 角”的尺规作图过程.

已知: 平面内一点 A .

求作: $\angle A$, 使得 $\angle A = 45^\circ$.

作法: 如图,

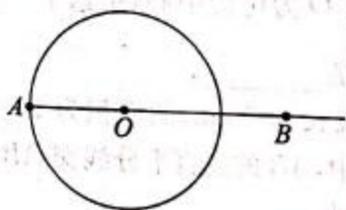
① 作射线 AB ;

② 在射线 AB 上取一点 O , 以 O 为圆心, OA 长为半径作圆, 与射线 AB 相交于点 C ;

③ 分别以 A, C 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AC$ 长为半径作弧, 两弧交于点 D , 作射线 OD 交 $\odot O$ 于点 E ;

④ 作射线 AE .

则 $\angle EAB$ 即为所求作的角.



- (1) 使用直尺和圆规, 补全图形;(保留作图痕迹)

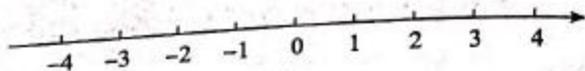
- (2) 完成下面的证明.

证明: $\because AD = CD, AO = CO,$

$$\therefore \angle AOE = \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}^\circ.$$

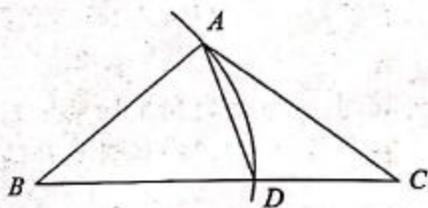
$$\therefore \angle EAB = \underline{\hspace{2cm}}^\circ. (\underline{\hspace{2cm}}) (\text{填推理的依据})$$

18. 解不等式 $\frac{x-2}{5} - \frac{x+4}{2} > -3$, 并把它的解集在数轴上表示出来.



19. 已知 $a-2b=0$, 求代数式 $1 - \left(\frac{1}{a+3b} + \frac{6b}{a^2-9b^2} \right) \div \frac{a+3b}{a^2-6ab+9b^2}$ 的值.

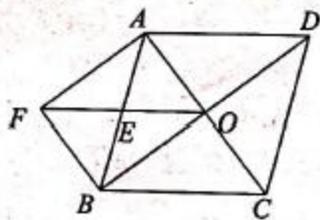
20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 以点 B 为圆心, BA 长为半径画弧, 交 BC 边于点 D , 连接 AD . 若 $\angle B=40^\circ$, $\angle C=36^\circ$, 求 $\angle DAC$ 的度数.



21. 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC, BD 相交于点 O , E 为 AB 的中点, 连接 OE 并延长到点 F , 使 $EF=EO$, 连接 AF, BF .

(1) 求证: 四边形 $AOBF$ 是矩形;

(2) 若 $AD=5$, $\sin \angle AFO = \frac{3}{5}$, 求 AC 的长.



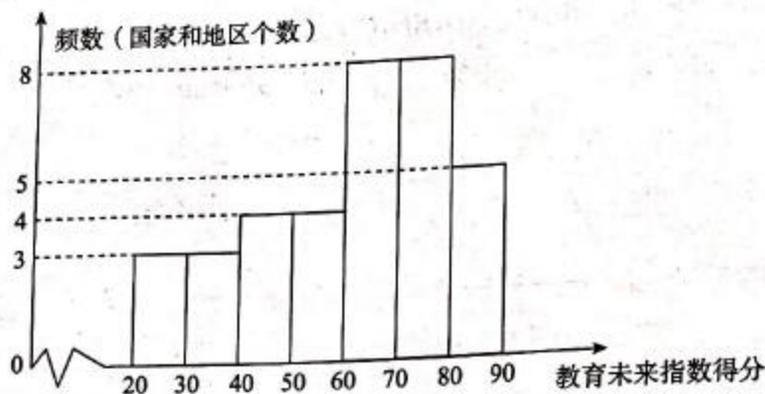
22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x > 0$) 的图象经过点 $A(1, -4)$, 直线 $y = -2x + m$ 与 x 轴交于点 $B(1, 0)$.

(1) 求 k, m 的值;

(2) 已知点 $P(n, -2n)$ ($n > 0$), 过点 P 作平行于 x 轴的直线, 交直线 $y = -2x + m$ 于点 C , 过点 P 作平行于 y 轴的直线交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x > 0$) 的图象于点 D , 当 $PD = 2PC$ 时, 结合函数的图象, 求出 n 的值.

23. 教育未来指数是为了评估教育系统在培养学生如何应对快速多变的未来社会方面所呈现的效果. 现对教育未来指数得分前 35 名的国家和地区的有关数据进行收集、整理、描述和分析后, 给出了部分信息.

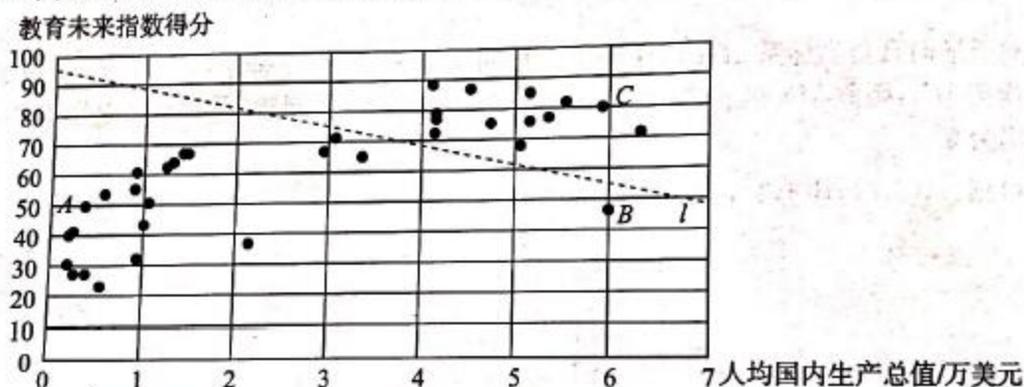
a. 教育未来指数得分的频数分布直方图(数据分成 7 组: $20 \leq x < 30$, $30 \leq x < 40$, $40 \leq x < 50$, $50 \leq x < 60$, $60 \leq x < 70$, $70 \leq x < 80$, $80 \leq x \leq 90$);



b. 教育未来指数得分在 $60 \leq x < 70$ 这一组的是:

61.2 62.8 64.6 65.2 67.2 67.3 67.5 68.5

c. 35 个国家和地区的人均国内生产总值和教育未来指数得分情况统计图如下:



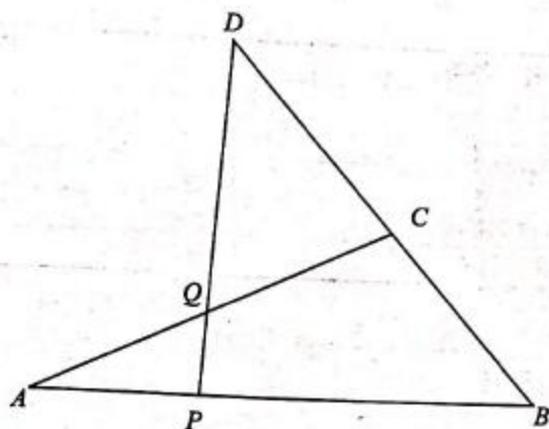
d. 中国和中国香港的教育未来指数得分分别为 32.9 和 68.5.

(以上数据来源于《国际统计年鉴(2018)》和国际在线网)

根据以上信息, 回答下列问题:

- (1) 中国香港的教育未来指数得分排名世界第 _____;
- (2) 在 35 个国家和地区的人均国内生产总值和教育未来指数得分情况统计图中, 包括中国香港在内的少数几个国家和地区所对应的点位于虚线 l 的上方, 请在图中用“○”画出代表中国香港的点;
- (3) 在教育未来指数得分比中国高的国家和地区中, 人均国内生产总值的最大值约为 _____ 万美元; (结果保留一位小数)
- (4) 下列推断合理的是 _____ . (只填序号即可)
 - ① 相较于点 A, C 所代表的国家和地区, 中国的教育未来指数得分还有一定差距, “十三五”规划提出“教育优先发展, 教育强则国家强”的任务, 进一步提高国家教育水平;
 - ② 相较于点 B, C 所代表的国家和地区, 中国的人均国内生产总值还有一定差距, 中国提出“决胜全面建成小康社会”的奋斗目标, 进一步提高人均国内生产总值.

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=6$ cm, P 是 AB 上的动点, D 是 BC 延长线上的定点, 连接 DP 交 AC 于点 Q .



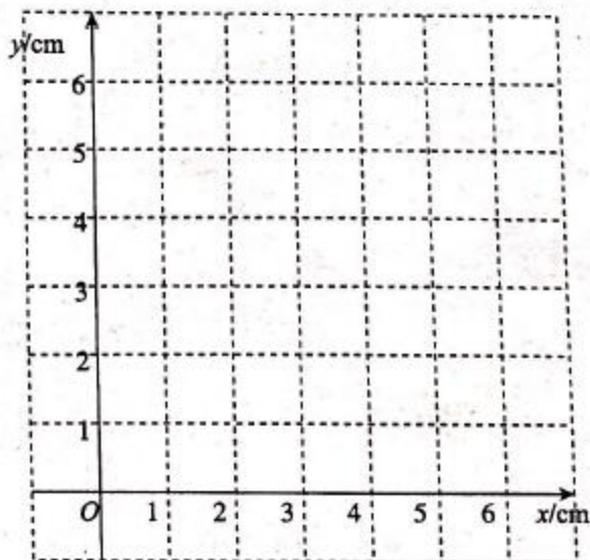
小明根据学习函数的经验, 对线段 AP, DP, DQ 的长度之间的关系进行了探究. 下面是小明的探究过程, 请补充完整:

- (1) 对于点 P 在 AB 上的不同位置, 画图、测量, 得到了线段 AP, DP, DQ 的长度 (单位: cm) 的几组值, 如下表:

	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	位置 5	位置 6	位置 7
AP	0.00	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00
DP	4.99	4.56	4.33	4.32	4.53	4.95	5.51
DQ	4.99	3.95	3.31	2.95	2.80	2.79	2.86

在 AP, DP, DQ 的长度这三个量中, 确定 _____ 的长度是自变量, _____ 的长度和 _____ 的长度都是这个自变量的函数;

- (2) 在同一平面直角坐标系 xOy 中, 画出 (1) 中所确定的函数的图象;

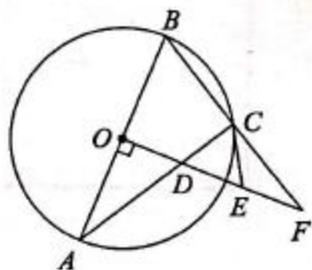


- (3) 结合函数图象, 解决问题: 当 $AP = \frac{1}{2}(DP + DQ)$ 时, AP 的长度约为 _____ cm.

25. 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AB 为直径, 过点 O 作 AB 的垂线, 交 AC 于点 D , 分别延长 BC, OD 交于点 F , 过点 C 作 $\odot O$ 的切线 CE , 交 OF 于点 E .

(1) 求证: $EC=ED$;

(2) 如果 $OA=4, EF=3$, 求弦 AC 的长.

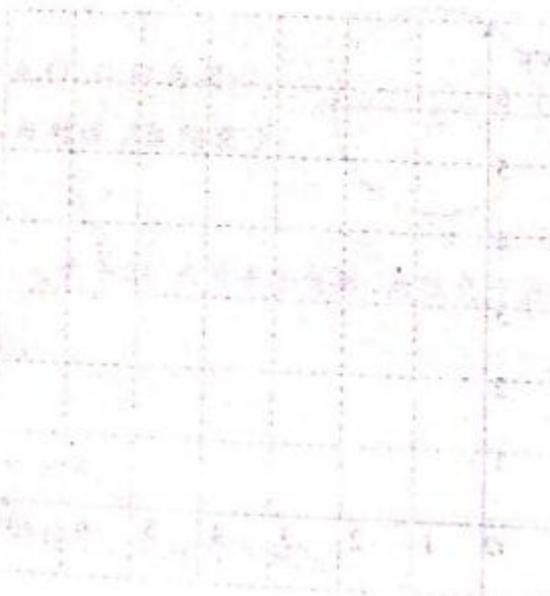


26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 的坐标为 $(0, 4)$, 点 B 的坐标为 $(6, 4)$, 抛物线 $y=x^2-5x+a-2$ 的顶点为 C .

(1) 若抛物线经过点 B 时, 求顶点 C 的坐标;

(2) 若抛物线与线段 AB 恰有一个公共点, 结合函数图象, 求 a 的取值范围;

(3) 若满足不等式 $x^2-5x+a-2 \leq 0$ 的 x 的最大值为 3, 直接写出实数 a 的值.



27. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle BAC=\alpha$, 点 D 是 $\triangle ABC$ 外一点, 点 D 与点 C 在直线 AB 的异侧, 且点 D, A, C 不共线, 连接 AD, BD, CD .

(1) 如图 1, 当 $\alpha=60^\circ$, $\angle ADB=30^\circ$ 时, 画出图形, 直接写出 AD, BD, CD 之间的数量关系;

(2) 当 $\alpha=90^\circ$, $\angle ADB=45^\circ$ 时, 利用图 2, 继续探究 AD, BD, CD 之间的数量关系并证明;

(提示: 尝试运用图形变换, 将要研究的有关线段尽可能转移到一个三角形中)

(3) 当 $\angle ADB=\frac{\alpha}{2}$ 时, 进一步探究 AD, BD, CD 之间的数量关系, 并用含 α 的等式直接表示出它们之间的关系.

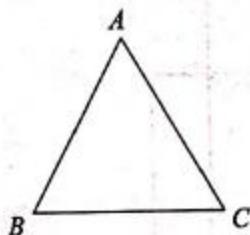


图 1

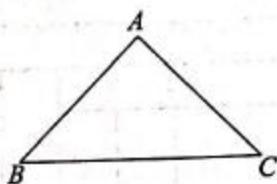
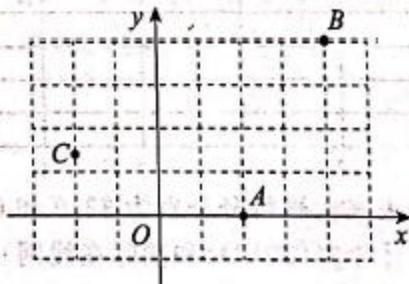


图 2

28. 对于平面直角坐标系 xOy 内任意一点 P , 过 P 点作 $PM \perp x$ 轴于点 M , $PN \perp y$ 轴于点 N , 连接 MN , 则称 MN 的长度为点 P 的垂点距离, 记为 h . 特别地, 点 P 与原点重合时, 垂点距离为 0.

(1) 点 $A(2,0), B(4,4), C(-2,\sqrt{2})$ 的垂点距离分别为 _____, _____, _____;



(2) 点 P 在以 $Q(\sqrt{3}, 1)$ 为圆心, 半径为 3 的 $\odot Q$ 上运动, 求出点 P 的垂点距离 h 的取值范围;

(3) 点 T 为直线 $l: y=\sqrt{3}x+6$ 位于第二象限内的一点, 对于点 T 的垂点距离 h 的每个值有且仅有一个点 T 与之对应, 求点 T 的横坐标 t 的取值范围.