

2020 年中考数学预测卷(一)

一、选择题(共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

1. $-\frac{2}{3}$ 的相反数是()

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{2}{3}$

2. 式子 $\sqrt{x+5}$ 在实数范围内有意义,则 x 的取值范围是()

A. $x > 5$

B. $x \geq -5$

C. $x \geq 5$

D. $x \leq -5$

3. 以下事件:①掷一枚质地均匀的骰子,“朝上一面的点数可能是 7”;②“射击运动员射击一次,刚好射中靶心”是随机事件.()

A. 只有①正确

B. 只有②正确

C. ①②都正确

D. ①②都错误

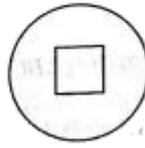
4. 下列图形中,既是中心对称图形,又是轴对称图形的是()



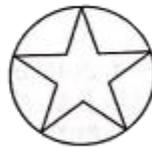
A



B

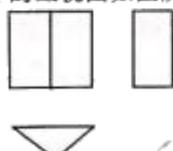


C

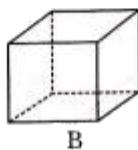


D

5. 一个几何体的三视图如图所示,则这个几何体可能是()



A



B



C



D

6. 从 $-1, -2, -3, 1, 2$ 五个数中随机选取两个不同的数,恰好都是不等式组 $\begin{cases} 2-x > 1 & \text{①} \\ \frac{x+5}{2} \geq 1 & \text{②} \end{cases}$ 的解的概率为

()

A. $\frac{3}{10}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{2}{3}$

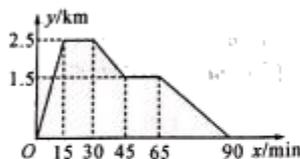
7. 已知林茂的家、体育场、文具店在同一直线上,图中的信息反映的过程是林茂从家跑步去体育场,在体育场锻炼了一阵后又走到文具店买笔,然后再走回家,图中 x 表示时间, y 表示林茂离家的距离.依据图中的信息,下列说法错误的是()

A. 体育场离林茂家 2.5 km

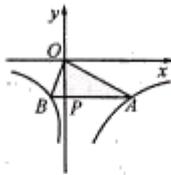
B. 体育场离文具店 1 km

C. 林茂从体育场出发到文具店的平均速度是 50 m/min

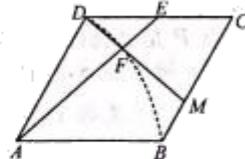
D. 林茂从文具店回家的平均速度是 60 m/min



第 7 题图



第 8 题图



第 9 题图

8. 已知函数 $y = \begin{cases} -\frac{12}{x} & (x > 0), \\ \frac{3}{x} & (x < 0) \end{cases}$ 的图象如图所示,点 P 是 y 轴负半轴上一动点,过点 P 作 y 轴的垂线交图象

于 A, B 两点,连接 OA, OB . 下列四个命题:

①若点 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ 在图象上,且 $x_1 < x_2 < 0$, 则 $y_1 < y_2$;

②当点 P 坐标为 $(0, -3)$ 时, $\triangle AOB$ 是等腰三角形;

③无论点 P 在什么位置,始终有 $S_{\triangle AOB} = 7.5, AP = 4BP$;

④当点 P 移动到使 $\angle AOB = 90^\circ$ 时,点 A 的坐标为 $(2\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

其中真命题的个数为()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

9. 如图,在菱形 $ABCD$ 中, E 为 CD 的中点, $\angle C=60^\circ$,以 A 为圆心 AB 为半径的弧交 AE 于点 F , DF 交 BC 于点 M ,则 $\frac{DF}{FM}$ 的值为()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{7}-1}{6}$ C. $\frac{\sqrt{7}+3}{6}$ D. $\frac{\sqrt{7}+1}{6}$

10. 如图所示,将形状、大小完全相同的“●”和线段按照一定规律摆成下列图形,第 1 幅图形中“●”的个数为 a_1 ,第 2 幅图形中“●”的个数为 a_2 ,第 3 幅图形中“●”的个数为 a_3 ,...,以此类推,则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{19}}$ 的值为()



- A. $\frac{20}{21}$ B. $\frac{61}{84}$ C. $\frac{589}{840}$ D. $\frac{421}{760}$

二、填空题(共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分)

11. 计算 $\sqrt{(-6)^2}$ 的结果是_____.

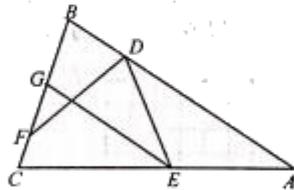
12. 某校合唱团 50 名成员的年龄如下表:

年龄/岁	12	13	14	15
人数	5	15	10	20

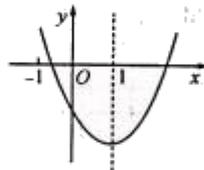
则这组数据的中位数是_____.

13. 计算 $\frac{a^2-9}{a^2-6a+9} - \frac{6}{a+3}$ 的结果为_____.

14. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D,E 分别为 AB,AC 上的点, $\angle BDE, \angle CED$ 的平分线分别交 BC 于点 F, G , $EG \parallel AB$,若 $\angle BGE=110^\circ$,则 $\angle BDF$ 的度数为_____.



第 14 题图



第 15 题图

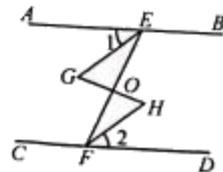
15. 如图,抛物线 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 与 y 轴的交点在 $(0, -2)$ 的下方,对称轴是直线 $x=1$,下列四个结论:① $a+b+3c < 0$;② $b^2-4ac < 8a$;③ $at^2-b \geq a-bt$;④ $3b-2c < 0$. 其中正确的是_____.(填序号)

16. 在平面直角坐标系中,点 $A(2,4)$ 绕原点 O 顺时针旋转 60° 得到线段 OB ,则点 B 的坐标为_____.

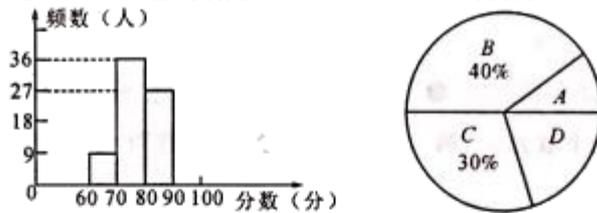
三、解答题(共 8 小题,共 72 分)

17. (本题 8 分)计算: $(3x^2y^4)^2 - 6x^6y^8 \div 2x^2$.

18. (本题 8 分)如图, $AB \parallel CD$, $\angle 1 = \angle 2$,求证: $\angle G = \angle H$.



19. (本题 8 分) 秋季新学期开学时, 某校对七年级新生掌握“中学生日常行为规范”的情况进行了知识测试, 测试成绩全部合格, 现学校随机选取了部分学生的成绩, 整理并制作成了如下的图表(注: A 组成绩为 $60 \leq x < 70$, B 组成绩为 $70 \leq x < 80$, C 组成绩为 $80 \leq x < 90$, D 组成绩为 $90 \leq x \leq 100$):



请根据上述统计图表, 解答下列问题:

- (1) 本次调查共抽查了 _____ 名学生, 在扇形统计图中, 成绩为“ $90 \leq x \leq 100$ ”所在扇形的圆心角的度数是 _____ ;
- (2) 如果测试成绩不低于 80 分为“优秀”等次, 请估计全校七年级的 800 名学生中, “优秀”等次的学生约有多少人?
- (3) 请估计选取的七年级学生测试成绩的平均成绩.

20. (本题 8 分) 如图是由边长为 1 的小正方形构成的网格, 每个小正方形的顶点叫做格点, 请选择适当的格点, 仅用无刻度的直尺在网格中完成下列画图, 画图过程用虚线表示, 画图结果用实线表示.

- (1) 如图 1, 作 $\triangle ABC$ 的高 CD 及边 AC 的一个四等分点;
- (2) 如图 2, 画出 $\triangle ABO$ 绕点 O 顺时针旋转得 $\triangle DEO$, 使点 B 的对应点 E 落在 x 轴正半轴上;
- (3) 如图 3, 在直线 l 上画出一条 1 个单位长度的线段 MN (M 在 N 的上方), 使 $AM + MN + NB$ 的值最小.

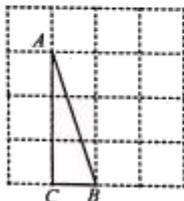


图 1

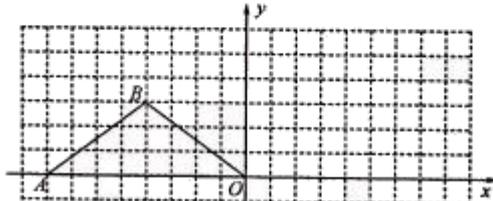


图 2

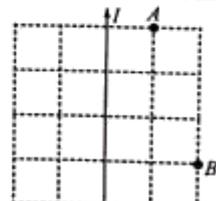
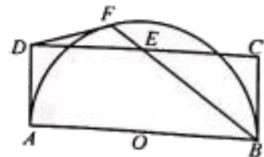


图 3

21. (本题 8 分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 边 AB 是半圆 O 的直径, 点 E 是 CD 的中点, BE 交半圆 O 于点 F , 连接 DF .

- (1) 求证: DF 是半圆 O 的切线;
- (2) 若 $AB = 8, AD = 3$, 求 BF 的长.



22. (本题 10 分) A 城有某种农机 30 台, B 城有该农机 40 台, 现要将这些农机全部运往 C, D 两乡, 调运任务承包给某运输公司. 已知 C 乡需要农机 34 台, D 乡需要农机 36 台, 从 A 城往 C, D 两乡运送农机的费用分别为 250 元/台和 200 元/台, 从 B 城往 C, D 两乡运送农机的费用分别为 150 元/台和 240 元/台.
- (1) 设 A 城运往 C 乡该农机 x 台, 运送全部农机的总费用为 W 元, 求 W 关于 x 的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;
 - (2) 现该运输公司要求运送全部农机的总费用不低于 16460 元, 则有多少种不同的调运方案? 将这些方案设计出来;
 - (3) 现该运输公司决定对 A 城运往 C 乡的农机, 从运输费中每台减免 a 元 ($a \leq 200$) 作为优惠, 其他费用不变, 如何调运, 使总费用最少?

23. (本题 10 分) 如图 1, 点 E 是等边 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点, 以 AE 为边作等边 $\triangle AEF$, EF 交 AC 于 D.
- (1) 求证: $AF^2 = BC \cdot AD$;
 - (2) 如图 2, 作 $EH \parallel AF$ 交 AB 于点 H.

① 求证: $\frac{EB}{EC} = \frac{EH}{ED}$;

② 若 $ED=2, EH+EA=4$, 直接写出 $\tan \angle ADE$ 的值为 _____.

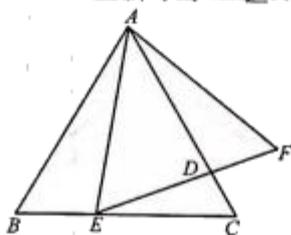


图 1

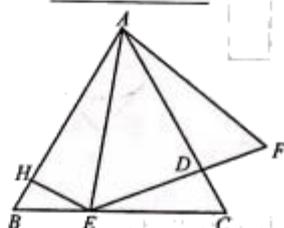


图 2

24. (本题 12 分) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 4$ 经过点 $L(-1, 0), A(5, 6)$ 交 y 轴于点 B.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 如图 1, 点 C 是直线 AB 下方的抛物线上一点, $CN \parallel x$ 轴, 交直线 AB 于点 N, $CM \parallel y$ 轴, 交直线 AB 于点 M, 求 $\triangle CMN$ 的周长的最大值;

(3) 如图 2, 点 P 是抛物线第一象限内的点, 过点 P 的直线 $y = mx + n$ ($n < 0$) 与抛物线交于另一点 Q, 连接 LP 交 y 轴于点 S, 连接 LQ 交 y 轴于点 T, 若 $OS \cdot OT = 2$, 探究 m 与 n 之间的数量关系, 并说明理由.

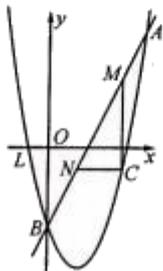


图 1

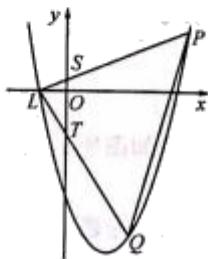


图 2

新动力 2020 年中考数学预测卷(一)

一、选择题(共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

1. $-\frac{2}{3}$ 的相反数是(A)

- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{2}{3}$

2. 式子 $\sqrt{x+5}$ 在实数范围内有意义,则 x 的取值范围是(B)

- A. $x > 5$ B. $x \geq -5$ C. $x \geq 5$ D. $x \leq -5$

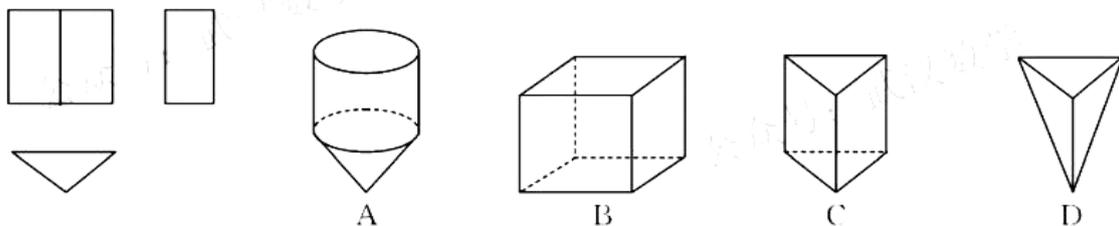
3. 以下事件:①掷一枚质地均匀的骰子,“朝上一面的点数可能是 7”;②“射击运动员射击一次,刚好射中靶心”是随机事件.(B)

- A. 只有①正确 B. 只有②正确 C. ①②都正确 D. ①②都错误

4. 下列图形中,既是中心对称图形,又是轴对称图形的是(C)



5. 一个几何体的三视图如图所示,则这个几何体可能是(C)

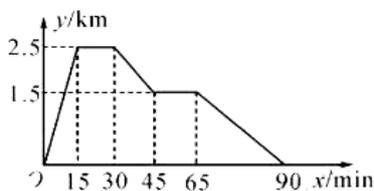


6. 从 $-1, -2, -3, 1, 2$ 五个数中随机选取两个不同的数,恰好都是不等式组 $\begin{cases} 2-x > 1 & \text{①} \\ \frac{x+5}{2} \geq 1 & \text{②} \end{cases}$ 的解的概率为

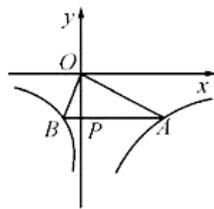
- (A)
A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 已知林茂的家、体育场、文具店在同一直线上,图中的信息反映的过程是林茂从家跑步去体育场,在体育场锻炼了一阵后又走到文具店买笔,然后再走回家,图中 x 表示时间, y 表示林茂离家的距离.依据图中的信息,下列说法错误的是(C)

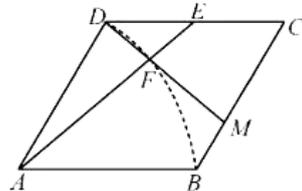
- A. 体育场离林茂家 2.5 km B. 体育场离文具店 1 km
C. 林茂从体育场出发到文具店的平均速度是 50 m/min D. 林茂从文具店回家的平均速度是 60 m/min



第 7 题图



第 8 题图



第 9 题图

8. 已知函数 $y = \begin{cases} -\frac{12}{x} & (x > 0), \\ \frac{3}{x} & (x < 0) \end{cases}$ 的图象如图所示,点 P 是 y 轴负半轴上一动点,过点 P 作 y 轴的垂线交图象

于 A, B 两点,连接 OA, OB . 下列四个命题:

- ①若点 $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ 在图象上,且 $x_1 < x_2 < 0$, 则 $y_1 < y_2$;
②当点 P 坐标为 $(0, -3)$ 时, $\triangle AOB$ 是等腰三角形;
③无论点 P 在什么位置,始终有 $S_{\triangle AOB} = 7.5, AP = BP$;
④当点 P 移动到使 $\angle AOB = 90^\circ$ 时,点 A 的坐标为 $(2\sqrt{6}, -\sqrt{6})$.

其中真命题的个数为(C)

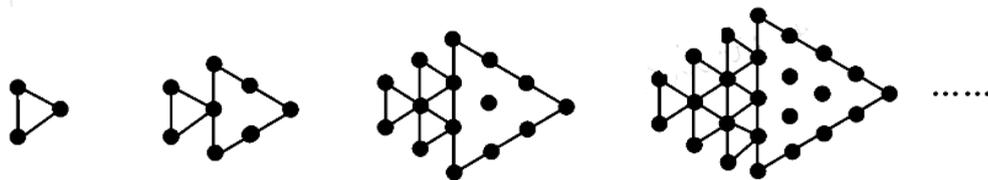
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

9. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, E 为 CD 的中点, $\angle C=60^\circ$, 以 A 为圆心 AB 为半径的弧交 AE 于点 F , DF 交 BC 于点 M , 则 $\frac{DF}{FM}$ 的值为 (D)

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{7}-1}{6}$ C. $\frac{\sqrt{7}+3}{6}$ D. $\frac{\sqrt{7}+1}{6}$

10. 如图所示, 将形状、大小完全相同的“●”和线段按照一定规律摆成下列图形, 第 1 幅图形中“●”的个数为 a_1 , 第 2 幅图形中“●”的个数为 a_2 , 第 3 幅图形中“●”的个数为 a_3 , \dots , 以此类推, 则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{19}}$ 的值为 (C)

$\frac{1}{a_{19}}$



第 1 幅图 第 2 幅图 第 3 幅图 第 4 幅图

- A. $\frac{20}{21}$ B. $\frac{61}{84}$ C. $\frac{589}{840}$ D. $\frac{421}{760}$

二、填空题(共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

11. 计算 $\sqrt{(-6)^2}$ 的结果是 6.

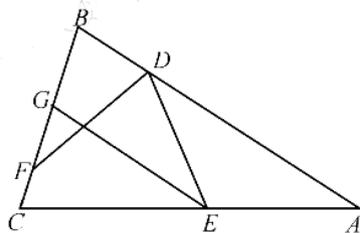
12. 某校合唱团 50 名成员的年龄如下表:

年龄/岁	12	13	14	15
人数	5	15	10	20

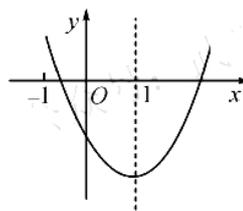
则这组数据的中位数是 14.

13. 计算 $\frac{a^2-9}{a^2-6a+9} - \frac{6}{a+3}$ 的结果为 $\frac{a^2+27}{a^2-9}$.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D, E 分别为 AB, AC 上的点, $\angle BDE, \angle CED$ 的平分线分别交 BC 于点 F, G , $EG \parallel AB$, 若 $\angle BGE=110^\circ$, 则 $\angle BDF$ 的度数为 70° .



第 14 题图



第 15 题图

15. 如图, 抛物线 $y=ax^2-bx+c$ ($a \neq 0$) 与 y 轴的交点在 $(0, -2)$ 的下方, 对称轴是直线 $x=1$, 下列四个结论: ① $a+b+3c < 0$; ② $b^2-4ac < 8a$; ③ $at^2-b \geq a-bt$; ④ $3b-2c < 0$.

其中正确的是 ①③④. (填序号)

16. 在平面直角坐标系中, 点 $A(2, 4)$ 绕原点 O 顺时针旋转 60° 得到线段 OB , 则点 B 的坐标为 $(1+2\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$.

三、解答题(共 8 小题, 共 72 分)

17. (本题 8 分) 计算: $(3x^2y^4)^2 - 6x^5y^8 \div 2x^2$.

解: 原式 $= 9x^4y^8 - 3x^3y^8 = 6x^3y^8$.

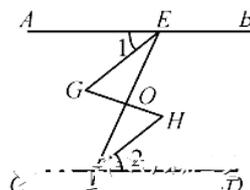
18. (本题 8 分) 如图, $AB \parallel CD$, $\angle 1 = \angle 2$, 求证: $\angle G = \angle H$.

证明: $\because AB \parallel CD, \therefore \angle AEF = \angle DFE,$

又 $\because \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle OEG = \angle OFH,$

$\therefore EG \parallel FH.$

$\therefore \angle G = \angle H.$



19. (本题 8 分) 秋季新学期开学时, 某校对七年级新生掌握“中学生日常行为规范”的情况进行了知识测试, 测试成绩全部合格, 现学校随机选取了部分学生的成绩, 整理并制作成了如下的图表(注: A 组成绩为 $60 \leq x < 70$, B 组成绩为 $70 \leq x < 80$, C 组成绩为 $80 \leq x < 90$, D 组成绩为 $90 \leq x \leq 100$):

请根据上述统计图表, 解答下列问题:

(1) 本次调查共抽查了 90 名学生, 在扇形统计图中, 成绩为“ $90 \leq x \leq 100$ ”所在扇形的圆心角的度数是 72° ;

(2) 如果测试成绩不低于 80 分为“优秀”等次, 请估计全校七年级的 800 名学生中, “优秀”等次的学生约有多少人?

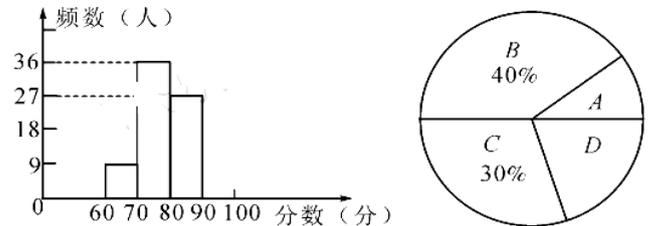
(3) 请估计选取的七年级学生测试成绩的平均成绩.

解: (2) $800 \times (0.3 + 0.2) = 800 \times 0.5 = 400$ (人),

答: “优秀”等次的学生约有 400 人.

(3) $\frac{9 \times 65 + 36 \times 75 + 27 \times 85 + 18 \times 95}{90} = 81$ (分)

答: 七年级学生的平均成绩估计是 81 分.



20. (本题 8 分) 如图是由边长为 1 的小正方形构成的网格, 每个小正方形的顶点叫做格点, 请选择适当的格点, 仅用无刻度的直尺在网格中完成下列画图, 画图过程用虚线表示, 画图结果用实线表示.

(1) 如图 1, 作 $\triangle ABC$ 的高 CD 及边 AC 的一个四等分点;

(2) 如图 2, 画出 $\triangle ABO$ 绕点 O 顺时针旋转得 $\triangle DEO$, 使点 B 的对应点 E 落在 x 轴正半轴上;

(3) 如图 3, 在直线 l 上画出一条 1 个单位长度的线段 MN (M 在 N 的上方), 使 $AM + MN + NB$ 的值最小.

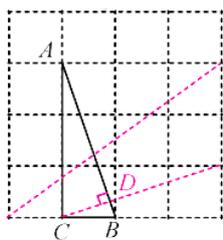


图 1

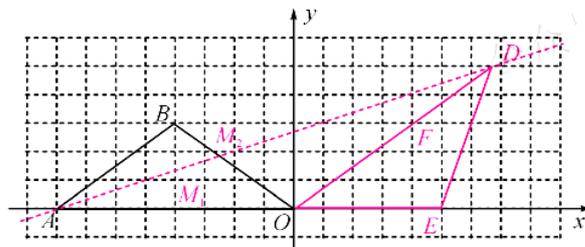


图 2

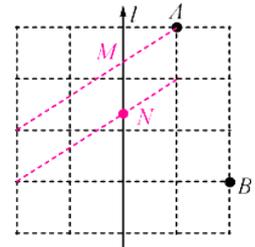


图 3

21. (本题 8 分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 边 AB 是半圆 O 的直径, 点 E 是 CD 的中点, BE 交半圆 O 于点 F , 连接 DF .

(1) 求证: DF 是半圆 O 的切线;

(2) 若 $AB = 8, AD = 3$, 求 BF 的长.

(1) 证明: 连接 OF, OD . 在矩形 $ABCD$ 中, \because 点 E 是 CD 的中点, 点 O 是 AB 的中点,

$\therefore DE = \frac{1}{2}CD, OB = \frac{1}{2}AB, \therefore$ 四边形 $OBED$ 为平行四边形.

$\therefore \angle AOD = \angle OBF = \angle OFB = \angle FOD,$

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle FOD$ (SAS),

$\therefore \angle OAD = \angle OFD = 90^\circ,$

$\therefore OF \perp DF,$

$\therefore DF$ 为半圆 O 的切线.

(2) 连接 AF , 由 (1) 知: 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 和 $\text{Rt}\triangle FBA$ 中,

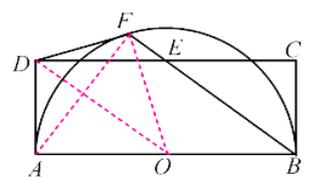
$\angle AOD = \angle OBF, \angle DAO = \angle BFA,$

$\therefore \text{Rt}\triangle AOD \sim \text{Rt}\triangle FBA, \therefore \frac{OA}{BF} = \frac{AD}{AF}.$

在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8, AD = 3$, 则 $OA = 4$, 可设 $AF = 3x, BF = 4x$

在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $8^2 = (3x)^2 + (4x)^2$, 解得, $x_1 = \frac{8}{5}, x_2 = -\frac{8}{5}$ (舍),

$\therefore BF = \frac{32}{5}.$



22. (本题 10 分) A 城有某种农机 30 台, B 城有该农机 40 台, 现要将这些农机全部运往 C, D 两乡, 调运任务承包给某运输公司. 已知 C 乡需要农机 34 台, D 乡需要农机 36 台, 从 A 城往 C, D 两乡运送农机的费用分别为 250 元/台和 200 元/台, 从 B 城往 C, D 两乡运送农机的费用分别为 150 元/台和 240 元/台.
- (1) 设 A 城运往 C 乡该农机 x 台, 运送全部农机的总费用为 W 元, 求 W 关于 x 的函数关系式, 并写出自变量 x 的取值范围;
- (2) 现该运输公司要求运送全部农机的总费用不低于 16460 元, 则有多少种不同的调运方案? 将这些方案设计出来;
- (3) 现该运输公司决定对 A 城运往 C 乡的农机, 从运输费中每台减免 a 元 ($a \leq 200$) 作为优惠, 其他费用不变, 如何调运, 使总费用最少?

$$(1) W = 250x + 200(30 - x) + 150(34 - x) + 240(6 + x) = 140x + 12540 \quad (0 < x \leq 30).$$

$$(2) \text{根据题意, 得 } 140x + 12540 \geq 16460, \therefore x \geq 28, \therefore x \leq 30, \therefore 28 \leq x \leq 30.$$

$\therefore x$ 是正整数, $\therefore x = 28$ 或 29 或 30 , \therefore 有 3 种不同的调运方案.

第一种调运方案: 从 A 城调往 C 城 28 台, 调往 D 城 2 台, 从 B 城调往 C 城 6 台, 调往 D 城 34 台;

第二种调运方案: 从 A 城调往 C 城 29 台, 调往 D 城 1 台, 从 B 城调往 C 城 5 台, 调往 D 城 35 台;

第三种调运方案: 从 A 城调往 C 城 30 台, 调往 D 城 0 台, 从 B 城调往 C 城 4 台, 调往 D 城 36 台;

$$(3) W = (250 - a)x + 200(30 - x) + 150(34 - x) + 240(6 - x) = (140 - a)x + 12540;$$

① 当 $0 < a < 140$ 时, $140 - a > 0$, 当 $x = 0$ 时 $y_{\text{最小}} = 12540$ 元,

此时从 A 城调往 C 城 0 台, 调往 D 城 30 台, 从 B 城调往 C 城 34 台, 调往 D 城 6 台;

② 当 $a = 140$, 时 $W = 12540$, 各种方案的费用一样多;

③ 当 $140 < a \leq 200$ 时, $140 - a < 0$, 当 $x = 30$ 时, $y_{\text{最小}} = (16740 - 30a)$ 元, 此时从 A 城调往 C 城 30 台, 调往 D 城 0 台, 从 B 城调往 C 城 4 台, 调往 D 城 36 台.

23. (本题 10 分) 如图 1, 点 E 是等边 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点, 以 AE 为边作等边 $\triangle AEF$, EF 交 AC 于 D.

(1) 求证: $AF^2 = BC \cdot AD$;

(2) 如图 2, 作 $EH \parallel AF$ 交 AB 于点 H.

$$\text{① 求证: } \frac{EB}{EC} = \frac{EH}{ED};$$

② 若 $ED = 2$, $EH + EA = 4$, 直接写出 $\tan \angle ADE$ 的值为 _____.

(1) $\because \triangle ABC, \triangle AEF$ 都是等边三角形,

$$\therefore AB = AC, \angle AEF = \angle ACE = 60^\circ.$$

又 $\because \angle EAD = \angle CAE$,

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle ACE, \therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AE}{AC}.$$

$$\because BC = AC, AE = AF, \therefore AF^2 = BC \cdot AD.$$

(2) ① $\because EH \parallel AF, \therefore \angle AEH = \angle EAF = 60^\circ = \angle B$.

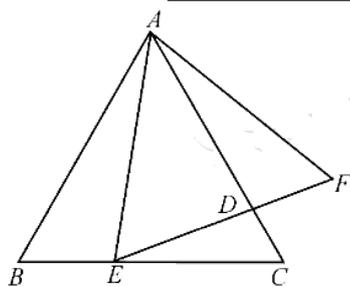


图 1

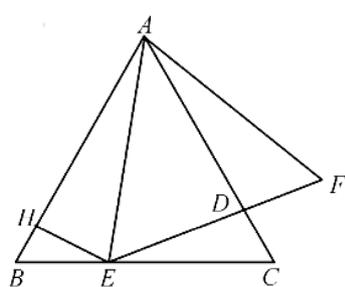


图 2

$$\text{方法 1: } \because \triangle AEH \sim \triangle ABE, \therefore \frac{EH}{EB} = \frac{EA}{AB}.$$

$$\text{又 } \triangle EDC \sim \triangle AEB, \therefore \frac{ED}{EC} = \frac{EA}{AB}.$$

$$\therefore \frac{EH}{EB} = \frac{ED}{EC}, \text{ 即 } \frac{EB}{EC} = \frac{EH}{ED}.$$

方法 2: 在四边形 AHED 中, $\angle AHE + \angle ADE = 180^\circ, \therefore \angle AHE = \angle EDC$.

在 AB 上取一点 B' , 使 $EB' = EH$ 则 $\angle EB'H = \angle EHB' = \angle EDC$.

又 $\because \angle B = \angle C = 60^\circ, \therefore \triangle BB'E \sim \triangle CDE$.

$$\therefore \frac{EB}{EC} = \frac{EB'}{ED} = \frac{EH}{ED}.$$

② $3\sqrt{3}$. 提示: 可证 $EA = EH + ED$, 由 $ED = 2, EH + EA = 4$, 可得 $EA = 3, EH = 1$.

由 ① 可设 $BE = 2x, EC = 4x$, 作 $AM \perp BC$ 于 M , 则 $EM = x, AM = 3\sqrt{3}x$,

$$\tan \angle AEC = 3\sqrt{3}, \tan \angle ADE = 3\sqrt{3}.$$

24. (本题 12 分) 已知抛物线 $y=ax^2+bx-4$ 经过点 $L(-1,0)$, $A(5,6)$ 交 y 轴于点 B .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 如图 1, 点 C 是直线 AB 下方的抛物线上一点, $CN \parallel x$ 轴, 交直线 AB 于点 N , $CM \parallel y$ 轴, 交直线 AB 于点 M , 求 $\triangle CMN$ 的周长的最大值;

(3) 如图 2, 点 P 是抛物线第一象限内的点, 过点 P 的直线 $y=mx+n$ ($n < 0$) 与抛物线交于另一点 Q , 连接 LP 交 y 轴于点 S , 连接 LQ 交 y 轴于点 T , 若 $OS \cdot OT = 2$, 探究 m 与 n 之间的数量关系, 并说明理由.

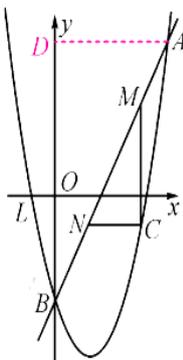


图 1

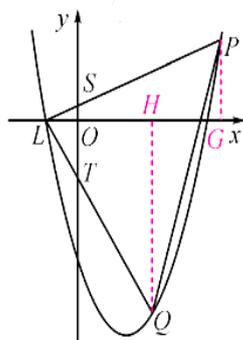


图 2

(1) 把 $(-1,0)$, $(5,6)$ 代入 $y=ax^2+bx-4$ 得:

$$\therefore \begin{cases} a - b - 4 = 0, \\ 25a + 5b - 4 = 6, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = -3, \end{cases}$$

\therefore 抛物线的解析式为 $y=x^2-3x-4$;

(2) 作 $AD \perp y$ 轴于点 D , 依题意, 得 $\triangle CMN \sim \triangle DBA$.

$\triangle DBA$ 的边长为 $AD=5$, $BD=10$, $AB=5\sqrt{5}$, \therefore 其周长为 $15+5\sqrt{5}$.

$$\therefore \frac{\triangle CMN \text{ 的周长}}{15+5\sqrt{5}} = \frac{CM}{BD}, \therefore \triangle CMN \text{ 的周长} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} CM.$$

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$, 将点 $(0,-4)$, $(5,6)$ 代入, 求得 $y=2x-4$.

设点 C 的横坐标为 a , 则 $CM=2a-4-(a^2-3a-4)=-a^2+5a=-(a-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{4}$

当 $a=\frac{5}{2}$ 时, CM 的最大值为 $\frac{25}{4}$,

$$\therefore \triangle CMN \text{ 周长的最大值为 } \frac{75+25\sqrt{5}}{8}.$$

(3) 过点 P 作 $PG \perp x$ 轴于点 G , 过点 Q 作 $QH \perp x$ 轴于点 H ,

$$\text{列方程组 } \begin{cases} y=mx+n, \\ y=x^2-3x-4, \end{cases} \therefore x^2-(m+3)x-4-n=0, \therefore \begin{cases} x_P+x_Q=m+3, \\ x_P x_Q=-n-4, \end{cases}$$

$$\therefore PG \parallel OS, \therefore \triangle LOS \sim \triangle LGP, \therefore \frac{OS}{PG} = \frac{LO}{LG}, \text{ 即 } \frac{OS}{y_P} = \frac{1}{x_P+1}.$$

$$\therefore OS = \frac{y_P}{x_P+1} = \frac{(x_P+1)(x_P-4)}{x_P+1} = x_P-4.$$

同理得: $OT = -(x_Q-4)$,

$$\therefore OS \cdot OT = -(x_P-4)(x_Q-4) = 2, \text{ 整理得: } x_P x_Q - 4(x_P + x_Q) + 18 = 0,$$

$$\therefore -n-4-4(m+3)+18=0, \therefore 4m-n=2.$$