

# 九年级第一次月考模拟试卷（1）

## 一. 填空题（共 12 小题）

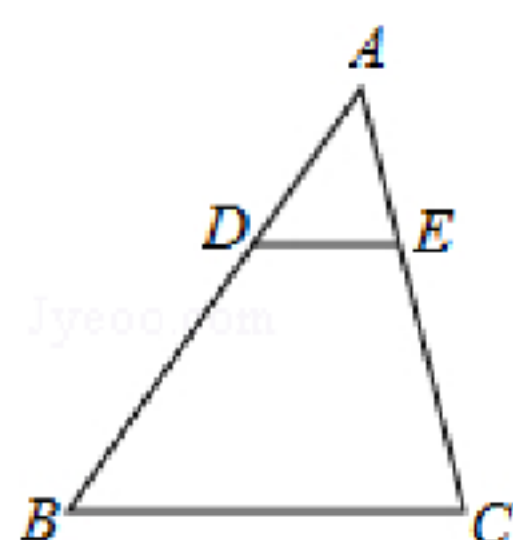
1. 线段  $2\text{cm}$ 、 $8\text{cm}$  的比例中项为\_\_\_\_\_  $\text{cm}$ .

2. 已知  $\frac{c}{4} = \frac{b}{5} = \frac{a}{6} \neq 0$ , 则  $\frac{b+c}{a}$  的值为\_\_\_\_\_.

3. 制造一种商品, 原来每件成本为  $100$  元, 由于连续两次降低成本, 现在的成本是每件  $81$  元, 则平均每次降低成本的百分数是\_\_\_\_\_.

4. 若关于  $x$  的方程  $(1+x)(x+3) = ax^2 + 1$  是一元二次方程, 则  $a$  取值范围\_\_\_\_\_.

5. 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 若  $DE \parallel BC$ ,  $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}$ ,  $DE = 4\text{cm}$ , 则  $BC$  的长为\_\_\_\_\_.



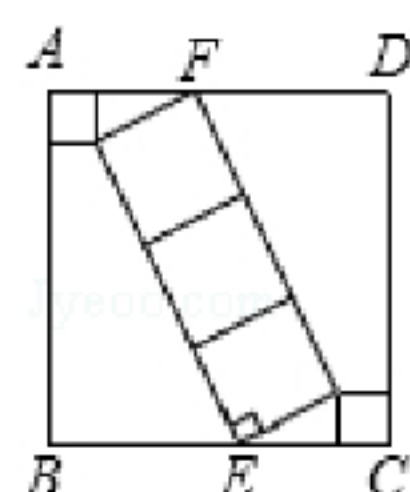
6. 关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 - x - \frac{1}{4} = 0$  有实数根, 则  $a$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

7. 一元二次方程  $x^2 + mx + 3 = 0$  的一个根为  $-1$ , 则另一个根为\_\_\_\_\_.

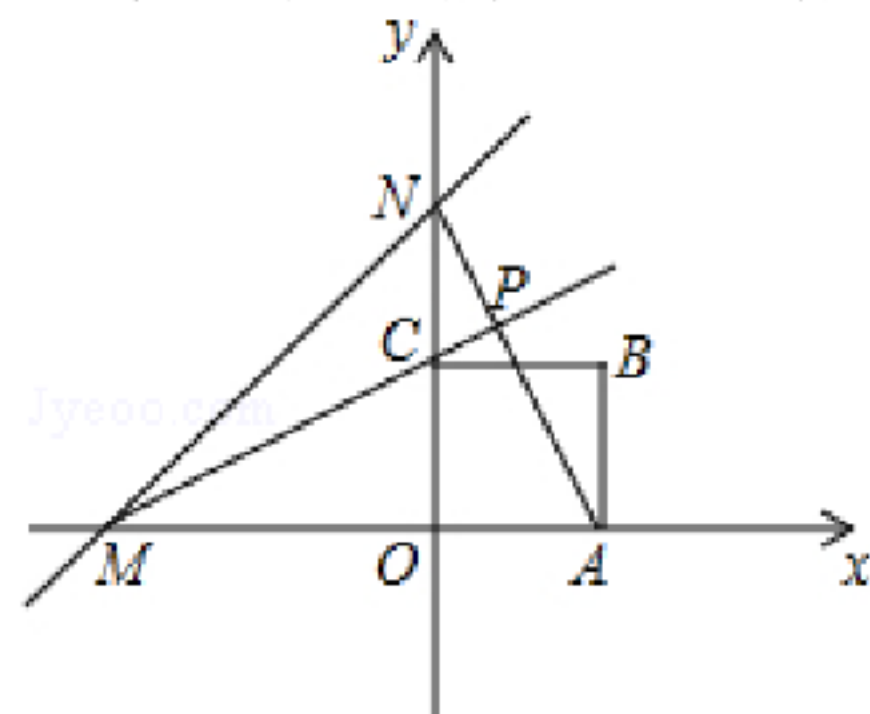
8. 如果  $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2) = 3$ , 则  $x^2 + y^2$  的值是\_\_\_\_\_.

9. 一个三角形的两边长分别为  $4\text{cm}$  和  $7\text{cm}$ , 第三边长是一元二次方程  $x^2 - 10x + 21 = 0$  的实数根, 则三角形的周长是\_\_\_\_\_  $\text{cm}$ .

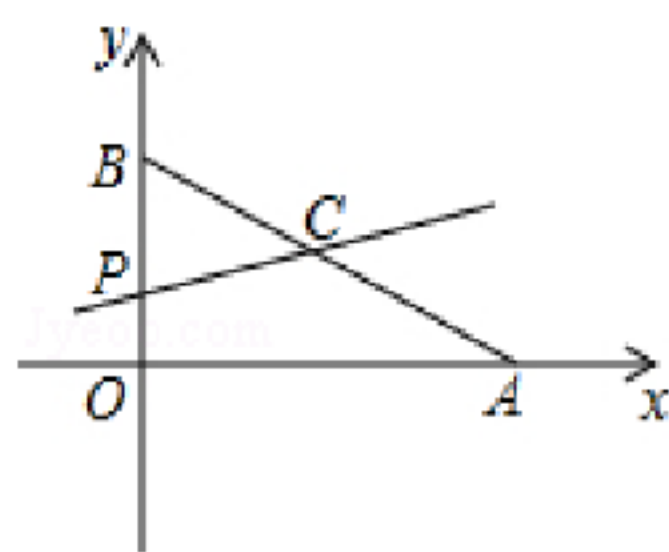
10. 如图, 在边长为  $7$  的正方形  $ABCD$  中放入五个小正方形后形成一个中心对称图形, 其中两顶点  $E$ 、 $F$  分别在边  $BC$ 、 $AD$  上, 则放入的五个小正方形的面积之和为\_\_\_\_\_.



11. 直线  $y = x + 8$  分别与  $x$  轴、 $y$  轴相交于点  $M$ 、 $N$ , 边长为  $4$  的正方形  $OABC$  一个顶点  $O$  在坐标系的原点, 直线  $AN$  与  $MC$  相交于点  $P$ , 若正方形绕着点  $O$  旋转一周, 则  $PC$  长度的最小值是\_\_\_\_\_.



12. 如图, 平面直角坐标系中, 已知点  $A(8, 0)$  和点  $B(0, 6)$ , 点  $C$  是  $AB$  的中点, 点  $P$  在折线  $AOB$  上, 直线  $CP$  截  $\triangle AOB$ , 所得的三角形与  $\triangle AOB$  相似, 那么点  $P$  的坐标是\_\_\_\_\_.



## 二. 选择题 (共 6 小题)

13. 关于  $x$  的一元二次方程  $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$  的一个根是 0, 则  $a$  的值为 ( )

- A. 1                      B. -1                      C. 1 或 -1                      D.  $\frac{1}{2}$

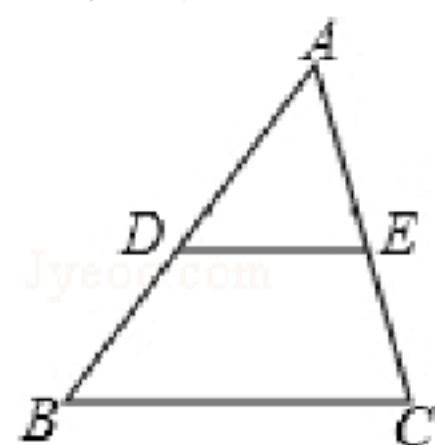
14. 在比例尺是 1: 8000 的南京市城区地图上, 太平南路的长度约为 25cm, 它的实际长度约为 ( )

- A. 320cm                      B. 320m                      C. 2000cm                      D. 2000m

15. 下列方程中是一元二次方程的是 ( )

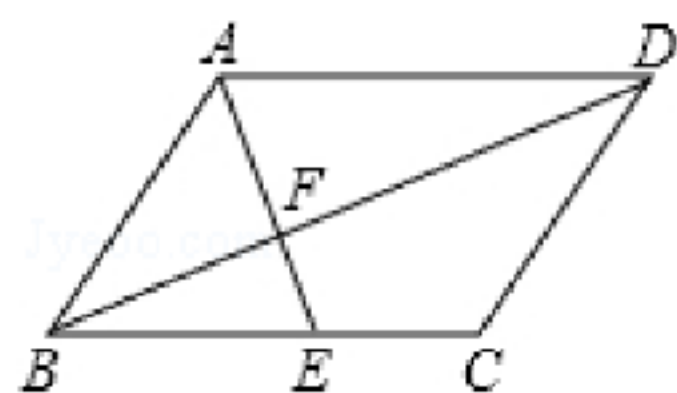
- A.  $ax^2 + bx + c = 0$                       B.  $x^2 + \frac{1}{2x} - 9 = 0$                       C.  $x^2 = 0$                       D.  $xy + 2 = 1$

16. 在  $\triangle ABC$  中, 点  $D$ 、 $E$  分别在边  $AB$  和  $AC$  上, 且  $DE \parallel BC$ , 若  $AD: DB = 1: 1$ , 则  $S_{\triangle ADE}: S_{\text{四边形 } DBCE}$  的值为 ( )



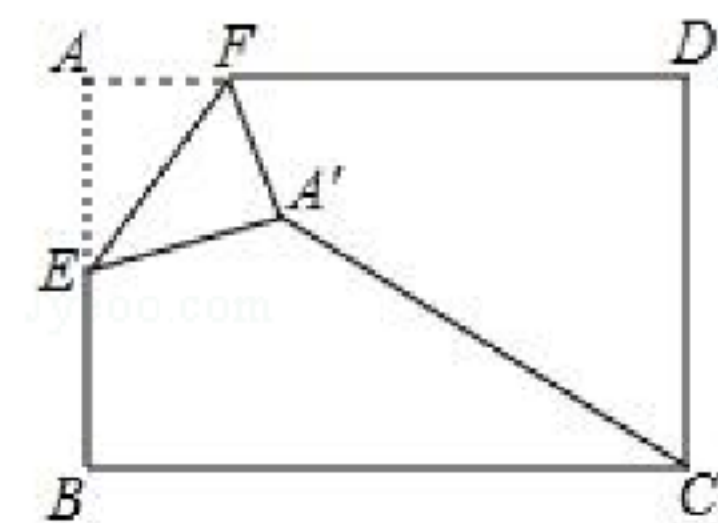
- A. 1: 1                      B. 1: 2                      C. 1: 3                      D. 1: 4

17. 如图,  $\square ABCD$  中,  $\angle C = 120^\circ$ ,  $AB = AE = 5$ ,  $AE$  与  $BD$  交于点  $F$ ,  $AF = 2EF$ , 则  $BC$  的长为 ( )



- A. 6                      B. 8                      C. 10                      D. 12

18. 如图, 在矩形纸片  $ABCD$  中,  $AB = 2$ ,  $AD = 3$ , 点  $E$  是  $AB$  的中点, 点  $F$  是  $AD$  边上的一个动点, 将  $\triangle AEF$  沿  $EF$  所在直线翻折, 得到  $\triangle A'EF$ , 则  $A'C$  的长的最小值是 ( )



- A.  $\sqrt{10} - 1$                       B.  $\sqrt{5}$                       C.  $\frac{\sqrt{145}}{5}$                       D.  $2\sqrt{3} - 1$

三. 解答题 (共 10 小题)

19. 解方程

(1)  $4x^2 - 9 = 0$ ;

(2)  $3x^2 - 4x - 1 = 0$ ;

(3)  $x^2 - 2x - 3 = 0$  (用配方法);

(4)  $2(x - 3)^2 + x(x - 3) = 0$ .

20. 已知关于  $x$  的一元二次方程  $(m+1)x^2 - (m+3)x + 2 = 0$ .

(1) 证明: 当  $m \neq -1$  时, 方程总有实数根;

(2)  $m$  为何整数时, 方程有两个不相等的正整数根.

21. 某商场经销一种成本为每千克 40 元的水产品, 经市场分析, 若按每千克 50 元销售, 一个月能售出 500 千克; 销售单价每涨价 1 元, 月销售量就减少 10 千克. 针对这种水产品的销售情况, 请解答以下问题.

(1) 当销售单价定为每千克 55 元, 计算月销售量和月销售利润;

(2) 商场计划在月销售成本不超过 10000 元的情况下, 使得月销售利润达到 8000 元, 销售单价应定为多少?

22. (1) 如图 1, 已知  $AB \perp l$ ,  $DE \perp l$ , 垂足分别为  $B$ 、 $E$ , 且  $C$  是  $l$  上一点,  $\angle ACD = 90^\circ$ , 求证:  $\triangle ABC \sim \triangle CED$ ;

(2) 如图 2, 在四边形  $ABCD$  中, 已知  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $CD = 10$ ,  $DA = 5\sqrt{5}$ , 求  $BD$  的长.

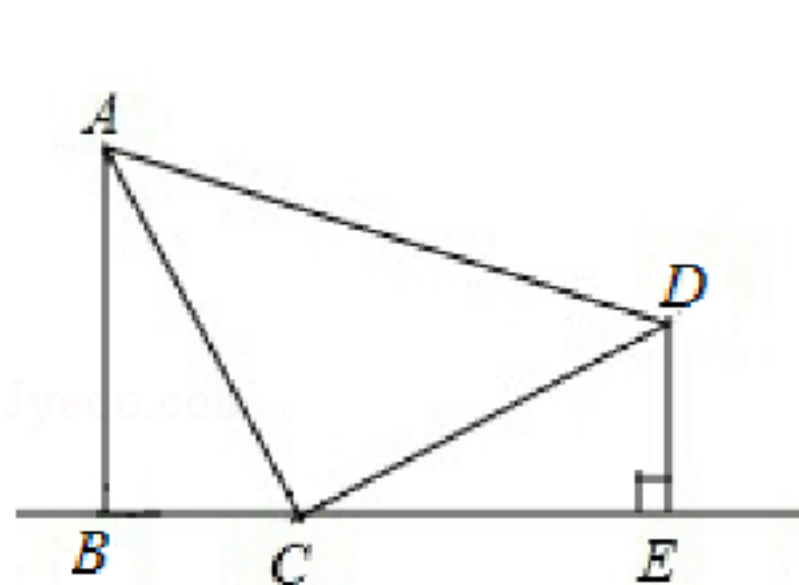


图1

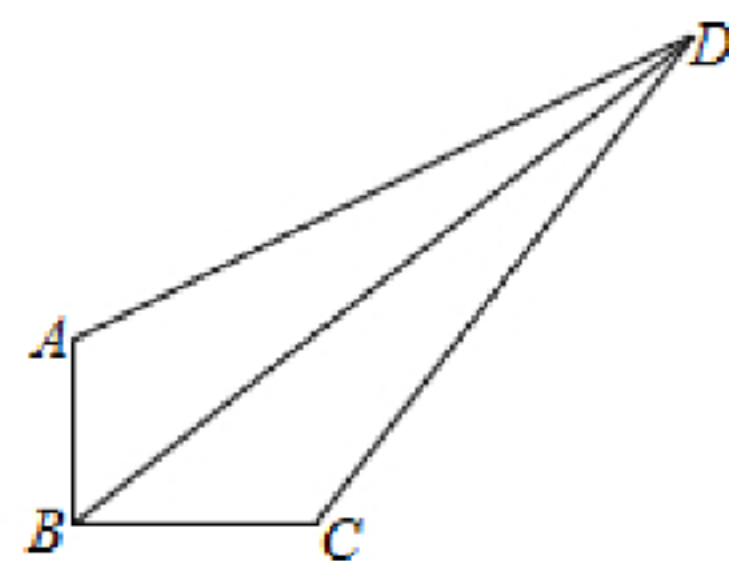
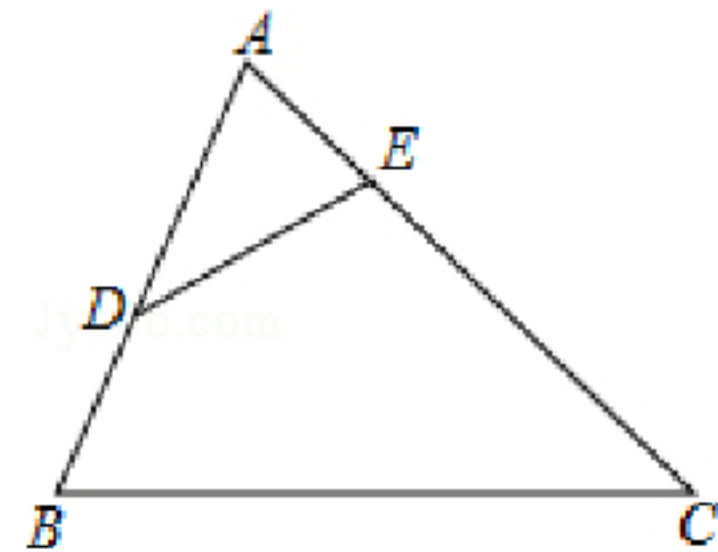


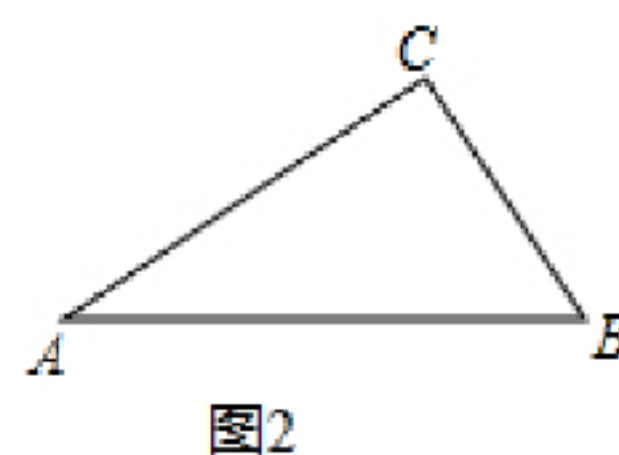
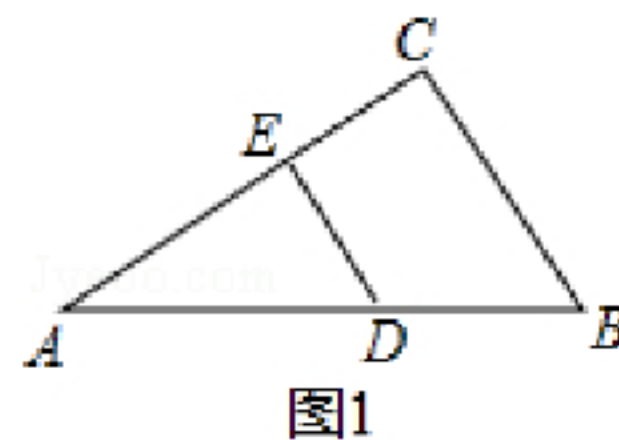
图2



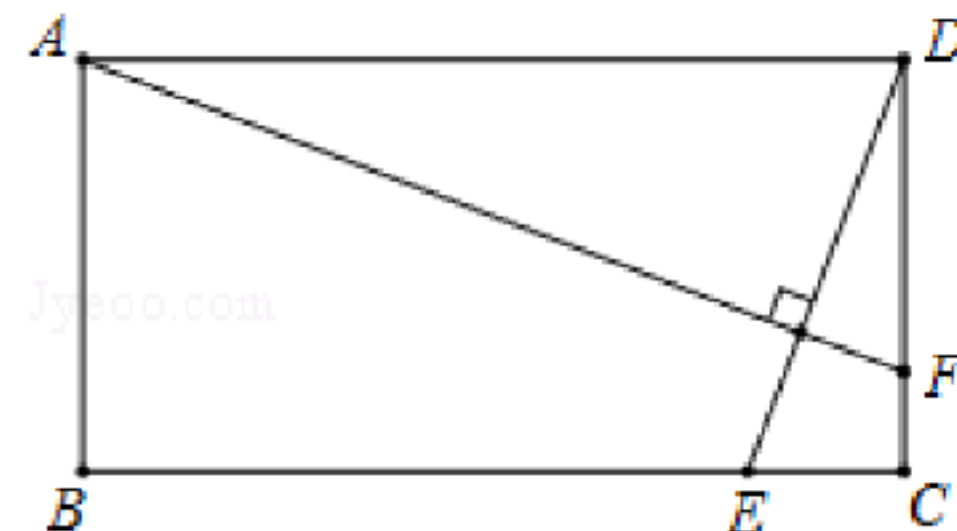
23. 如图，点  $D$ 、 $E$  分别为  $AB$ 、 $AC$  边上两点，且  $AD=4$ ， $BD=2$ ， $AE=2$ ， $CE=10$ 。
- (1) 试说明： $\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ；
- (2) 若  $BC=9$ ，求  $DE$  的长。



24. 已知： $\triangle ABC$  中， $\angle C=90^\circ$ 。
- (1) 如图 1，若  $AC=4$ ， $BC=3$ ， $DE \perp AC$ ，且  $DE=DB$ ，求  $AD$  的长。
- (2) 如图 2，请利用没有刻度的直尺和圆规，在线段  $AB$  上找一点  $F$ ，使得点  $F$  到边  $AC$  的距离等于  $FB$ （注：不写作法，保留作图痕迹，对图中涉及到的点用字母进行标注）



25. 如图，矩形  $ABCD$  中， $AB=2$ ， $AD=4$ ，动点  $E$  在边  $BC$  上，与点  $B$ 、 $C$  不重合，过点  $A$  作  $DE$  的垂线，交直线  $CD$  于点  $F$ 。设  $DF=x$ ， $EC=y$ 。
- (1) 求  $y$  关于  $x$  的函数关系式，并写出  $x$  的取值范围。
- (2) 若点  $F$  在线段  $CD$  上，当  $CF=1$  时，求  $EC$  的长。
- (3) 若直线  $AF$  与线段  $BC$  延长线交于点  $G$ ，当  $\triangle DEB \sim \triangle GFD$  时，求  $DF$  的长。



26. 如果关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  ( $a \neq 0$ ) 有两个实数根, 且其中一个根为另一个根的 2 倍, 则称这样的方程为“倍根方程”. 例如, 一元二次方程的两个根是 2 和 4, 则方程  $x^2 - 6x+8=0$  就是“倍根方程”.

(1) 若一元二次方程  $x^2 - 3x+c=0$  是“倍根方程”, 求  $c$  的值;

(2) 若  $(x-2)(mx-n)=0$  ( $m \neq 0$ ) 是“倍根方程”, 求代数式  $4m^2 - 5mn+n^2$  的值;

(3) 若点  $(p, q)$  在反比例函数  $y=\frac{2}{x}$  的图象上, 请说明关于  $x$  的方程  $px^2+3x+q=0$  是“倍根方程”;

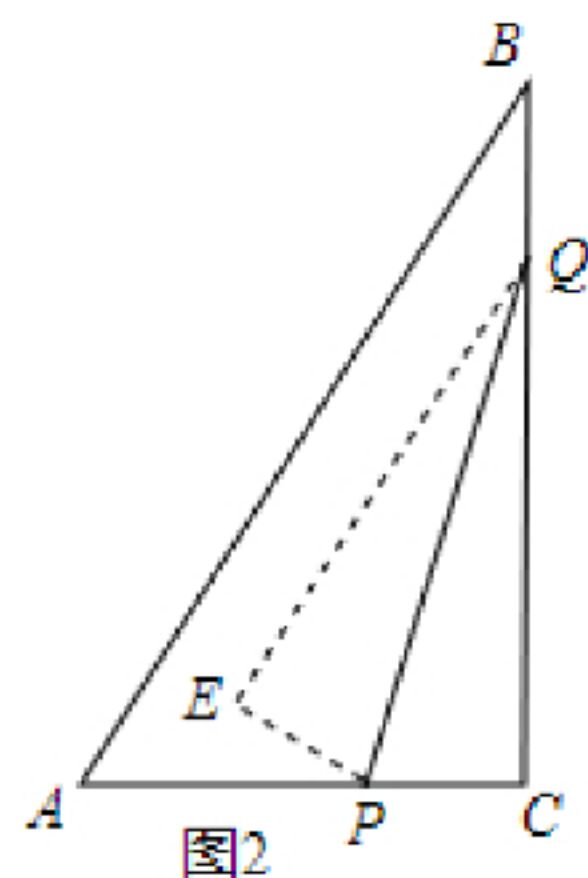
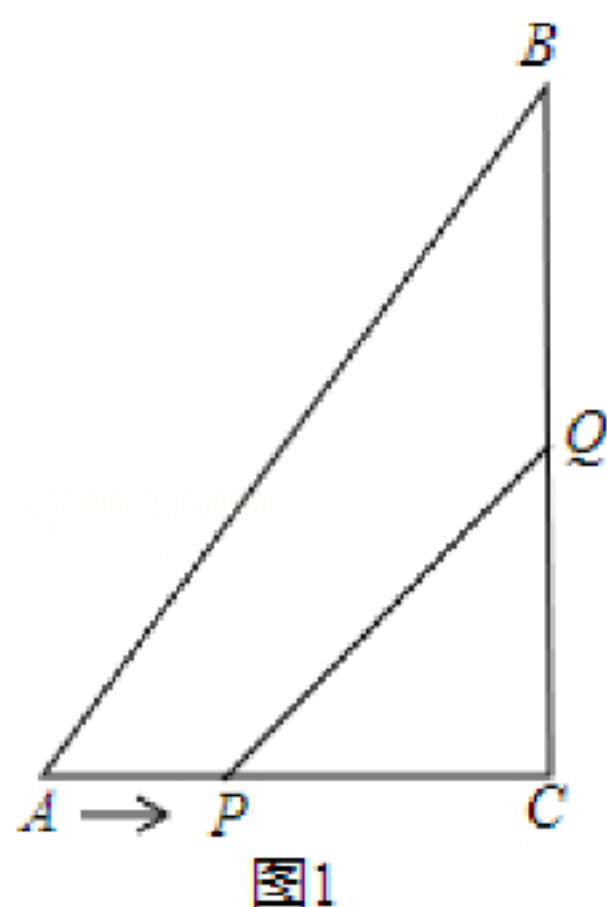
(4) 若关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2+bx+c=0$  ( $a \neq 0$ ) 是“倍根方程”, 请说明  $2b^2=9ac$ .

27. 如图 1, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $AC=6\text{cm}$ ,  $BC=8\text{cm}$ , 点  $P$  从  $A$  出发沿  $AC$  向  $C$  点以 1 厘米/秒的速度匀速移动; 点  $Q$  从  $C$  出发沿  $CB$  向  $B$  点以 2 厘米/秒的速度匀速移动. 点  $P$ 、 $Q$  分别从起点同时出发, 移动到某一位置时所需时间为  $t$  秒.

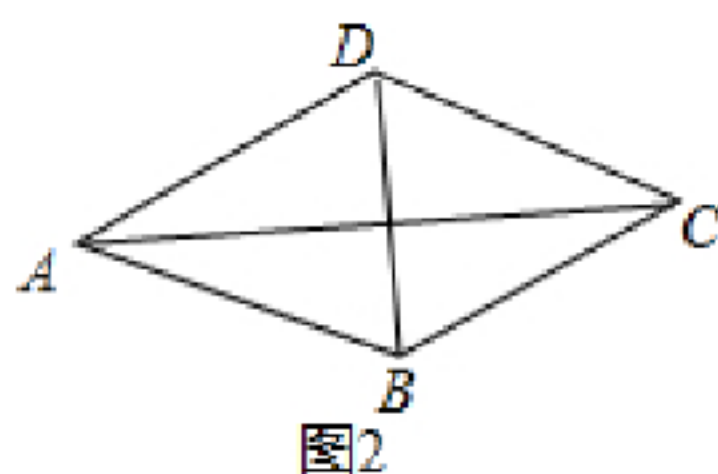
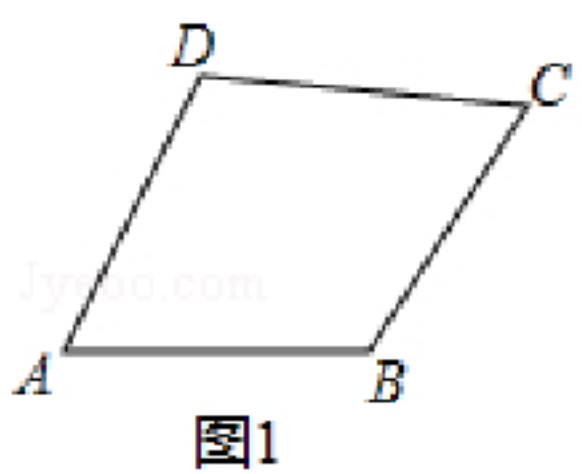
(1) 当  $t=2$  时, 求线段  $PQ$  的长度;

(2) 当  $t$  为何值时,  $\triangle PCQ$  的面积等于  $5\text{cm}^2$ ?

(3) 在  $P$ 、 $Q$  运动过程中, 在某一时刻, 若将  $\triangle PQC$  翻折, 得到  $\triangle EPQ$ , 如图 2,  $PE$  与  $AB$  能否垂直? 若能, 求出相应的  $t$  值; 若不能, 请说明理由.



28. 类比等腰三角形的定义，我们定义：有一组邻边相等的凸四边形叫做“等邻边四边形”。
- (1) 如图 1，在四边形  $ABCD$  中添加一个条件使得四边形  $ABCD$  是“等邻边四边形”。请写出你添加的一个条件。
- (2) 问题探究
- 小红提出了一个猜想：对角线互相平分且相等的“等邻边四边形”是正方形。她的猜想正确吗？请说明理由。
- (3) 如图 2，“等邻边四边形” $ABCD$  中， $AB=AD$ ， $\angle BAD+\angle BCD=90^\circ$ ， $AC, BD$  为对角线， $AC=\sqrt{2}AB$ 。试探究线段  $BC, CD, BD$  之间的数量关系，并证明你的结论。





# 九年级第一次月考模拟试卷(1)

## 参考答案与试题解析

### 一. 填空题(共 12 小题)

1. 解: 根据比例中项的概念结合比例的基本性质, 得: 比例中项的平方等于两条线段的乘积.  
设它们的比例中项是  $x$ , 则  $x^2 = 2 \times 8$ ,  $x = \pm 4$  (线段是正数, 负值舍去), 故填 4.

2. 解: 由比例的性质, 得

$$c = \frac{2}{3}a, \quad b = \frac{5}{6}a.$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\frac{5}{6}a + \frac{2}{3}a}{a} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{2}.$$

3. 解: 设平均每次降低成本的百分数是  $x$ .  
第一次降价后的价格为:  $100 \times (1 - x)$ , 第二次降价后的价格是:  $100 \times (1 - x) \times (1 - x)$ ,  
 $\therefore 100 \times (1 - x)^2 = 81$ ,  
解得  $x = 0.1$  或  $x = 1.9$ ,

$$\because 0 < x < 1,$$

$$\therefore x = 0.1 = 10\%,$$

答: 平均每次降低成本的百分数是 10%.

4. 解:  $(1+x)(x+3) = ax^2 + 1$ ,  
整理得:  $(a-1)x^2 - 4x - 2 = 0$ ,  
 $\because$  关于  $x$  的方程  $(1+x)(x+3) = ax^2 + 1$  是一元二次方程,

$$\therefore a - 1 \neq 0,$$

$$\text{解得: } a \neq 1,$$

故答案为:  $a \neq 1$ .

5. 解:  $\because DE \parallel BC$ ,

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\text{又} \because \frac{AD}{DB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{4}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BC = 12cm.$$

故答案为: 12cm.

6. 解: 根据题意得  $a \neq 0$  且  $\Delta = (-1)^2 - 4a(-\frac{1}{4}) \geq 0$ ,

$$\text{解得 } a \geq -1 \text{ 且 } a \neq 0;$$

故答案为  $a \geq -1$  且  $a \neq 0$ .

7. 解:  $\because$  一元二次方程  $x^2 + mx + 3 = 0$  的一个根为 -1, 设另一根为  $x_1$ , 由根与系数关系:  $-1 \cdot x_1 = 3$ , 解得  $x_1 = -3$ .

8. 解: 设  $x^2 + y^2 = t$  ( $t \geq 0$ ). 则原方程可化为:

$$t(t-2) = 3, \text{ 即 } (t-3)(t+1) = 0,$$

$$\therefore t-3=0 \text{ 或 } t+1=0,$$

$$\text{解得 } t=3, \text{ 或 } t=-1 \text{ (不合题意, 舍去);}$$

故答案是: 3.

9. 解: 方程  $x^2 - 10x + 21 = 0$ ,

$$\text{分解因式得: } (x-3)(x-7) = 0,$$

$$\text{解得: } x=3 \text{ 或 } x=7,$$

当  $x=3$  时, 三角形三边分别为 3cm, 4cm, 7cm,  $3+4=7$ , 不合题意, 舍去;

当  $x=7$  时, 三角形三边为 4cm, 7cm, 7cm, 此时周长为  $4+7+7=18cm$ ,

故答案为: 18

10. 解: 如图, 过  $G$  作  $GH \perp BC$  于  $H$ ,

$$\text{则 } \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\because \angle GHE = \angle EMN = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle GHE \sim \triangle EMN,$$

$$\therefore \frac{GH}{EM} = \frac{HE}{MN} = \frac{GE}{EN} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore GH = 3EM, \quad HE = 3MN,$$

$$\text{设 } MN = x, \text{ 则 } HE = 3x,$$

$$\therefore EM = 7 - 5x,$$

$$\therefore GH = 3EM = 3(7 - 5x),$$

$$\therefore 3(7 - 5x) + x = 7,$$

$$\text{解得: } x = 1,$$

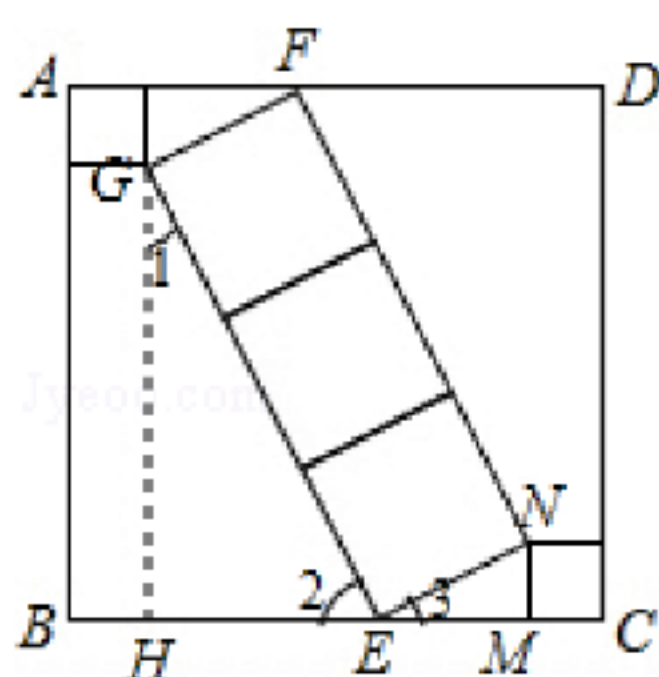
$$\therefore EM = 7 - 5x = 2,$$

$$\therefore EN = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore GE = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore \text{五个小正方形的面积之和} = 2 + 3\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 17,$$

故答案为: 17.



11. 解: 在  $\triangle MOC$  和  $\triangle NOA$  中,

$$\begin{cases} OA=OC \\ \angle MOC=\angle AON, \\ OM=ON \end{cases}$$

$\therefore \triangle MOC \cong \triangle NOA$  (SAS),

$\therefore \angle CMO = \angle ANO$ ,

$\because \angle CMO + \angle MCO = 90^\circ$ ,  $\angle MCO = \angle NCP$ ,

$\therefore \angle NCP + \angle CNP = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle MPN = 90^\circ$

$\therefore MP \perp NP$ ,

在正方形旋转的过程中, 同理可证,  $\therefore \angle CMO = \angle ANO$ , 可得  $\angle MPN = 90^\circ$ ,  $MP \perp NP$ ,

$\therefore P$  在以  $MN$  为直径的圆上,

$\because M(-8, 0), N(0, 8)$ ,

$\therefore$  圆心  $G$  为  $(-4, 4)$ , 半径为  $4\sqrt{2}$ ,

$\because PG - GC \leq PC$ ,

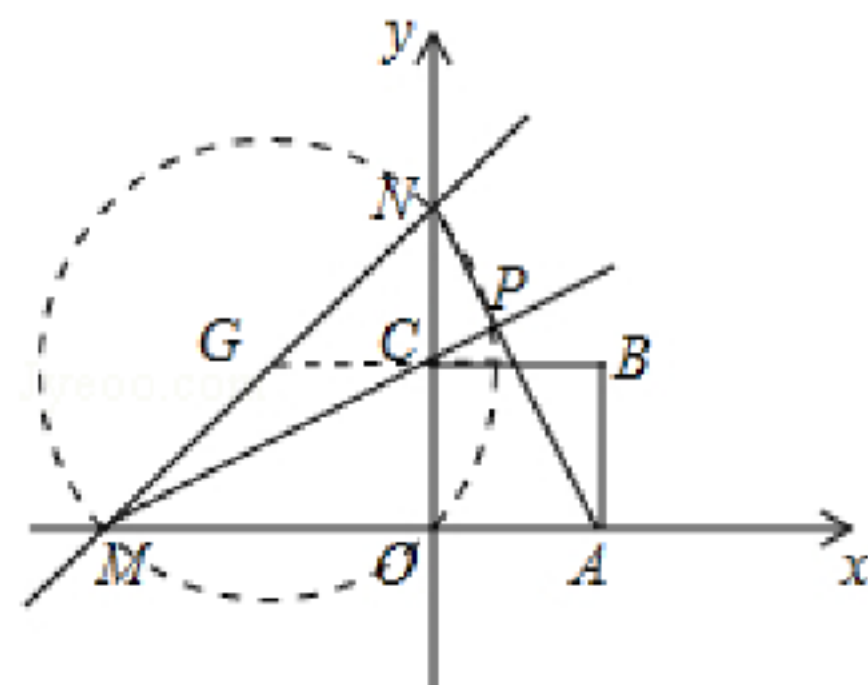
$\therefore$  当圆心  $G$ , 点  $P$ , 点  $C$  三点共线时,  $PC$  最小,

$\because GN = GM, CN = CO = 4$ ,

$\therefore GC = \frac{1}{2}OM = 4$ ,

这个最小值为  $GP - GC = 4\sqrt{2} - 4$ .

故答案为  $4\sqrt{2} - 4$ .



12. 解: 当  $PC \parallel OA$  时,  $\triangle BPC \sim \triangle BOA$ ,

由点  $C$  是  $AB$  的中点, 可得  $P$  为  $OB$  的中点, 此时  $P$  点坐标为  $(0, 3)$ ;

当  $PC \parallel OB$  时,  $\triangle ACP \sim \triangle ABO$ ,

由点  $C$  是  $AB$  的中点, 可得  $P$  为  $OA$  的中点, 此时  $P$  点坐标为  $(4, 0)$ ;

当  $PC \perp AB$  时, 如图,

$\because \angle CAP = \angle OAB$ ,

$\therefore \text{Rt}\triangle APC \sim \text{Rt}\triangle ABO$ ,

$$\therefore \frac{AC}{OA} = \frac{AP}{AB},$$

$\because$  点  $A(8, 0)$  和点  $B(0, 6)$ ,

$$\therefore AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10,$$

$\because$  点  $C$  是  $AB$  的中点,

$\therefore AC = 5$ ,

$$\therefore \frac{5}{8} = \frac{AP}{10},$$

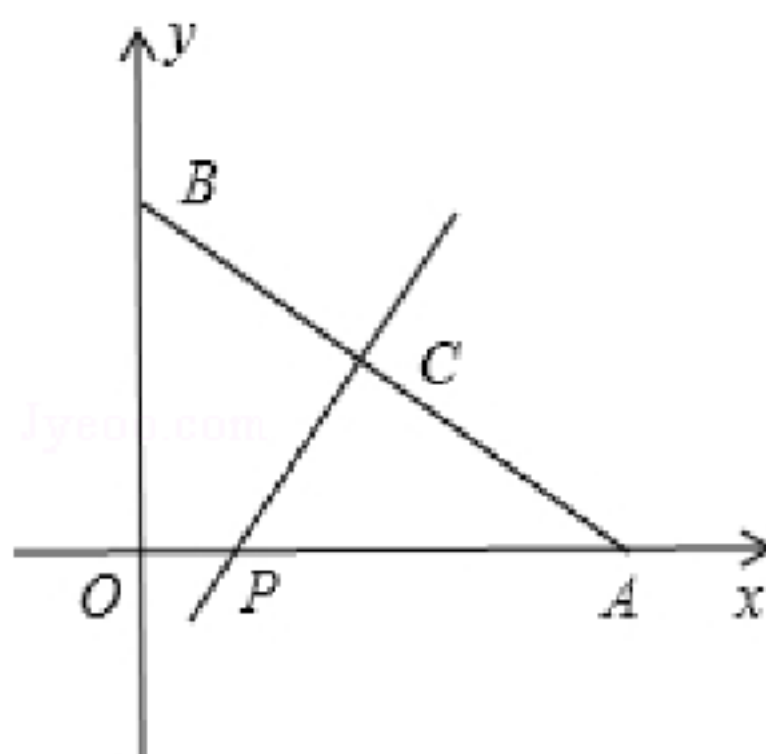
$$\therefore AP = \frac{25}{4},$$

$$\therefore OP = OA - AP = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4},$$

此时  $P$  点坐标为  $(\frac{7}{4}, 0)$ ,

综上所述, 满足条件的  $P$  点坐标为  $(0, 3)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(\frac{7}{4}, 0)$ .

故答案为:  $(0, 3)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(\frac{7}{4}, 0)$



二. 选择题 (共 6 小题)

13. 解: 根据题意得:  $a^2 - 1 = 0$  且  $a - 1 \neq 0$ ,

解得:  $a = -1$ .

故选: B.

14. 解: 设它的实际长度为  $x$ , 则:

$$\frac{1}{8000} = \frac{25}{x}$$

$$x = 200000 \text{ cm} = 2000 \text{ m}.$$

故选: D.

15. 解: A.  $ax^2 + bx + c = 0$  中不能确定  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的值, 所以不能确定是否是一元二次方程, 此选项错误;

B.  $x^2 + \frac{1}{2x} - 9 = 0$  不是整式方程, 不是一元二次



方程，此选项错误；

C.  $x^2=0$  是一元二次方程，此选项正确；

D.  $xy+2=1$  含有 2 个未知数，不是一元二次方程，此选项错误；

故选：C.

16. 解：∵  $DE \parallel BC$ ,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore DE:BC=AD:AB=1:2,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=1:4,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE}:S_{\text{四边形}DBCE}=1:3,$$

故选：C.

17. 解：在  $\square ABCD$  中， $\angle C=120^\circ$ ,

$$\therefore \angle ABC=60^\circ,$$

$$\therefore AB=AE,$$

∴  $\triangle ABE$  是等边三角形，

$$\therefore BE=AB=5,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{BE} = \frac{AF}{FE} = 2,$$

$$\therefore BC=10,$$

故选：C.

18. 解：以点  $E$  为圆心， $AE$  长度为半径作圆，连接  $CE$ ，当点  $A'$  在线段  $CE$  上时， $A'C$  的长取最小值，如图所示.

根据折叠可知： $A'E=AE=\frac{1}{2}AB=1$ .

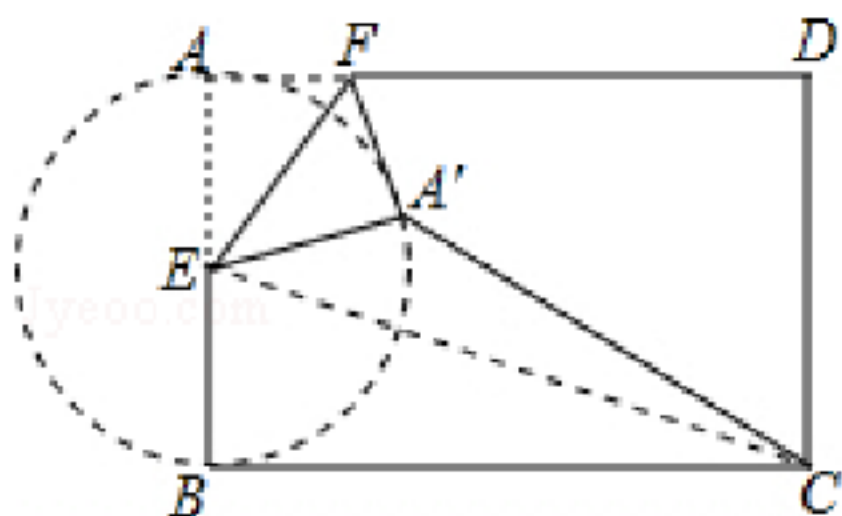
在  $\text{Rt}\triangle BCE$  中， $BE=\frac{1}{2}AB=1$ ， $BC=3$ ， $\angle B=$

$90^\circ$ ,

$$\therefore CE = \sqrt{BE^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore A'C \text{ 的最小值} = CE - A'E = \sqrt{10} - 1.$$

故选：A.



### 三. 解答题 (共 10 小题)

19. 解：(1) ∵  $4x^2 - 9 = 0$ ,

$$\therefore x^2 = \frac{9}{4},$$

$$\text{则 } x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{2};$$

$$(2) \because 3x^2 - 4x - 1 = 0,$$

$$\therefore a=3, b=-4, c=-1,$$

$$\text{则 } \Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 28 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3},$$

$$\text{即 } x_1 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{2-\sqrt{7}}{3};$$

$$(3) \because x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\therefore x^2 - 2x = 3,$$

$$\text{则 } x^2 - 2x + 1 = 3 + 1, \text{ 即 } (x-1)^2 = 4,$$

$$\therefore x-1=2 \text{ 或 } x-1=-2,$$

$$\text{解得 } x_1=3, x_2=-1;$$

$$(4) \because 2(x-3)^2 + x(x-3) = 0,$$

$$\therefore (x-3)(3x-6) = 0,$$

$$\text{则 } x-3=0 \text{ 或 } 3x-6=0,$$

$$\text{解得 } x_1=3, x_2=2.$$

20. (1) 证明：∵  $\Delta = (m+3)^2 - 8(m+1)$

$$= m^2 - 2m + 1$$

$$= (m-1)^2,$$

$$\therefore (m-1)^2 \geq 0,$$

$$\therefore \Delta \geq 0,$$

∴ 当  $m \neq -1$  时，方程总有实数根；

$$(2) \text{ 解：解方程得， } x = \frac{(m+3) \pm (m-1)}{2(m+1)},$$

$$x_1=1, x_2=\frac{2}{m+1},$$

∵ 方程有两个不相等的正整数根， $m$  为整数，

$$\therefore m=0,$$

故  $m$  为 0 时，方程有两个不相等的正整数根.

21. 解：(1) 月销售量为  $500 - 5 \times 10 = 450$  千克，

$$\text{月利润为 } (55 - 40) \times 450 = 6750 \text{ 元.}$$

(2) 设单价应定为  $x$  元，

$$\text{得 } (x - 40)[500 - 10(x - 50)] = 8000,$$

$$\text{解得： } x_1=60, x_2=80.$$

当  $x=60$  时，月销售成本为 16000 元，不合题意舍去.

$$\therefore x=80.$$

答：销售单价应定为 80 元/千克.

22. 证明：(1) ∵  $AB \perp l, DE \perp l$ ,

$$\therefore \angle ABC = \angle CED = 90^\circ, \angle ACB + \angle BAC = 90^\circ,$$

$\because \angle ACD = 90^\circ$  ,  
 $\therefore \angle ACB + \angle DCE = 90^\circ$  ,  
 $\therefore \angle BAC = \angle DCE$  ,  
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle CED$  ;

(2) 如图, 连接  $AC$  ,  
 $\because \angle ABC = 90^\circ$  ,  
 $\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  ,  
 $\because AD = 5\sqrt{5}$  ,  $CD = 10$  ,  
 $\therefore \triangle ACD$  满足  $AC^2 + CD^2 = AD^2$  ,  
 $\therefore \angle ACD = 90^\circ$  ,

如图, 过点  $D$  作  $DE \perp BC$  延长线于点  $E$ ,

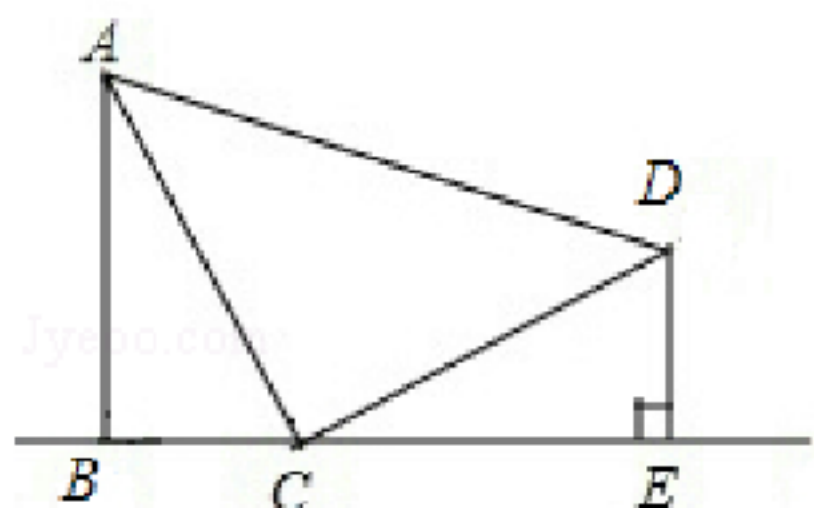


图1

由 (1) 得此时  $\triangle ABC \sim \triangle CED$ ,

$$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{CD}{AC} = 2,$$

$$\therefore CE = 6, DE = 8,$$

在  $\text{Rt} \triangle BDE$  中,  $BD =$

$$\sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{(4+6)^2 + 8^2} = 2\sqrt{41}.$$

23. 解: (1)  $\because AD = 4$ ,  $BD = 2$ ,  $AE = 2$ ,  $CE = 10$ ,

$$\therefore AB = 6, AC = 12,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3} = \frac{AD}{AC},$$

$$\because \angle A = \angle A,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ACB;$$

$$(2) \because \triangle ADE \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3},$$

$$\because BC = 9,$$

$$\therefore DE = 3.$$

24. 解: (1) 在  $\text{Rt} \triangle ABC$  中,  $AC = 4$ ,  $BC = 3$ ,

$$\therefore AB = 5,$$

$$\because DE \perp AC, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\text{即 } \frac{5-AD}{3} = \frac{AD}{5},$$

$$\text{解得 } AD = \frac{25}{8},$$

$$\text{故 } AD \text{ 的长为 } \frac{25}{8}.$$

(2) 如图 2 所示, 作  $\angle B$  的平分线  $BG$ , 交  $AC$  于  $G$ , 作  $BG$  的垂直平分线  $MN$ , 交  $AB$  于  $F$ , 则点  $F$  即为所求.

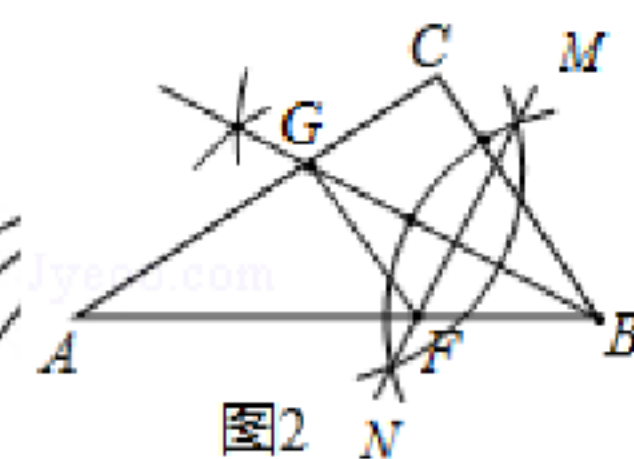


图2

25. 解: (1) 如图 1,

$\because$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$$\therefore DC = AB = 2, \angle ADC = \angle BCD = 90^\circ.$$

又  $\because AF \perp DE$ ,

$$\therefore \angle ADF = \angle DCE = 90^\circ, \angle DAF = \angle EDC = 90^\circ - \angle DFA,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{DF}{CE},$$

$$\therefore \frac{4}{2} = \frac{x}{y}, \text{ 即 } y = \frac{1}{2}x.$$

$\because$  点  $E$  在线段  $BC$  上, 与点  $B$ 、 $C$  不重合,

$$\therefore 0 < y < 4,$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{2}x < 4, \text{ 即 } 0 < x < 8,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x, (0 < x < 8);$$

(2) 点  $F$  在线段  $DC$  上时,  $\because CF = 1$ ,

$$\therefore DF = x = 2 - 1 = 1, \text{ 此时 } CE = y = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2};$$

(3) 在  $\text{Rt} \triangle ADF$  中,  $AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} =$

$$\sqrt{16 + x^2},$$

在  $\text{Rt} \triangle DCE$  中,  $DE = \sqrt{EC^2 + DC^2} =$



$$\frac{1}{2}\sqrt{16+x^2},$$

∵ 四边形  $ABCD$  是矩形,

∴  $AD \parallel BC$ ,

∴  $\triangle ADF \sim \triangle GCF$ ,

$$\therefore \frac{AF}{GF} = \frac{DF}{CF},$$

$$\therefore FG = \frac{CF \cdot FA}{DF} = \frac{2-x}{x} \cdot \sqrt{x^2+16}.$$

∵  $\angle DEC = \angle AFD = 90^\circ - \angle EDC$ ,

∴  $\angle BED = \angle DFG$ ,

∴ 当  $\triangle DBE$  与  $\triangle DFG$  相似时, 可分以下两种情况讨论:

∵  $\triangle DEB \sim \triangle GFD$ , 如图 2,

$$\text{则有 } \frac{ED}{EB} = \frac{FG}{FD},$$

$$\therefore ED \cdot FD = FG \cdot EB,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2+16} \cdot x = \frac{2-x}{x} \cdot \sqrt{x^2+16} \cdot (4 - \frac{1}{2}x),$$

$$\text{解得: } x = \frac{8}{5}.$$

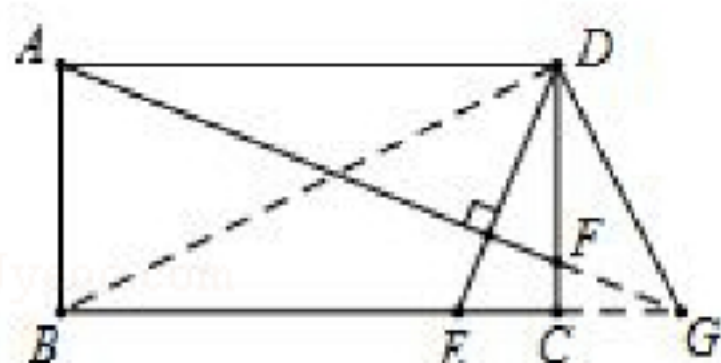


图2

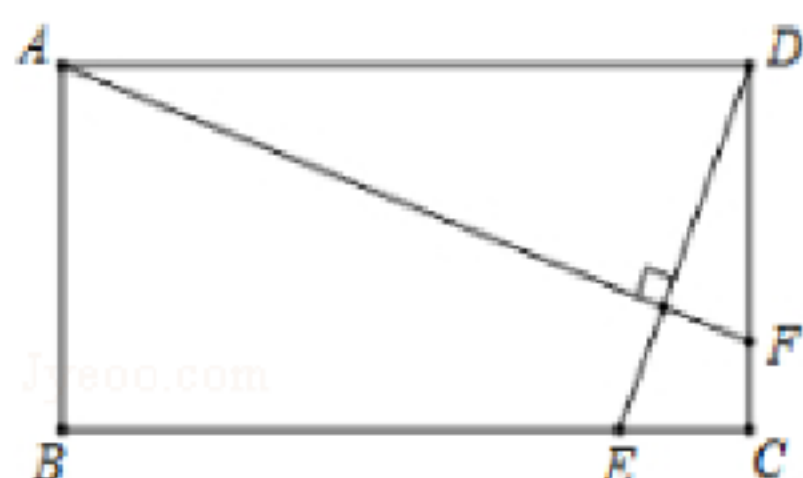


图1

26. 解: (1) 设一元二次方程  $x^2 - 3x + c = 0$  的一个根为  $x_1$ , 则另一个根为  $2x_1$ ,

由根与系数的关系得,  $x_1 + 2x_1 = 3$ ,

∴  $x_1 = 1$ , 即一个根为 1, 而另一个根为 2,

∴  $c = 1 \times 2 = 2$ ,

答:  $c$  的值为 2.

(2) 方程  $(x-2)(mx-n)=0$  的一个根为 2, 则另一个根为 1 或 4,

当另一个根为 1 时, 则  $-1 \times (m-n) = 0$ , ∴  $m$

$-n=0$ ,

当另一个根为 4 时, 则  $2 \times (4m-n) = 0$ , ∴  $4m$

$-n=0$ ,

∴  $4m^2 - 5mn + n^2 = (m-n)(4m-n) = 0$ ,

答: 代数式  $4m^2 - 5mn + n^2$  的值为 0.

(3) ∵ 点  $(p, q)$  在反比例函数  $y = \frac{2}{x}$  的图象上,

∴  $pq = 2$ ,

关于  $x$  的方程  $px^2 + 3x + q = 0$  的根为  $x =$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9-4pq}}{2p} = \frac{-3 \pm 1}{2p},$$

$$\text{即: } x_1 = \frac{-2}{p}, x_2 = \frac{-1}{p},$$

∴  $x_1 = 2x_2$ ,

因此是“倍根方程”.

(4) 由求根公式得,  $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ,  $x_2 =$

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

若  $x_1 = 2x_2$ , 则  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\times 2$ ,

化简得:  $2b^2 = 9ac$ .

若  $2x_1 = x_2$ , 则  $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times 2 =$

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

化简得:  $2b^2 = 9ac$ .

因此, 当关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 是“倍根方程”时, 总有  $2b^2 = 9ac$ .

27. 解:

(1) 当  $t = 2$  时,

∵ 点  $P$  从  $A$  出发沿  $AC$  向  $C$  点以 1 厘米/秒的速度匀速移动; 点  $Q$  从  $C$  出发沿  $CB$  向  $B$  点以 2 厘米/秒的速度匀速移动,

∴  $AP = 2$  厘米,  $QC = 4$  厘米,

∴  $PC = 4$ , 在  $\text{Rt}\triangle PQC$  中  $PQ = \sqrt{AP^2 + QC^2} = 4\sqrt{2}$  厘米;

(2) ∵ 点  $P$  从  $A$  出发沿  $AC$  向  $C$  点以 1 厘米/



秒的速度匀速移动；点  $Q$  从  $C$  出发沿  $CB$  向  $B$  点以 2 厘米/秒的速度匀速移动，

$$\therefore PC = AC - AP = 6 - t, \quad CQ = 2t,$$

$$\therefore S_{\triangle CPQ} = \frac{1}{2} CP \cdot CQ = \frac{(6-t) \cdot 2t}{2} = 5,$$

$$\therefore t^2 - 6t + 5 = 0$$

解得  $t_1 = 1, t_2 = 5$  (不合题意, 舍去)

$\therefore$  当  $t = 1$  秒时,  $\triangle PCQ$  的面积等于  $5\text{cm}^2$ ;

(3) 能垂直, 理由如下:

延长  $QE$  交  $AC$  于点  $D$ ,

$\therefore$  将  $\triangle PQC$  翻折, 得到  $\triangle EPQ$ ,

$$\therefore \triangle QCP \cong \triangle QEP,$$

$$\therefore \angle C = \angle QEP = 90^\circ,$$

若  $PE \perp AB$ , 则  $QD \parallel AB$ ,

$$\therefore \triangle CQD \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{CQ}{BC} = \frac{QD}{AB},$$

$$\therefore \frac{2t}{8} = \frac{QD}{10},$$

$$\therefore QD = 2.5t,$$

$$\therefore QC = QE = 2t$$

$$\therefore DE = 0.5t$$

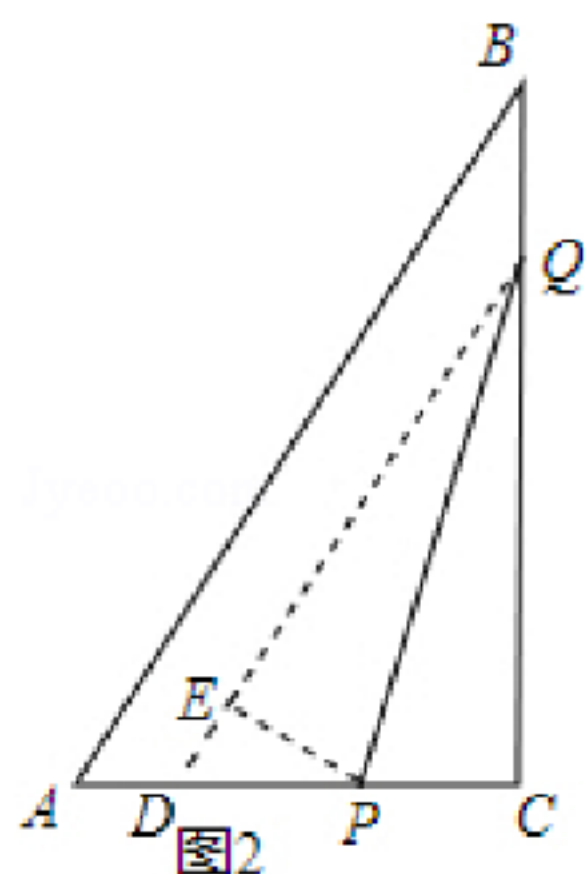
易证  $\triangle ABC \sim \triangle DPE$ ,

$$\therefore \frac{DE}{AC} = \frac{PE}{BC}$$

$$\therefore \frac{0.5t}{6} = \frac{6-t}{8},$$

$$\text{解得: } t = \frac{18}{5} \quad (0 \leq t \leq 4),$$

综上所述: 当  $t = \frac{18}{5}$  时,  $PE \perp AB$ .



28. 解: (1)  $AB = BC$ ,

理由:  $\because$  四边形  $ABCD$  是凸四边形, 且  $AB = BC$ ,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是“等邻边四边形”.

(2) ①正确; 理由为:

$\because$  四边形的对角线互相平分且相等,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形

$\because$  四边形是“等邻边四边形”,

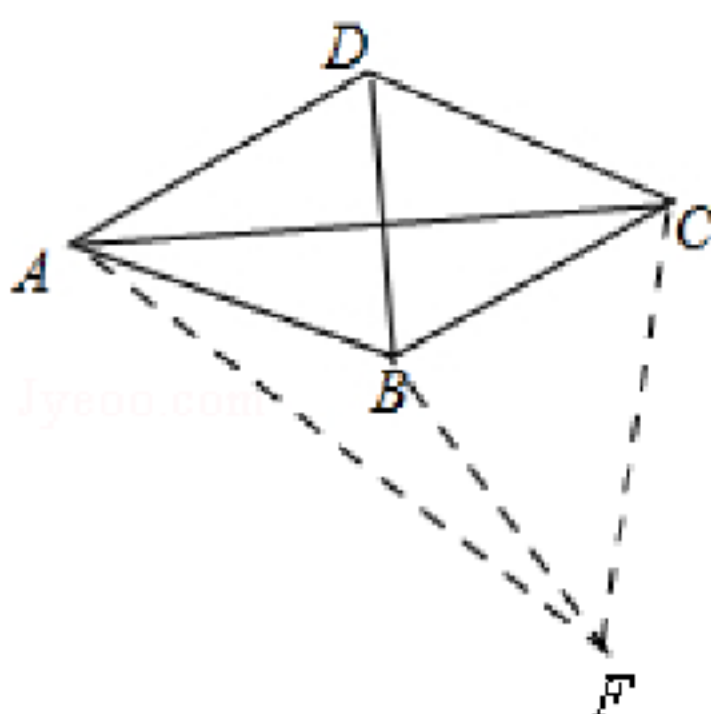
$\therefore$  这个四边形有一组邻边相等,

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是菱形

$\therefore$  对角线互相平分且相等的等邻边四边形是正方形,

$$(3) \quad BC^2 + CD^2 = 2BD^2$$

证明: 如图,



$\because AB = AD$ ,

$\therefore$  将  $\triangle ADC$  绕点  $A$  旋转到  $\triangle ABF$ , 连接  $CF$ ,

则  $\triangle ABF \cong \triangle ADC$ ,

$\therefore \angle ABF = \angle ADC, \angle BAF = \angle DAC, AF = AC$ ,

$FB = CD$ ,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAF, \quad \frac{AC}{AD} = \frac{AF}{AB},$$

$\therefore \triangle ACF \sim \triangle ABD$ ,

$$\therefore \frac{CF}{BD} = \frac{AC}{AB},$$

$$\because AC = \sqrt{2} AB,$$

$$\therefore CF = \sqrt{2} BD,$$

$$\because \angle BAD + \angle ADC + \angle BCD + \angle ABC = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 360^\circ - (\angle BAD + \angle BCD)$$

$$= 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ABF = 270^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF = 90^\circ,$$

$$\therefore BC^2 + FB^2 = CF^2 = (\sqrt{2} BD)^2 = 2BD^2$$

$$\therefore BC^2 + CD^2 = 2BD^2.$$