2020—2021 学年上学期教学质量检测

九年级数学试卷（北师大版）

（考试时间：120 分钟　满分：150 分）

友情提示：请把所有答案填涂到答题纸上！请不要错位、越界答题！

注意：在解答题中，凡是涉及到画图，可先用铅笔画在答题纸上，然后必须用黑色签字笔重描确认，否则无效．

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请在答题纸的相应位置填涂．

1. 若 $x:y=3:2$，则 $\frac{x-y}{y}$ 的值为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 2

2. 下列图形是中心对称图形，但不是轴对称图形的是

A. 平行四边形　　B. 正方形　　C. 矩形　　D. 菱形

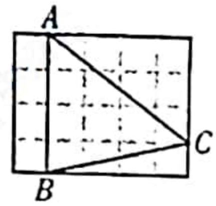
3. 一元二次方程 $x^2-2x-3=0$ 配方后可变形为

A. $(x-1)^2=2$　　B. $(x-1)^2=4$　　C. $(x-1)^2=1$　　D. $(x-1)^2=7$

4. 反比例函数 $y=\frac{1-m}{x}$ 的图象在第一、第三象限，则 m 的值可以是

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 如图，在 5×4 的正方形网格中，每个小正方形的边长都是 1，$\triangle ABC$ 的顶点都在网格的格点上，则 $\cos\angle BAC$ 的值为



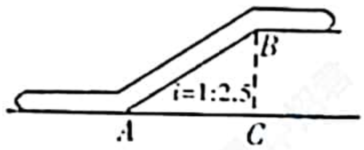
A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

6. 若点 $(-2,y_1)$，$(-3,y_2)$，$(2,y_3)$ 都在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 图象上，则 y_1,y_2,y_3 的大小关系为

A. $y_3>y_1>y_2$　　B. $y_1>y_3>y_2$

C. $y_3>y_2>y_1$　　D. $y_1>y_2>y_3$

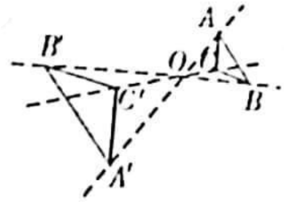
7. 如图，某商店营业大厅自动扶梯 AB 的坡度为 $i=1:2.5$，过点 B 作 $BC\perp AC$，垂足为点 C．若大厅水平距离 AC 的长为 7.5 m，则两层之间的高度 BC 为



A. 3m　　B. 4m

C. 5m　　D. 6m

如图，以点 O 为位似中心，把 $\triangle ABC$ 放大 2 倍得到 $\triangle A'B'C'$，则以下说法中错误的是



A. $AB \parallel A'B'$　　B. $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

C. $AO : AA' = 1 : 2$　　D. 点 C,O,C' 三点在同一直线上

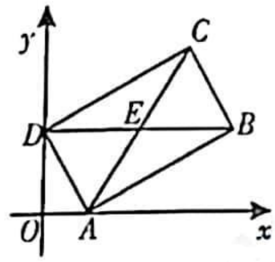
9. 已知 y 是 x 的二次函数，y 与 x 的部分对应值如右表所示，若该二次函数图象向左平移后通过原点，则应平移

x	…	-1	0	1	2	…
y	…	0	3	4	3	…

A. 1 个单位　　B. 2 个单位

C. 3 个单位　　D. 4 个单位

10. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABCD$ 的对角线 $BD \parallel x$ 轴，若 $A(1,0)$，$D(0,2)$，则点 C 的坐标为



A. $(4,3)$　　B. $(4,4)$

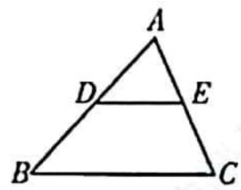
C. $(3,4)$　　D. $(2.5,4)$

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案填入答题纸的相应位置．

11. 若 $\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则锐角 $A =$ ________度．

12. 若正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 的长为 4，则该正方形的面积为________．

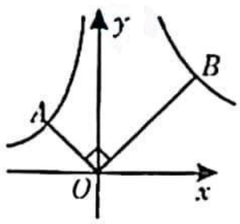
13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别为 AB，AC 边上的中点，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADE$ 的周长的比值是________．



14. 若关于 x 的方程 $x^2 + mx - n = 0$ 有一个根是 3，则 $3m - n$ 的值是______．

15. 从 $-1,2,3,-6$ 这四个数中任取两数，积为 6 的概率是______．

16. 如图，点 A 在双曲线 $y = -\dfrac{2}{x}(x < 0)$ 上，连接 OA，作 $OB \perp OA$，交双曲线 $y = \dfrac{k}{x}(k > 0)$ 于点 B，若 $OB = 2OA$，则 k 的值为________．



三、解答题：本大题共 9 小题，共 86 分．请在答题纸的相应位置解答．

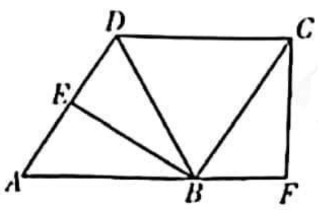
17.（本小题满分 8 分）

解方程：$x^2 + 2x = 0$．

18.（本小题满分 8 分）

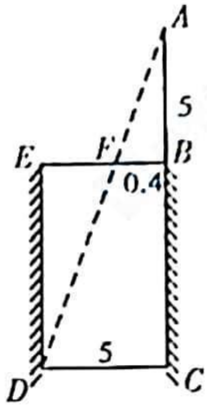
如图，在 $▱ABCD$ 中，过点 B 作 $BE \perp AD$，垂足为 E，过点 C 作 $CF \perp AB$，交 AB 的延长线于点 F，$BE = CF$．

求证：四边形 $ABCD$ 是菱形．



（本小题满分 8 分）

我国古代数学著作《九章算术》中有"井深几何"问题："今有井径五尺，不知其深，立五尺木于井上，从木末望水岸，入径四寸，问井深几何？"它的大意是：如图，已知四边形 $BCDE$ 是矩形，$CD=5$ 尺，$AB=5$ 尺，$BF=0.4$ 尺，求井深 BC 为多少尺？

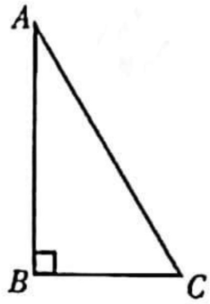


.（本小题满分 8 分）

如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$.

(1) 求作点 D，使四边形 $ABCD$ 是矩形；（要求：尺规作图，不写作法，保留作图痕迹）

(2) 在(1)的条件下，连接 BD，若 $AB=3$，$\tan\angle BAC=\frac{1}{3}$，求 BD 的长.



.（本小题满分 8 分）

新冠疫情期间，某校有"录播"和"直播"两种教学方式供学生自主选择其中一种进行居家线上学习．为了了解该校学生线上学习参与度情况，从选择这两种教学方式的学生中，分别随机抽取 50 名进行调查，调查结果如下表(数据分组包含左端值不包含右端值).

参与度 / 人数 / 方式	0~20%	20%~50%	50%~80%	80%~100%
录播	5	18	14	13
直播	2	15	21	12

(1) 从选择教学方式为"录播"的学生中任意抽取 1 名学生，试估计该生的参与度不低于 50% 的概率；

(2) 若该校共有 1200 名学生，选择"录播"和"直播"的人数之比为 3 ∶ 5，试估计选择"录播"或"直播"参与度均在 20% 以下的共有多少人？

题满分 10 分）

阅读下面材料，并完成问题．

任意给定一个矩形 A，若存在另一个矩形 B，使它的周长和面积分别是矩形 A 的一半，则称矩形 A，B 是“兄弟矩形”．

探究：当矩形 A 的边长分别为 7 和 1 时，是否存在 A 的“兄弟矩形”B？

小亮同学是这样探究的：

设所求矩形的两边分别是 x 和 y，由题意，得 $\begin{cases} x+y=4, & ① \\ xy=\dfrac{7}{2}. & ② \end{cases}$

由①，得 $y=4-x$，③

把③代入②，得 $x(4-x)=\dfrac{7}{2}$，

整理，得 $2x^2-8x+7=0$．

$\because b^2-4ac=64-56=8>0$，

$\therefore A$ 的“兄弟矩形”B 存在．

（1）若已知矩形 A 的边长分别为 3 和 2，请你根据小亮的探究方法，说明 A 的“兄弟矩形”B 是否存在？

（2）若矩形 A 的边长为 m 和 n，当 A 的“兄弟矩形”B 存在时，求 m，n 应满足的条件．

23．（本小题满分 10 分）

平安路上，多“盔”有你．在“交通安全宣传月”期间，某商店销售一批头盔，进价为每顶 40 元，售价为每顶 68 元，平均每周可售出 100 顶．商店计划将头盔降价销售，每顶售价不高于 58 元，经调查发现：每降价 1 元，平均每周可多售出 20 顶．

（1）若该商店希望平均每周获利 4000 元，则每顶头盔应降价多少？

（2）商店降价销售后，决定每销售 1 顶头盔，就向某慈善机构捐赠 m 元（m 为整数，且 $1\le m<5$），帮助做“交通安全”宣传．捐赠后发现，该商店每周销售这种商品的利润仍随售价的增大而增大，求 m 的值．

本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle BAC=90^\circ$，点 D 在边 BC 上，且不与点 B，C 重合，以 AD 为边作正方形 $ADEF$，连接 CF.

(1) 如图 1，求证：$CF\perp BC$；

(2) 若直线 DE 与直线 CF 相交于点 P，$AC=8\sqrt{2}$，$CD=a$，求 CP 的长.

（用只含 a 的式子表示）

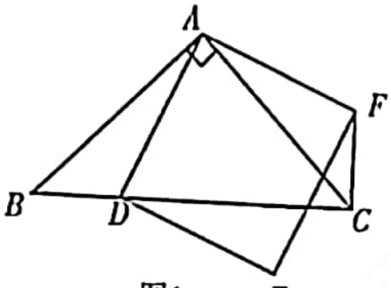


图1

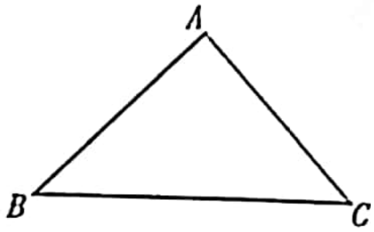


图2（备用）

25.（本小题满分 14 分）

已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 $A(-3,n)$，$B(2,n)$ 两点.

(1) 求 b 的值；

(2) 当 $-1<x<1$ 时，抛物线与 x 轴有且只有一个公共点，求 c 的取值范围；

(3) 若方程 $x^2+bx+c=0$ 的两实根 x_1，x_2 满足 $3\leqslant x_2-x_1<9$，且 $p={x_1}^2-3{x_2}^2$，求 p 的最大值.

2020－2021学年上学期教学质量检测

九年级数学参考答案及评分意见（北师大版）

一、选择题（共10小题，每小题4分，满分40分）

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答　案	B	A	B	A	D	D	A	C	C	B

二、填空题：本题共6小题，每小题4分，共24分.

11. 60　　12. 8　　13. 2　　14. -9　　15. $\frac{1}{3}$　　16. 8

三、解答题：本题共9小题，共86分.

17.（本小题满分8分）

解：方法一：

原方程可化为 $x(x+2)=0$. ………………………… 4分

$\therefore x_1=0, x_2=-2$. ………………………… 8分

方法二：

配方，得 $x^2+2x+1=0+1$，

即 $(x+1)^2=1$. ………………………… 3分

直接开平方，得 $x+1=\pm1$，………………………… 6分

$\therefore x_1=0, x_2=-2$. ………………………… 8分

18.（本小题满分8分）

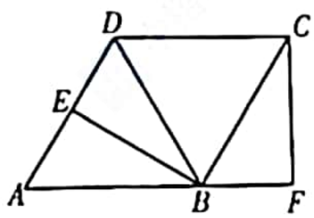
解：方法一：$\because$ 在 $\square ABCD$ 中，$BE\perp AD, CF\perp AB$，………………………… 1分

$\therefore S_{\square ABCD}=AB\cdot CF=AD\cdot BE$. ……………… 5分

$\because BE=CF$，………………………… 6分

$\therefore AB=AD$. ………………………… 7分

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形. ………………………… 8分



方法二：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD\parallel BC$. ………………………… 1分

$\therefore \angle A=\angle CBF$. ………………………… 2分

又 $\because BE\perp AD, CF\perp AB$，………………………… 3分

$\therefore \angle BEA=\angle CFB=90^\circ$. ………………………… 4分

$\because BE=CF$，………………………… 5分

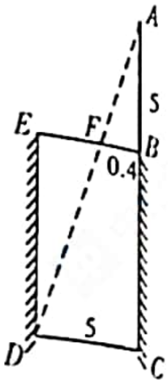
$\therefore \triangle ABE\cong\triangle BCF$. ………………………… 6分

$\therefore AB=BC$. ………………………… 7分

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形. ………………………… 8分

满分 8 分）

解：方法一：



$\because$ 四边形 $BCDE$ 是矩形，$\therefore BF \parallel CD$，

$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle ACD$，…………………………………… 2 分

$\therefore \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BF}{CD}$，…………………………………… 3 分

即 $AC = \dfrac{AB \cdot CD}{BF} = \dfrac{5 \times 5}{0.4} = 62.5$. …………………… 6 分

$\therefore BC = AC - AB$

$= 62.5 - 5$

$= 57.5$（尺）. …………………………………………………… 8 分

答：井深 BC 为 57.5 尺 .

方法二：

$\because$ 四边形 $BCDE$ 是矩形，$\therefore BF \parallel CD$，

$\therefore \triangle ABF \backsim \triangle DEF$，…………………………………………………… 2 分

$\therefore \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BF}{EF}$，…………………………………………………… 3 分

即 $DE = \dfrac{AB \cdot EF}{BF}$

$= \dfrac{5 \times (5 - 0.4)}{0.4} = 57.5$. …………………………………………… 6 分

$\therefore BC = DE = 57.5$（尺）. ………………………………………… 8 分

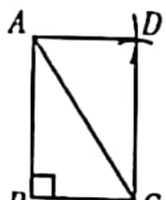
答：井深 BC 为 57.5 尺 .

20.（本小题满分 8 分）

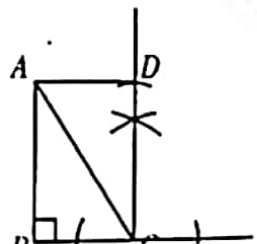
解：(1) 如图所示，………………… 3 分

四边形 $ABCD$ 就是所求作的矩形.

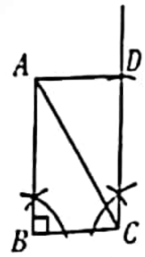
……………………………… 4 分



方法一



方法二



方法三

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，

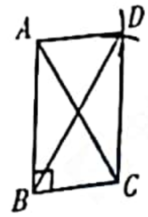
$\because AB = 3, \tan\angle BAC = \dfrac{1}{3}$，

$\therefore BC = 1$. …………………………………………… 5 分

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{10}$. ………………………… 7 分

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore BD = AC = \sqrt{10}$. …………………………………………… 8 分



满分 8 分)

解:(1) 估计该生的参与度不低于 50% 的概率为$\frac{14+13}{50}=\frac{27}{50}$; …………………… 3 分

(2) ∵ 选择"录播"的学生数为 $1200\times\frac{3}{3+5}=450$, …………………… 4 分

选择"直播"的学生数为 $1200\times\frac{5}{3+5}=750$. …………………… 5 分

∴ 选择"录播"参与度在 20% 以下的学生数为 $450\times\frac{5}{50}=45$, …………………… 6 分

选择"直播"参与度在 20% 以下的学生数为 $750\times\frac{2}{50}=30$. …………………… 7 分

$45+30=75$,

∴ 估计参与度均在 20% 以下的学生共有 75 人. …………………… 8 分

22.(本小题满分 10 分)

解:(1) 设所求矩形的两边分别是 x 和 y,由题意,得$\begin{cases} x+y=\frac{5}{2}, & ① \\ xy=3. & ② \end{cases}$ …………………… 2 分

由 ①,得 $y=\frac{5}{2}-x$, ③

把 ③ 代入 ②,得 $x(\frac{5}{2}-x)=3$,

整理,得 $2x^2-5x+6=0$, …………………… 3 分

$\because b^2-4ac=25-48=-23<0$, …………………… 4 分

∴ A 的"兄弟矩形"B 不存在. …………………… 5 分

(2) 设所求矩形的两边分别是 x 和 y,

由题意,得$\begin{cases} x+y=\frac{m+n}{2}, & ① \\ xy=\frac{mn}{2}. & ② \end{cases}$ …………………… 7 分

由 ①,得 $y=\frac{m+n}{2}-x$, ③

把 ③ 代入 ②,得 $x(\frac{m+n}{2}-x)=\frac{mn}{2}$,

整理,得 $2x^2-(m+n)x+mn=0$, …………………… 8 分

$\because b^2-4ac=(m+n)^2-8mn=m^2-6mn+n^2$, …………………… 9 分

又 ∵ x,y 都是正数,

∴ 当 $m^2-6mn+n^2\geq 0$ 时,A 的"兄弟矩形"B 存在. …………………… 10 分

23.（本小题满分 10 分）

解：(1) 设每顶头盔应降价 x 元.

根据题意，得 $(100+20x)(68-x-40)=4000$. ………………………… 2 分

解得 $x_1=3, x_2=20$. ………………………………………………………… 4 分

当 $x=3$ 时，$68-3=65$；

当 $x=20$ 时，$68-20=48$；

∵ 每顶售价不高于 58 元，∴ 每顶头盔应降价 20 元. ………………… 5 分

(2) 设每周扣除捐赠后可获得利润为 w 元，每顶头盔售价 a 元，根据题意，得

$w=[100+20(68-a)](a-40-m)$ ………………………………………… 7 分

$=-20a^2+(20m+2260)a-1460(40+m)$

∵ 抛物线对称轴为直线 $a=\dfrac{m+113}{2}$，开口向下，

当 $a\leqslant 58$ 时，利润仍随售价的增大而增大，

∴ $\dfrac{m+113}{2}\geqslant 58$，解得 $m\geqslant 3$. …………………………………… 8 分

∵ $1\leqslant m<5$，∴ $3\leqslant m<5$. …………………………………………… 9 分

∵ m 为整数，∴ $m=3$ 或 4. ……………………………………………… 10 分

24.（本小题满分 12 分）

解：(1) 如图 1，∵ 四边形 $ADEF$ 是正方形，

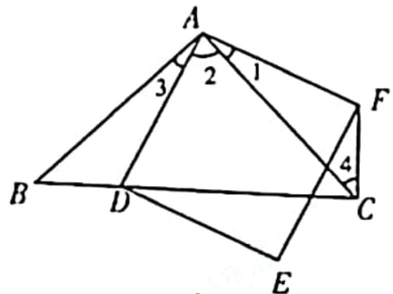


图1

∴ $\angle DAF=90°, AD=AF$. ……………………… 1 分

∴ $\angle 1+\angle 2=90°$.

∵ $\angle BAC=90°$，∴ $\angle 3+\angle 2=90°$.

∴ $\angle 1=\angle 3$. ………………………………… 2 分

∵ $AB=AC$，∴ $\triangle BAD\cong\triangle CAF$，…………… 3 分

∴ $\angle B=\angle 4$. ………………………………… 4 分

∵ $\angle BAC=90°$，∴ $\angle BCF=\angle 4+\angle ACB=\angle B+\angle ACB=90°$.

∴ $CF\perp DC$. ……………………………………………………… 5 分

(2) 作 $AQ\perp BC$ 于 Q.

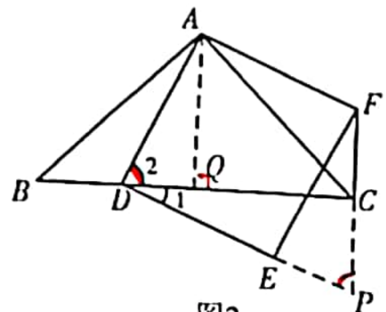


图2

∵ $\triangle BAC$ 是等腰直角三角形，$AC=8\sqrt{2}$，

∴ $AQ=CQ=8$. ……………………………… 6 分

① 如图2，当点 D 在 AQ 的左侧时，$a>8, DQ=a-8$.

∵ $\angle 1+\angle 2=90°, \angle P+\angle 1=90°$，

∴ $\angle 2=\angle P$.

∵ $\angle DQA=\angle PCD=90°$，

∴ $\triangle AQD\backsim\triangle DCP$，…………………………………………… 7 分

∴ $\dfrac{AQ}{DC}=\dfrac{DQ}{PC}$，即 $\dfrac{8}{a}=\dfrac{a-8}{PC}$，∴ $PC=\dfrac{1}{8}a^2-a$. ……………… 8 分

② 如图3，当点 D 在 AQ 的右侧时，$a<8$，$DQ=8-a$.

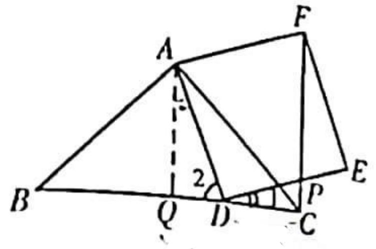


图3

$\because \angle 1+\angle 2=90°$，$\angle CPD+\angle 1=90°$，

$\therefore \angle 2=\angle CPD$.

$\because \angle DQA=\angle PCD=90°$，

$\therefore \triangle AQD \backsim \triangle DCP$， ………………………………… 9分

$\therefore \dfrac{AQ}{DC}=\dfrac{DQ}{PC}$，即 $\dfrac{8}{a}=\dfrac{8-a}{PC}$，

$\therefore PC=-\dfrac{1}{8}a^2+a$. ……………………………………………………………………… 10分

③ 如图4，当点 D 与点 Q 重合时，点 E,C,P 三点重合，

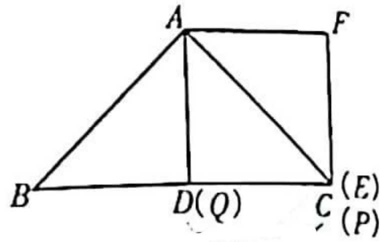


图4

此时 $CP=0$. ………………………………… 11分

综上所述，$PC=\dfrac{1}{8}a^2-a$ 或 $PC=-\dfrac{1}{8}a^2+a$ 或0.

……………………………………………………… 12分

25.（本小题满分14分）

解：(1) $\because$ 抛物线经过 $A(-3,n)$，$B(2,n)$ 两点，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………… 2分

$\therefore -\dfrac{b}{2}=-\dfrac{1}{2}$.

$\therefore b=1$. ……………………………………………………………………………… 4分

(2) 由(1)得，抛物线的解析式为 $y=x^2+x+c$，

$\because$ 对称轴为直线 $x=-\dfrac{1}{2}$，且当 $-1<x<1$ 时，

抛物线与 x 轴有且只有一个公共点，

① 当公共点是顶点时，

$\therefore \Delta=1-4c=0$，解得 $c=\dfrac{1}{4}$. ……………………………………………… 6分

② 当公共点不是顶点时，

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$1-1+c\leqslant 0$，且当 $x=1$ 时，$1+1+c>0$.

解得 $-2<c\leqslant 0$. ………………………………………………………………… 8分

综上所述，c 的取值范围是 $c=\dfrac{1}{4}$ 或 $-2<c\leqslant 0$. ………………………… 9分

(1) 知 $b=1$，设 $y=x^2+x+c$.

∵ 方程 $x^2+x+c=0$ 的两实根为 x_1,x_2，

∴ 抛物线 $y=x^2+x+c$ 与 x 轴交点的横坐标为 x_1,x_2，

∴ $\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{1}{2}$，即 $x_1+x_2=-1$. ………………………………………… 10 分

∴ $x_2=-1-x_1$.

∵ $3\leqslant x_2-x_1<9$，

∴ $3\leqslant(-1-x_1)-x_1<9$.

∴ $-5<x_1\leqslant-2$. ………………………………………………………… 11 分

∵ $p=x_1^2-3x_2^2$

$=x_1^2-3(-1-x_1)^2$

$=-2(x_1+\dfrac{3}{2})^2+\dfrac{3}{2}$. ……………………………………………… 12 分

∵ 当 $-5<x_1\leqslant-2$ 时，p 随 x_1 的增大而增大，……………………… 13 分

∴ 当 $x_1=-2$ 时，p 的最大值为 1. ………………………………………… 14 分

解法二：由(1)知 $b=1$.

∵ 方程 $x^2+x+c=0$ 的两实根为 x_1,x_2，

∴ $x_1^2+x_1+c=0$，即 $x_1^2=-x_1-c$，①

$x_2^2+x_2+c=0$，即 $x_2^2=-x_2-c$，②

①－②，得 $x_1^2-x_2^2=-(x_1-x_2)$，

∴ $(x_1+x_2)(x_1-x_2)=-(x_1-x_2)$.

∵ $3\leqslant x_2-x_1<9$，

∴ $x_1-x_2\neq0$.

∴ $x_1+x_2=-1$. ………………………………………………………………… 10 分

即 $x_1=-1-x_2$.

∴ $3\leqslant x_2-(-1-x_2)<9$

∴ $1\leqslant x_2<4$ ……………………………………………………………… 11 分

∴ $p=x_1^2-3x_2^2$

$=(-1-x_2)^2-3x_2^2$

$=-2(x_2-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{2}$ ……………………………………………… 12 分

∵ 当 $1\leqslant x_2<4$ 时，p 随 x_2 的增大而减少，…………………………… 13 分

∴ 当 $x_2=1$ 时，p 最大值为 1. ……………………………………………… 14 分