

# 2020—2021 学年度第一学期素养形成期末测试

## 初三数学

说明：本试卷考试时间为 120 分钟，满分 120 分

题号	一	二	三	总分
得分				

评卷人	
得分	

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案										

1. 下列各式是最简二次根式的是（ ）

A.  $\sqrt{13}$

B.  $\sqrt{12}$

C.  $\sqrt{a^2}$

D.  $\sqrt{\frac{5}{3}}$

2. 下列一元二次方程中，有两个不相等的实数根的是（ ）

A.  $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

B.  $x^2 + 2x + 4 = 0$

C.  $x^2 - x + 2 = 0$

D.  $x^2 - 2x = 0$

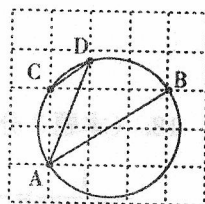
3. 如图，由边长为 1 的小正方形构成的网格中，点 A、B、C 都在格点上，以 AB 为直径的圆经过点 C、D. 则  $\sin \angle ADC$  的值为（ ）

A.  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

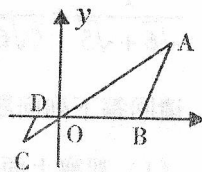
B.  $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

C.  $\frac{2}{3}$

D.  $\frac{3}{2}$



4. 如图，在直角坐标系中， $\triangle OAB$  的顶点为  $O(0, 0)$ ， $A(4, 3)$ ， $B(3, 0)$ . 以点  $O$  为位似中心，在第三象限内作与  $\triangle OAB$  的位似比为  $\frac{1}{3}$  的位似图形  $\triangle OCD$ ，则点  $C$  坐标为（ ）



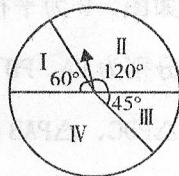
A.  $(-1, -1)$

B.  $(-\frac{4}{3}, -1)$

C.  $(-1, -\frac{4}{3})$

D.  $(-2, -1)$

5. 如图是一个游戏转盘，自由转动转盘，当转盘停止转动后，指针落在数字“II”所示区域内的概率是（ ）



A.  $\frac{1}{3}$

B.  $\frac{1}{4}$

C.  $\frac{1}{6}$

D.  $\frac{1}{8}$

6. 下列等式成立的是（ ）

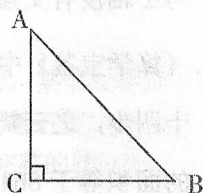
A.  $3+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

B.  $\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{5}$

C.  $\sqrt{3}\div\frac{1}{\sqrt{6}}=2\sqrt{3}$

D.  $\sqrt{(-3)^2}=3$

7. 如图， $Rt\triangle ABC$  中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=5$ ， $\cos A=\frac{4}{5}$ ，以点 B 为圆心， $r$  为半径作  $\odot B$ ，当  $r=3$  时， $\odot B$  与  $AC$  的位置关系是（ ）



- A. 相离      B. 相切      C. 相交      D. 无法确定

8. 三孔桥横截面的三个孔都呈抛物线，两小孔形状、大小完全相同。当水面刚好淹没小孔时，大孔水面宽度为 10 米，孔顶离水面 1.5 米；当水位下降，大孔水面宽度为 14 米时，单个小孔的水面宽度为 4 米。若大孔水面宽度为 20 米，则单个小孔的水面宽度为（ ）



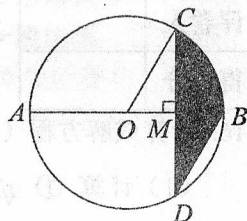
A.  $4\sqrt{3}$  米

B.  $5\sqrt{2}$  米

C.  $2\sqrt{13}$  米

D. 7 米

9. 如图， $AB$  是  $\odot O$  的直径，弦  $CD \perp AB$ ，垂足为点  $M$ ，连接  $OC$ ， $DB$ ，如果  $OC \parallel DB$ ， $OC=2\sqrt{3}$ ，那么图中阴影部分的面积是（ ）



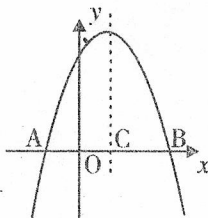
A.  $\pi$

B.  $2\pi$

C.  $3\pi$

D.  $4\pi$

10. 如图，抛物线的图象  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 与  $x$  轴交于 A、B 两点，其对称轴与  $x$  轴交于点 C，其中 A、C 两点的横坐标分别为 -1 和 1，下列说法错误的是（ ）



A.  $abc < 0$

B.  $16a+b+c < 0$

C.  $4a+c=0$

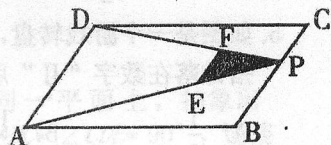
D. 当  $x > 2$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小

评卷人	
得分	

## 二、填空题（本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分）

11. 写出一个比  $\sqrt{2}$  大且比  $\sqrt{15}$  小的整数\_\_\_\_\_.

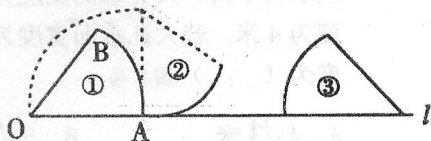
12. 如图, P 为平行四边形 ABCD 边 BC 边上一点, E、F 分别为 PA、PD 上的点, 且  $PA=3PE$ ,  $PD=3PF$ ,  $\triangle PEF$ 、 $\triangle PDC$ 、 $\triangle PAB$  的面积分别记为  $S$ 、 $S_1$ 、 $S_2$ , 若  $S=2$ , 则  $S_1+S_2=$ \_\_\_\_\_.



13. 在平面直角坐标系中, 已知  $A(-1, m)$  和  $B(5, m)$  是抛物线  $y=x^2+bx+1$  上的两点, 将抛物线  $y=x^2+bx+1$  的图象向上平移  $n$  ( $n$  是正整数) 个单位, 使平移后的图象与  $x$  轴没有交点, 则  $n$  的最小值为\_\_\_\_\_.

14. 《算学宝鉴》中记载了我国南宋数学家杨辉提出的一个问题: “直田积八百六十四步, 之云阔不及长一十二步, 问阔及长各几步?” 译文: “一个矩形田地的面积等于 864 平方步, 且它的宽比长少 12 步, 问长与宽各是多少步?” 若设矩形田地的宽为  $x$  步, 则可列方程为\_\_\_\_\_.

15. 如图, 放置在直线  $l$  上的扇形 OAB. 由图①滚动(无滑动)到图②, 再由图②滚动到图③. 若半径  $OA=2$ ,  $\angle AOB=45^\circ$ , 则点 O 所经过的最短路径的长是\_\_\_\_\_.



评卷人	
得分	

## 三、解答题（本大题共 8 个小题，共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

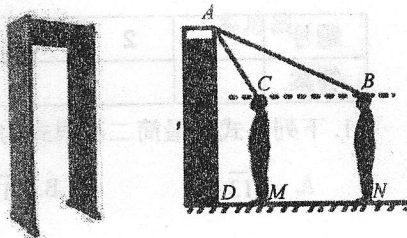
16. 计算或解方程（每小题 4 分，共 12 分）

(1) 计算 ①  $\sqrt[3]{-8} + |\sqrt{3}-1| - 2\sin 60^\circ + (\frac{1}{4})^0$

②  $(\sqrt{3}-1)^2 - (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

(2) 解方程  $2x^2 - 3x - 1 = 0$

17. (本题 6 分) 某医院为快速检测病人体温, 在医院门口安装了某型号测温门. 如图为该测温门截面示意图, 已知测温门 AD 的顶部 A 处距地面高为 2.2m, 为了解自己的有效测温区间身高 1.6m 的小聪做了如下实验: 当他在地面 N 处时测温门开始显示额头温度, 此时在额头 B 处测得 A 的仰角为  $18^\circ$ ; 在地面 M 处时, 测温门停止显示额头温度, 此时在额头 C 处测得 A 的仰角为  $60^\circ$ . 求小聪在地面的有效测温区间 MN 的长度. (额头到地面的距离以身高计, 计算精确到 0.1m,  $\sin 18^\circ \approx 0.31$ ,  $\cos 18^\circ \approx 0.95$ ,  $\tan 18^\circ \approx 0.32$ )



18. (本题 7 分) 阅读下列解题过程:

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{4}} = \frac{1 \times (\sqrt{5} - \sqrt{4})}{(\sqrt{5} + \sqrt{4})(\sqrt{5} - \sqrt{4})} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{4}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{4})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{1 \times (\sqrt{6} - \sqrt{5})}{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

请回答下列问题:

(1) 观察上面的解答过程, 请写出  $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$  \_\_\_\_\_;

(2) 利用上面的解法，请化简：

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}} + \frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2021}}$$

(3)  $\sqrt{12}-\sqrt{11}$  和  $\sqrt{13}-\sqrt{12}$  的值哪个较大，请说明理由。

19. (本题 10 分) 某水果商店销售一种进价为 40 元/千克的优质水果，若售价为 50 元/千克，则一个月可售出 500 千克；若售价在 50 元/千克的基础上每涨价 1 元，则月销售量就减少 10 千克。

(1) 当售价为 55 元/千克时，每月销售水果多少千克？

(2) 当月利润为 8750 元时，每千克水果售价为多少元？

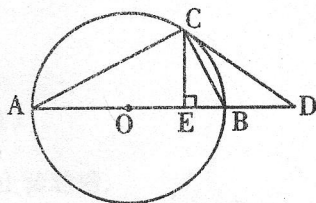
(3) 当每千克水果售价为多少元时，获得的月利润最大？



20. (本题8分) 如图, AB是 $\odot O$ 的直径, C为 $\odot O$ 上一点, 连接AC, CE $\perp$ AB于点E, D是直径AB延长线上一点, 且 $\angle BCE = \angle BCD$ .

(1) 求证: CD是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若AD=8,  $\frac{BE}{CE} = \frac{1}{2}$ , 求CD的长.



21. (本题 11 分) 为迎接 2020 年第 35 届全国青少年科技创新大赛, 某学校举办了 A: 机器人; B: 航模; C: 科幻绘画; D: 信息学; E: 科技小制作等五项比赛活动 (每人限报一项), 将各项比赛的参加人数绘制成如图两幅不完整的统计图.

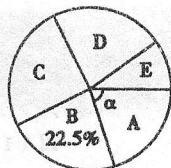
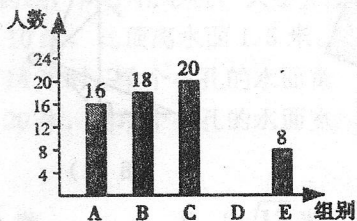
根据统计图中的信息解答下列问题:

(1) 本次参加比赛的学生人数是\_\_\_\_\_名;

(2) 把条形统计图补充完整;

(3) 求扇形统计图中表示机器人的扇形圆心角 $\alpha$ 的度数;

(4) 在 C 组最优秀的 3 名同学 (1 名男生 2 名女生) 和 E 组最优秀的 3 名同学 (2 名男生 1 名女生) 中, 各选 1 名同学参加上一级比赛, 利用树状图或表格, 求所选两名同学中恰好是 1 名男生 1 名女生的概率.



22. (本题 11 分) 实践与探索

小明将两个直角三角形纸片如图 (1) 那样拼放在同一平面上, 抽象出如图 (2) 的平面图形,  $\angle ACB$  与  $\angle ECD$  恰好为对顶角,  $\angle ABC = \angle CDE = 90^\circ$ , 连接  $BD$ ,  $AB = BD$ , 点  $F$  是线段  $CE$  上一点.

探究发现:

- (1) 当点  $F$  为线段  $CE$  的中点时, 连接  $DF$  (如图 (2)), 小明经过探究, 得出结论:  $BD \perp DF$ . 你认为此结论是否成立? \_\_\_\_\_. (填“是”或“否”)

拓展延伸:

- (2) 将 (1) 中的条件与结论互换, 即: 若  $BD \perp DF$ , 则点  $F$  为线段  $CE$  的中点. 请判断此结论是否成立. 若成立, 请写出证明过程; 若不成立, 请说明理由.

问题解决:

- (3) 若  $AB = 6$ ,  $CE = 9$ , 求  $AD$  的长.



图 (1)

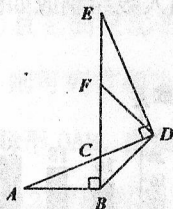
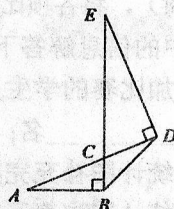


图 (2)



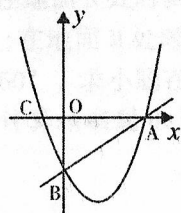
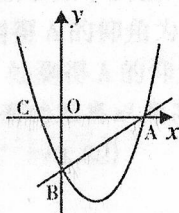
备用图

23. (本题 10 分) 如图, 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知直线  $y = \frac{1}{2}x - 2$  与  $x$  轴交于点 A, 与  $y$  轴交于点 B, 过 A、B 两点的抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于另一点 C(-1, 0).

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 在抛物线上是否存在一点 P, 使  $S_{\triangle PAB} = S_{\triangle OAB}$ ? 若存在, 请求出点 P 的坐标, 若不存在, 请说明理由;

(3) 点 M 为直线 AB 下方抛物线上一点, 点 N 为  $y$  轴上一点, 当  $\triangle MAB$  的面积最大时, 求  $MN + \frac{1}{2}ON$  的最小值.



备用图