

太原北大培文

2020~2021 学年初三年级第一学期 10 月月考试题

数 学

一. 选择题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 下列说法正确的是()

- A. 一组对边平行另一组对边相等的四边形是平行四边形
- B. 对角线互相垂直平分的四边形是菱形
- C. 对角线相等的四边形是矩形
- D. 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

【答案】 B

【考点】 特殊平行四边形的判定

【解析】

A : 一组对边平行另一组对边相等的四边形可以是等腰梯形, 可以是平行四边形, 故选项 A 不合题意;

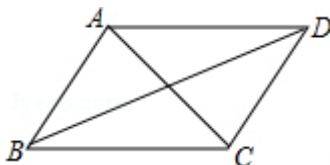
B : 对角线互相垂直平分的四边形是菱形, 故选项 B 符合题意;

C : 对角线相等的平行四边形是矩形, 故选项 C 不合题意;

D : 对角线互相垂直平分且相等的四边形是正方形, 故选项 D 不合题意;

故选: B .

2. 如图, 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 下列结论中不正确的是()



- A. 当 $AB = BC$ 时, 它是菱形
- B. 当 $AC \perp BD$ 时, 它是菱形
- C. 当 $\angle ABC = 90^\circ$ 时, 它是矩形
- D. 当 $AC = BD$ 时, 它是正方形

【答案】 D

【考点】 特殊平行四边形的判定

【解析】

解: A : 根据邻边相等的平行四边形是菱形可知: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 当 $AB = BC$ 时, 它是菱

形，故 A 选项正确；

B：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AC \perp BD$ ，∴ 四边形 $ABCD$ 是菱形，故 B 选项正确；

C：有一个角是直角的平行四边形是矩形，故 C 选项正确；

D：根据对角线相等的平行四边形是矩形可知当 $AC = BD$ 时，它是矩形，不是正方形，故 D 选项错误；

综上所述，符合题意是 D 选项；

故选：D。

3. 把方程 $x^2 - 8x + 3 = 0$ 化成 $(x + m)^2 = n$ 的形式，则 m ， n 的值是()

A. 4, 13

B. -4, 19

C. -4, 13

D. 4, 19

【答案】D

【考点】特配方法解一元二次方程.

【解析】

解：∵ $x^2 - 8x + 3 = 0$

$$\therefore x^2 - 8x = -3$$

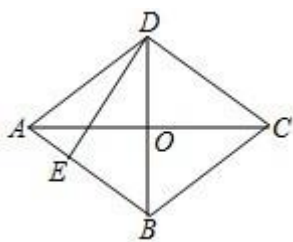
$$\therefore x^2 - 8x + 16 = -3 + 16$$

$$\therefore (x - 4)^2 = 13$$

$$\therefore m = -4, n = 13$$

故选：C。

4. 如图，菱形 $ABCD$ 对角线 $AC = 8\text{cm}$ ， $BD = 6\text{cm}$ ，则菱形高 DE 长为()



A. 5cm

B. 10cm

C. 4.8cm

D. 9.6cm

【答案】C

【考点】菱形的性质

【解析】

∵ 菱形 $ABCD$ 对角线 $AC = 8\text{cm}$ ， $BD = 6\text{cm}$ ，

$\therefore AC \perp BD$,

$$OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4cm,$$

$$OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 6 = 3cm,$$

根据勾股定理, $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5cm$,

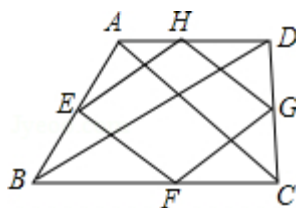
菱形 $ABCD$ 的面积 $= \frac{1}{2}AC \cdot BD = AB \cdot DE$,

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 5DE,$$

解得 $DE =$

$4.8cm$. 故选:

5. 如图, 顺次连接四边形 $ABCD$ 各边中点得到四边形 $EFGH$, 要使四边形 $EFGH$ 为矩形, 应添加的条件是()



A. $AB \parallel CD$

B. $AB = CD$

C. $AC \perp BD$

D. $AC = BD$

【答案】C

【考点】中点四边形

【解析】

E 、 F 、 G 、 H 分别是四边形 $ABCD$ 各边中点,

$$\therefore EH = \frac{1}{2}BD, EH \parallel BD, FG = \frac{1}{2}BD, FG \parallel BD,$$

$$\therefore EH = FG, EH \parallel FG,$$

\therefore 四边形 $EFGH$ 是平行四边形,

当 $AC \perp BD$ 时, $AC \perp EH$,

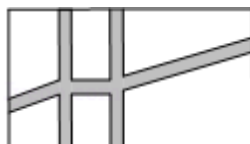
$$\therefore EH \perp EF,$$

\therefore 四边形 $EFGH$ 为矩形,

故选: C.

6. 如图, 某小区规划在一个长为 $16m$, 宽为 $9m$ 的矩形空地上修两条纵向平行和一条横向弯折的小路 (所

有小路进出口的宽度相等，且每段小路均为平行四边形)，其余部分铺设草坪，已知草坪的总面积为 $112m^2$ ．若设小路的宽度为 xm ，则 x 满足的方程为()



- A. $x^2 - 18x + 32 = 0$ B. $x^2 - 17x + 16 = 0$ C. $2x^2 - 25x + 16 = 0$ D. $3x^2 - 22x + 32 = 0$

【答案】B

【考点】一元二次方程的应用

【解析】

由题意可得，

$$112 + 16x + 9 \times 2x - 2x^2 = 16 \times 9,$$

化简，得

$$x^2 - 17x + 16 = 0,$$

故选： B ．

7. 国学经典《声律启蒙》中有这样一段话：“斜对正，假对真，韩卢对苏雁，陆橘对庄椿”，现有四张卡片依次写有一“斜”、“正”、“假”、“真”，四个字(4 张卡片除了书写汉字不同外其他完全相同)，现从四张卡片中随机抽取两张，则抽到的汉字恰为相反意义的概率是 ()

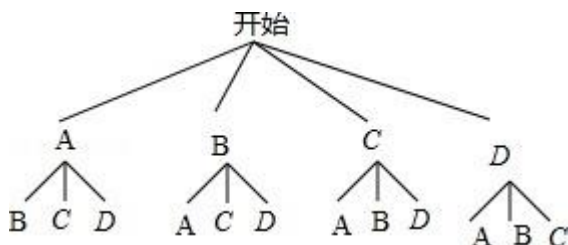
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

【答案】B

【考点】树状图或表格求概率

【解析】

设“斜”、“正”、“假”、“真”分别为 A ， B ， C ， D ，画树状图得：



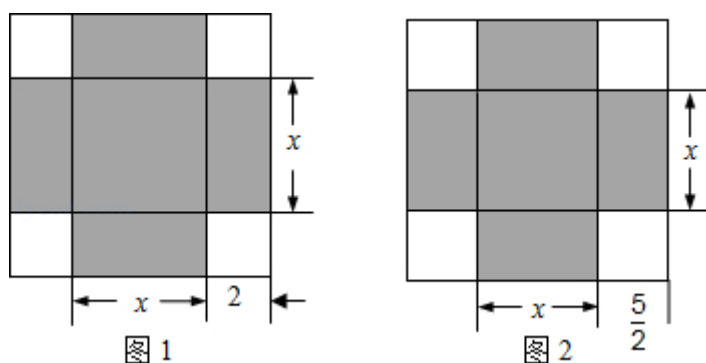
由树状图可知共有 12 种等可能的结果数，其中汉字恰为相反意义的有 4 种，

同理“任意选 2 个人，恰好生肖相同”的概率： $P = \frac{1}{12}$ ，

①②	鼠	牛	虎	兔	龙	蛇	马	羊	猴	鸡	犬	猪
鼠	√											
牛		√										
虎			√									
兔				√								
龙					√							
蛇						√						
马							√					
羊								√				
猴									√			
鸡										√		
犬											√	
猪												√

因此“任意选 2 个人，恰好同月过生日”这一事件的概率与“任意选 2 个人，恰好生肖相同”概率相同，
故选：A．

10. 《代数学》中记载，形如 $x^2 + 8x = 33$ 的方程，求正数解的几何方法是：“如图1，先构造一个面积为 x^2 的正方形，再以正方形的边长为一边向外构造四个面积为 $2x$ 的矩形，得到大正方形的面积为 $33 + 16 = 49$ ，则该方程的正数解为 $7 - 4 = 3$ ．”小聪按此方法解关于 x 的方程 $x^2 + 10x + m = 0$ 时，构造出如图 2 所示的图形，已知阴影部分的面积为 50，则该方程的正数解为()



- A. 6 B. $5\sqrt{3} - \frac{3}{2}$ C. $5\sqrt{3} - 2$ D. $5\sqrt{3} - 5$

【答案】D

【考点】一元二次方程与数形结合.

【解析】

如图 2，先构造一个面积为 x^2 的正方形，再以正方形的边长为一边向外构造四个面积为 $\frac{5}{2}x$ 的矩形，得

到大正方形的面积为：

$$50 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times 4 = 50 + 25 = 75 ,$$

$$\therefore \text{该方程的正数解为 } \sqrt{75} - \frac{5}{2} \times 2 = 5\sqrt{3} - 5 .$$

故选： D .

二. 填空题（每题 3 分，共 15 分）

11. 已知关于 x 的方程 $x^2 + mx + 3m = 0$ 有一个根为 -2 ，则 m 的值为_____.

【答案】 -4

【考点】菱形一元二次方程含参问题

【解析】

根据题意，得

$$(-2)^2 - 2m + 3m = 0 , \text{ 即 } 4 + m = 0 ,$$

解得， $m = -4$ ；

故答案是： -4 .

12. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 4x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 5$ 且 $k \neq 1$.

【考点】一元二次方程根的判别式

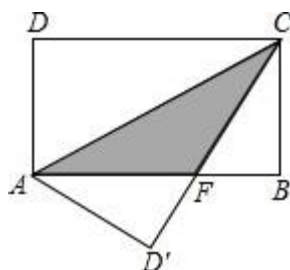
【解析】

\because 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 + 4x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \begin{cases} k-1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} k-1 \neq 0 \\ 4^2 - 4(k-1) > 0 \end{cases},$$

解得: $k < 5$ 且 $k \neq 1$.

13. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8$, $BC = 4$, 将矩形沿 AC 折叠, 点 D 落在点 D' 处, 则重叠部分 $\triangle AFC$ 的面积为_____.



【答案】 10

【考点】图形的折叠

【解析】

易证 $\triangle AFD' \cong \triangle CFB$,

$$\therefore D'F = BF,$$

设 $D'F = x$, 则 $AF = 8 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle AFD'$ 中, $(8-x)^2 = x^2 + 4^2$,

解之得: $x = 3$,

$$\therefore AF = AB - FB = 8 - 3 = 5,$$

$$\therefore S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot BC = 10.$$

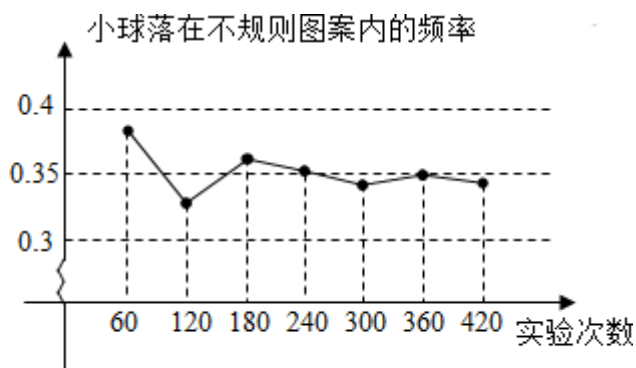
故答案为: 10.

14. 如图①所示, 平整的地面上有一个不规则图案 (图中阴影部分), 小明想了解该图案的面积是多少, 他采取了以下办法: 用一个长为 $5m$, 宽为 $4m$ 的长方形, 将不规则图案围起来, 然后在适当位置随机地朝长方形区域扔小球, 并记录小球落在不规则图案上的次数 (球扔在界线上或长方形区域外不计试验结

果)，他将若干次有效试验的结果绘制成了②所示的折线统计图，由此他估计不规则图案的面积大约为 _____ m^2 （结果保留整数）。



图①



图②

【答案】 7

【考点】 用频率估计概率

【解析】

假设不规则图案面积为 $x m^2$ ，

由已知得：长方形面积为 $20 m^2$ ，

根据几何概率公式小球落在不规则图案的概率为： $\frac{x}{20}$ ，

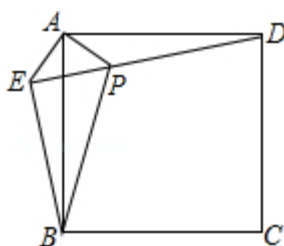
当事件 A 试验次数足够多，即样本足够大时，其频率可作为事件 A 发生的概率估计值，故由折线图可知，小球落在不规则图案的概率大约为 0.35，

综上有： $\frac{x}{20} = 0.35$ ，解得 $x = 7$ 。

15. 如图，在正方形 ABCD 外取一点 E，连接 AE、BE、DE。过点 A 作 AE 的垂线交 DE 于点 P。若

$AE = AP = 1$ ， $PB = \sqrt{5}$ 。下列结论：① $\triangle APD \cong \triangle AEB$ ；② 点 B 到直线 AE 的距离为 $\sqrt{2}$ ；③ $EB \perp ED$ ；

④ $S_{\triangle APD} + S_{\triangle APB} = 1 + \sqrt{6}$ ；⑤ $S_{\text{正方形}ABCD} = 4 + \sqrt{6}$ 。其中正确结论的序号是_____。



【答案】 ①③⑤

【考点】特殊平行四边形综合

【解析】

由边角边定理易知 $\triangle APD \cong \triangle AEB$ ，故①正确；

由 $\triangle APD \cong \triangle AEB$ 得， $\angle AEP = \angle APE = 45^\circ$ ，从而 $\angle APD = \angle AEB = 135^\circ$ ，

所以 $\angle BEP = 90^\circ$ ，

过 B 作 $BF \perp AE$ ，交 AE 的延长线于 F ，则 BF 的长是点 B 到直线 AE 的距离，

在 $\triangle AEP$ 中，由勾股定理得 $PE = \sqrt{2}$ ，

在 $\triangle BEP$ 中， $PB = \sqrt{5}$ ， $PE = \sqrt{2}$ ，由勾股定理得： $BE = 3$ ，

$\because \angle PAE = \angle PEB = \angle EFB = 90^\circ$ ， $AE = AP$ ，

$\therefore \angle AEP = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BEF = 180^\circ - 45^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle EBF = 45^\circ$ ，

$\therefore EF = BF$ ，

在 $\triangle EFB$ 中，由勾股定理得： $EF = BF = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

故②是错误的；

因为 $\triangle APD \cong \triangle AEB$ ，所以 $\angle ADP = \angle ABE$ ，而对顶角相等，所以③是正确的；

由 $\triangle APD \cong \triangle AEB$ ，

$\therefore PD = BE = \sqrt{2}$ ，

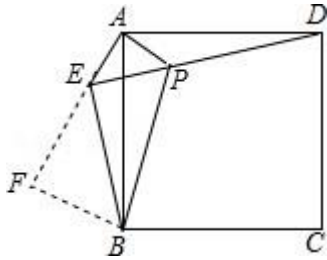
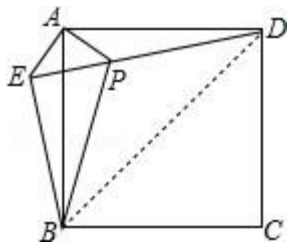
可知 $S_{\triangle APD} + S_{\triangle APB} = S_{\triangle AEB} + S_{\triangle APB} = S_{\triangle AEP} + S_{\triangle BEP} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，因此④是错误的；

连接 BD ，则 $S_{\triangle BPD} = \frac{1}{2} PD \times BE = \frac{3}{2}$ ，

所以 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle APD} + S_{\triangle APB} + S_{\triangle BPD} = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

所以 $S_{\text{正方形}ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 4 + \sqrt{6}$ 。

综上所述，正确的有①③⑤。



三. 解答题 (共 55 分)

16. 解下列方程 (每小题 4 分, 共 16 分)

$$(1) 2(x-1)^2 = 6$$

$$(2) x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x = -\frac{1}{8}$$

$$(3) x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(4) 3x(x-2) = x^2 - 4$$

【答案】 (1) $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$

$$(2) x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(3) x_1 = 3, x_2 = 4$$

$$(4) x_1 = 2, x_2 = 1$$

【考点】 解一元二次方程

【解析】

$$(1) 2(x-1)^2 = 6$$

$$(2) x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}x = -\frac{1}{8}$$

$$(x-1)^2 = 3$$

$$8x^2 - 4\sqrt{2}x + 1 = 0$$

$$x-1 = \sqrt{3} \text{ 或 } x-1 = -\sqrt{3}$$

$$(2\sqrt{2}x-1)^2 = 0$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}, x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

$$2\sqrt{2}x-1 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$(3) x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(4) 3x(x-2) = x^2 - 4$$

$$(x-3)(x-4) = 0$$

$$3x(x-2) = (x+2)(x-2)$$

$$x-3=0 \text{ 或 } x-4=0$$

$$x_1=3, x_2=4$$

$$3x(x-2)-(x+2)(x-2)=0$$

$$(x-2)(2x-2)=0$$

$$x-2=0 \text{ 或 } 2x-2=0$$

$$x_1=2, x_2=1$$

17. (6分) 从2021年起,某省高考采用“3+1+2”模式:“3”是指语文、数学、外语3科为必选科目,“1”是指在物理、历史2科中任选1科,“2”是指在化学、生物、思想政治、地理4科中任选2科.

(1)若小丽在“1”中选择了历史,在“2”中已选择了地理,则她选择生物的概率是_____;

(2)若小明在“1”中选择了物理,用画树状图的方法求他在“2”中选化学、生物的概率.

【答案】看解析

【考点】树状图或表格求概率

【解析】

(1)在“2”中已选择了地理,从剩下的化学、生物,思想品德三科中选一科,因此选择生物的概率为 $\frac{1}{3}$;

故答案为: $\frac{1}{3}$;

(2)用树状图表示所有可能出现的结果如下:



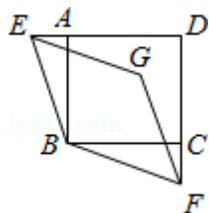
共有12种可能出现的结果,其中选中“化学”“生物”的有2种,

$$\therefore P_{(\text{化学生物})} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

18. (6分) 如图, 点 E, F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 DA, DC 延长线上, 且 $AE = CF$, 连接 BE, BF , 过点 E 作 $EG \parallel BF$, 过点 F 作 $FG \parallel BE$, EG, FG 交于点 G .

(1) 求证: 四边形 $BEGF$ 是菱形;

(2) 若 $AD = 3AE = 6$, 求四边形 $BEGF$ 的周长.



【答案】 看解析

【考点】 特殊平行四边形综合

【解析】

(1) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$$\therefore \angle EAB = \angle FCB = 90^\circ, \quad AB = BC,$$

在 $\triangle AEB$ 与 $\triangle CFB$ 中,

$$\begin{cases} AB = CB \\ \angle EAB = \angle FCB, \\ AE = CF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBF (SAS),$$

$$\therefore BE = BF,$$

$$\because EG \parallel BF, \quad FG \parallel BE,$$

\therefore 四边形 $BEGF$ 是平行四边形,

\therefore 四边形 $BEGF$ 是菱形;

(2) 解: \because 四边形 $BEGF$ 是菱形,

$$\therefore EB = BF = FG = GE,$$

$$\because AD = 3AE = 6,$$

$$\therefore AE = 2, \quad AB = AD = 6,$$

$$\therefore BE = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10},$$

$$\therefore \text{四边形 } BEGF \text{ 的周长为: } 4 \times 2\sqrt{10} = 8\sqrt{10}.$$

19. (7 分) 阅读下面的例题与解答过程:

例. 解方程: $x^2 - |x| - 2 = 0$.

解: 原方程可化为 $|x|^2 - |x| - 2 = 0$.

设 $|x| = y$, 则 $y^2 - y - 2 = 0$.

解得 $y_1 = 2$, $y_2 = -1$.

当 $y = 2$ 时, $|x| = 2$, $\therefore x = \pm 2$;

当 $y = -1$ 时, $|x| = -1$, \therefore 无实数解.

\therefore 原方程的解是: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

(1) 在上面的解答过程中, 我们把 $|x|$ 看成一个整体, 用字母 y 代替 (即换元), 使得问题简单化、明朗化, 解答过程更清晰. 这是解决数学问题中的一种重要方法——换元法.

(2) 请你仿照上述例题的解答过程, 利用换元法解下列方程:

① $x^2 - 2|x| = 0$ 的解是_____.

② $x^2 - 2x - 4|x - 1| + 5 = 0$.

【答案】 看解析

【考点】 换元法解一元二次方程

【解析】

① 原方程可化为 $|x|^2 - 2|x| = 0$,

设 $|x| = y$, 则 $y^2 - 2y = 0$.

解得 $y_1 = 0$, $y_2 = 2$.

当 $y = 0$ 时, $|x| = 0$, $\therefore x = 0$;

当 $y = 2$ 时, $\therefore x = \pm 2$;

\therefore 原方程的解是: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

②原方程可化为 $|x-1|^2 - 4|x-1| + 4 = 0$.

设 $|x-1|=y$, 则 $y^2 - 4y + 4 = 0$, 解得 $y = y_1 = y_2 = 2$.

即 $|x-1|=2$,

$\therefore x = -1$ 或 $x = 3$.

\therefore 原方程的解是: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

20. (8 分) 某批发商以每件 50 元的价格购进 800 件 T 恤, 第一个月以单价 80 元销售, 售出了 200 件; 第二个月如果单价不变, 预计仍可售出 200 件, 批发商为增加销售量, 决定降价销售, 根据市场调查, 单价每降低 1 元, 可多售出 20 件, 但最低单价应高于购进的价格, 并且已知第二个月后 T 恤还有剩余; 第二个月结束后, 批发商将对剩余的 T 恤一次性清仓销售, 清仓时单价为 40 元. 设第二个月单价降低 x 元.

(1) 填表

时间	第一个月	第二个月	清仓时
单价 (元)	80	_____	40
销售量 (件)	200	_____	_____

(2) 如果批发商希望通过销售这批 T 恤获利 12000 元, 那么第二个月的单价应是多少元?

【答案】 看解析

【考点】 一元二次方程的应用

【解析】

(1) 由题意可得:

时间	第一个月	第二个月	清仓时
单价 (元)	80	$80 - x$	40
销售量 (件)	200	$200 + 20x$	$400 - 20x$

故答案为: $80 - x$, $200 + 20x$, $400 - 20x$;

(2) 根据题意, 得

$$80 \times 200 + (80 - x)(200 + 20x) + 40(400 - 20x) - 50 \times 800 = 12000$$

整理得 $10x^2 - 300x + 200 = 0$,

即 $x^2 - 30x + 200 = 0$,

解得: $x_1 = 10$, $x_2 = 20$,

$x = 20$ 时, $400 - 20x = 0$,

故当 $x = 10$,

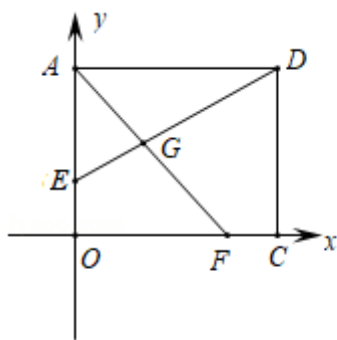
答: 第二个月的单价应是 70 元.

21. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 四边形 $OADC$ 为正方形, 点 D 的坐标为 $(4, 4)$, 动点 E 沿边 AO 从 A 向 O 以每秒 $1cm$ 的速度运动, 同时动点 F 沿边 OC 从 O 向 C 以同样的速度运动, 连接 AF 、 DE 交于点 G .

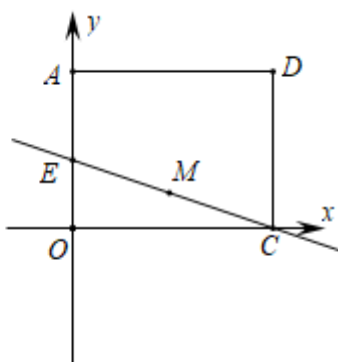
(1) 试探索线段 AF 、 DE 的关系, 写出你的结论并说明理由;

(2) 连接 EF 、 DF , 分别取 AE 、 EF 、 FD 、 DA 的中点 H 、 I 、 J 、 K , 则四边形 $HIJK$ 是什么特殊平行四边形? 请在图①中补全图形, 并说明理由.

(3) 如图②当点 E 运动到 AO 中点时, 点 M 是直线 EC 上任意一点, 点 N 是平面内任意一点, 是否存在点 N 使以 O 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形? 若存在, 请直接写出点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



图①



图②

【答案】 看解析

【考点】 特殊平行四边形综合

【解析】

(1) $AF = DE$. 理由如下:

\because 四边形 $OADC$ 是正方形,

$\therefore OA = AD$, $\angle DAE = \angle AOF = 90^\circ$,

由题意得： $AE = OF$,

$$\text{在} \triangle AOF \text{ 和 } \triangle DAE \text{ 中, } \begin{cases} OA = AD \\ \angle AOF = \angle DAE , \\ OF = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOF \cong \triangle DAE(SAS),$$

$$\therefore AF = DE .$$

(2) 四边形 $HIJK$ 是正方形. 理由如下:

如图①所示:

$\because H、I、J、K$ 分别是 $AE、EF、FD、DA$ 的中点,

$$\therefore HI = KJ = \frac{1}{2} AF, \quad HK = IJ = \frac{1}{2} ED, \quad HI \parallel AF, \quad HK \parallel ED,$$

$$\because AF = DE,$$

$$\therefore HI = KJ = HK = IJ,$$

\therefore 四边形 $HIJK$ 是菱形,

$$\because \triangle AOF \cong \triangle DAE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle OAF,$$

$$\because \angle ADE + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAF + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AGE = 90^\circ,$$

$$\therefore AF \perp ED,$$

$$\because HI \parallel AF, \quad HK \parallel ED,$$

$$\therefore HI \perp HK,$$

$$\therefore \angle KHI = 90^\circ,$$

\therefore 四边形 $HIJK$ 是正方形.

(3) 存在, 理由如下:

\because 四边形 $OADC$ 为正方形, 点 D 的坐标为 $(4,4)$,

$$\therefore OA = AD = OC = 4,$$

$$\therefore C(4,0),$$

\because 点 E 为 AO 的中点,

$$\therefore OE = 2, \quad E(0, 2);$$

分情况讨论：如图②所示：

①当 OC 是以 O, C, M, N 为顶点的菱形的对角线时， OC 与 MN 互相垂直平分，则 M 为 CE 的中点，

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } (2, 1),$$

\because 点 M 和 N 关于 OC 对称，

$$\therefore N(2, -1);$$

②当 OC 是以 O, C, M, N 为顶点的菱形的边时，

若 CM 为边且 M 在第一象限（点 C 的左上方），点 N 的坐标为 $(-2, 1)$ ；

若 M 在 y 轴的左侧时，

\because 四边形 $OCM'N'$ 是菱形，

$$\therefore OM' = OC = 4, \quad M'N' \parallel OC,$$

$$\therefore \triangle M'FE \sim \triangle COE,$$

$$\therefore \frac{M'F}{EF} = \frac{OC}{OE} = 2,$$

设 $EF = x$ ，则 $M'F = 2x$ ， $OF = x + 2$ ，

在 $Rt \triangle OM'F$ 中，由勾股定理得： $(2x)^2 + (x + 2)^2 = 4^2$ ，

解得： $x = \frac{6}{5}$ ，或 $x = -2$ （舍去），

$$\therefore M'F = \frac{12}{5}, \quad FN = 4 - M'F = \frac{8}{5}, \quad OF = 2 + \frac{6}{5} = \frac{16}{5},$$

$$\therefore N'(\frac{8}{5}, \frac{16}{5});$$

若 M 在 y 轴的右侧时，

a、由①得： N 的坐标为 $(-2, 1)$ ；

b、作 $N''P \perp OC$ 于 P ，

$$\because ON' \parallel CM',$$

$$\therefore \angle PON'' = \angle OCE,$$

$$\therefore \triangle PON'' \sim \triangle OCE$$

设 $PN'' = y$, 则 $OP = 2y$,

在 $\text{Rt}\triangle OPN''$ 中, 由勾股定理得: $y^2 + (2y)^2 = 4^2$,

解得: $y = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

$$\therefore PN'' = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \quad OP = \frac{8\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore N''(\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5}), N'''(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5});$$

综上所述, 存在点 N 使以 O , C , M , N 为顶点的四边形是菱形, 点 N 的坐标为 $(2, -1)$ 或 $(\frac{8}{5}, \frac{16}{5})$ 或 $(\frac{8\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5})$ 或 $(-\frac{8\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5})$ 或 $(-2, 1)$.

