

2020~2021学年四川成都天府新区成都市华阳中学初二上学期期中数学试卷（华阳
中学教育集团）（详解）

一、选择题

（本大题共10小题，每小题3分，共30分）

1. $\sqrt{4}$ 等于（ ）.

A. 2

B. ± 2

C. -2

D. ± 4

【答案】A

【解析】 $\sqrt{4} = 2$.

故选A.

2. 下列各数中是无理数的是（ ）.

A. 3.5

B. $\frac{22}{7}$

C. $-\sqrt{2}$

D. $\sqrt{4}$

【答案】C

【解析】A. 3.5是小数，即分数，属于有理数.

B. $\frac{22}{7}$ 是分数，属于有理数.

C. $-\sqrt{2}$ 是无理数.

D. $\sqrt{4} = 2$ ，是整数，属于有理数.

故选C.

3. 下列各组数中是勾股数的是（ ）.

A. 4, 5, 6

B. 0.3, 0.4, 0.5

C. 5, 12, 13

D. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$

【答案】C

【解析】A选项： $4^2 + 5^2 \neq 6^2$ ，故4, 5, 6不是勾股数，故A错误；

B选项：0.3, 0.4, 0.5不是整数，故0.3, 0.4, 0.5不是勾股数，故B错误；

C选项： $5^2 + 12^2 = 13^2$ ，故5, 12, 13是勾股数，故C正确；

D 选项: $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ 不是整数, 故 $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ 不是勾股数, 故D错误;
故选 C.

4. 下列计算正确的是 ().

A. $\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$

B. $\sqrt{12} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$

C. $1 + \sqrt{2} = \sqrt{3}$

D. $3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 5\sqrt{6}$

【答案】B

【解析】 $\sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$.

故选B.

5. 要使二次根式 $\sqrt{x+2}$ 有意义, 则 x 的取值范围是 ().

A. $x > -2$

B. $x \geq -2$

C. $x \neq -2$

D. $x < -2$

【答案】B

【解析】根据二次根式有意义条件可得: $x+2 \geq 0$,

$$\therefore x \geq -2.$$

故选B.

6. 若 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 是关于 x, y 的方程 $x+ay=3$ 的解, 则 a 的值是 ().

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】A

【解析】将 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 代入 $x+ay=3$,

$$\text{得: } 2+a=3, a=1.$$

故选A.

7. 若点 P 是第二象限内的点, 且点 P 到 x 轴的距离是4, 到 y 轴的距离是3, 则点 P 的坐标是 ().

A. $(-4, 3)$

B. $(4, -3)$

C. $(-3, 4)$

D. $(3, -4)$

【答案】C

【解析】到 x 轴的距离表示点的纵坐标的绝对值，到 y 轴的距离表示点的横坐标的绝对值，第二象限中的点横坐标为负数，纵坐标为正数.

8. 若直角三角形两条直角边的边长分别为6和8，则斜边上的高是（ ）.

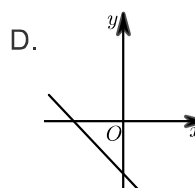
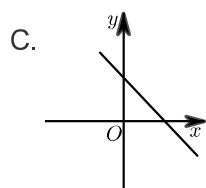
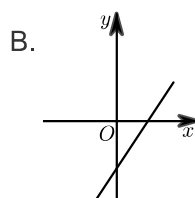
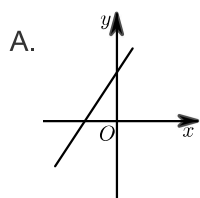
A. 5 B. 10 C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{24}{5}$

【答案】D

【解析】两直角边为6和8，则斜边长为10，斜边上的高 $h = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{24}{5}$.

故选D.

9. 如图，一次函数 $y = 2x - 3$ 的图象大致是（ ）.



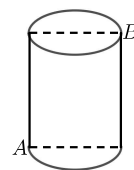
【答案】B

【解析】 \because 一次函数 $y = 2x - 3$ 中，

$$k = 2 > 0, \quad b = -3 < 0,$$

\therefore 此函数的图象经过一、三、四象限.

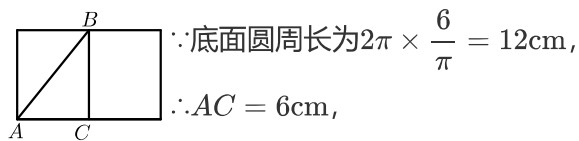
10. 如图，一圆柱高8cm，底面半径为 $\frac{6}{\pi}$ cm，一只蚂蚁从点A爬到点B处吃食，要爬行的最短路程是（ ）.



A. 6cm B. 8cm C. 10cm D. 12cm

【答案】C

【解析】圆柱侧面展开图如图所示，



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由勾股定理可得，

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\text{cm},$$

根据两点之间线段最短可知 AB 即为最短路径.

二、填空题

(本大题共4小题，每小题4分，共16分)

11. 8的立方根是 _____ .

【答案】2

【解析】8的立方根为2，

故答案为：2.

【踩分点】

12. 点 $A(2m-1, m+3)$ 在 x 轴上，则 $m =$ _____ .

【答案】-3

【解析】 $A(2m-1, m+3)$ 在 x 轴上，

$$\therefore m+3=0,$$

$$\therefore m=-3.$$

【踩分点】

13. 已知 $A(-2, a)$ ， $B(b, 1)$ 是一次函数 $y = -2x + 3$ 的图象上的两个点，则 $a - b =$ _____ .

【答案】6

【解析】 $A(-2, a)$ ， $B(b, 1)$ 是一次函数 $y = -2x + 3$ 图象上的两点，

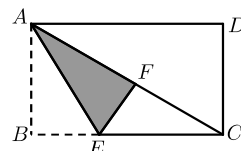
$$\therefore \begin{cases} a = -2 \times (-2) + 3 \\ 1 = -2b + 3 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} a = 7 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore a - b = 6.$$

【踩分点】

14. 如图，在长方形纸片 $ABCD$ 中，已知 $AD = 4$ ， $CD = 3$ ，折叠纸片使 AB 边与对角线 AC 重合，点 B 落在点 F 处，折痕为 AE ，则 BE 的长为 _____ .



【答案】 1.5

【解析】 矩形 $ABCD$ 中， $AB = CD = AF = 3$ ， $AD = BC = 4$ ，

在直角 $\triangle ABC$ 中， $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$ ，

设 $BE = x$ ，则 $EF = BE = x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle EFC$ 中， $CF = AC - AF = 2$ ， $EC = 4 - x$ ，

根据勾股定理可得： $EF^2 + CF^2 = CE^2$ ，

即 $x^2 + 2^2 = (4 - x)^2$ ，

解得： $x = 1.5$ ，

$\therefore BE = 1.5$ ．

故答案为：1.5．

【踩分点】

三、解答题

(本大题共6小题，共54分)

15. 回答下列问题．

(1) 化简： $\sqrt{12} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} - |1 - \sqrt{3}| + (\pi - 3)^0$ ．

(2) 解方程组： $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ ．

【答案】 (1) $\sqrt{3} - 2$ ．

(2) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ ．

【解析】(1) 原式 $= 2\sqrt{3} - 4 - (\sqrt{3} - 1) + 1$
 $= \sqrt{3} - 2.$

(2) $\begin{cases} x - y = 3 \text{ ①} \\ 2x + y = 0 \text{ ②} \end{cases}$

由①+②得: $3x = 3$

$x = 1,$

把 $x = 1$ 代入①得: $y = -2,$

\therefore 方程组的解为 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}.$

【踩分点】

16. 已知 $2a - 1$ 的平方根是 ± 3 , $3a - b - 1$ 的立方根是 2, 求 $a + \frac{1}{2}b$ 的平方根.

【答案】 $\pm 2\sqrt{2}.$

【解析】 $\therefore \begin{cases} \sqrt{2a-1} = \pm 3 \\ \sqrt[3]{3a-b-1} = 2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} 2a - 1 = 9 \\ 3a - b - 1 = 8 \end{cases}$

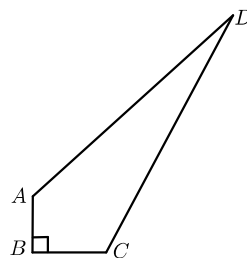
$\therefore \begin{cases} a = 5 \\ b = 6 \end{cases}$

$\therefore a + \frac{1}{2}b = 5 + 3 = 8,$

\therefore 其平方根为 $\pm 2\sqrt{2}.$

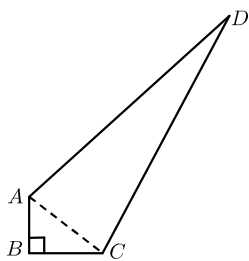
【踩分点】

17. 如图, 有一块菜地, 已知 $AB = 3$ 米, $BC = 4$ 米, $AB \perp BC$, $AD = 5\sqrt{3}$ 米, $CD = 10$ 米, 求这块地的面积.



【答案】 $6 + \frac{25\sqrt{3}}{2}$ 平方米.

【解析】 连结 AC ,



在 $\triangle ABC$ 中,

$$\because \angle B = 90^\circ, AB = 3\text{m}, BC = 4\text{m},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5(\text{m}),$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6(\text{m}^2),$$

在 $\triangle ACD$ 中,

$$\because AD = 5\sqrt{3}\text{m}, AC = 5\text{m}, CD = 10\text{m},$$

$$\therefore AD^2 + AC^2 = CD^2,$$

$\therefore \triangle ACD$ 是直角三角形,

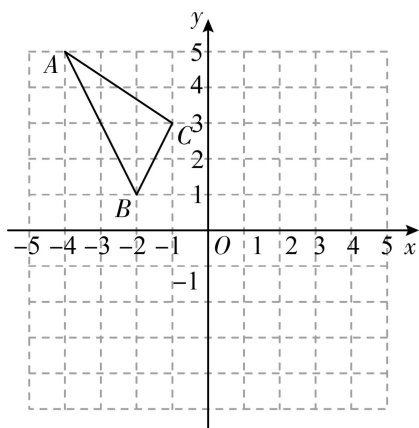
$$\therefore S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2}(\text{m}^2).$$

$$\therefore \text{四边形} ABCD \text{的面积} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \left(6 + \frac{25\sqrt{3}}{2}\right)(\text{m}^2).$$

综上所述, 这块土地的面积为 $6 + \frac{25\sqrt{3}}{2}$ 平方米.

【踩分点】

18. 如图, 平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点都在网格点上, 其中, $A(-4, 5)$, $B(-2, 1)$, $C(-1, 3)$.



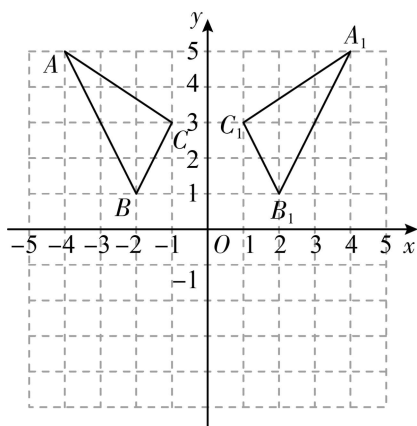
- (1) 作出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$.
- (2) 写出 $\triangle A_1B_1C_1$ 的各顶点的坐标.
- (3) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】（1）见解析

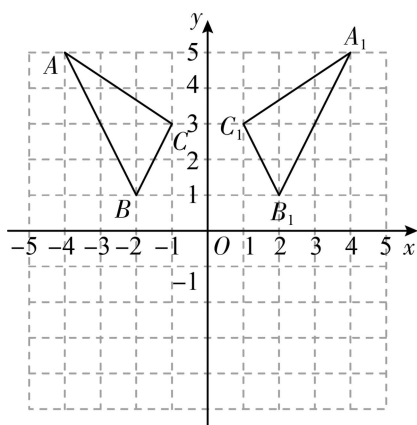
（2）见解析

（3）见解析

【解析】（1）解：如图所示， $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.



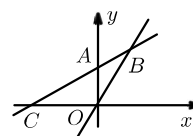
（2）解：由图知， $A_1(4, 5)$ ， $B_1(2, 1)$ ， $C_1(1, 3)$.



（3）解： $\triangle ABC$ 的面积为 $3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 4$.

【踩分点】

19. 如图，在平面直角坐标系中，一次函数的图象经过点 $A(0, 2)$ ，且与正比例函数 $y = \frac{3}{2}x$ 的图象相交于点 $B(2, m)$ ，与 x 轴相交于点 C .



（1）求 m 的值及一次函数的表达式.

（2）求 $\triangle BOC$ 的面积.

【答案】(1) $m = 3$, 一次函数的解析式为 $y = 0.5x + 2$.

(2) $\triangle BOC$ 的面积是 6.

【解析】(1) \because 正比例函数 $y = \frac{3}{2}x$ 的图象过点 $B(2, m)$,

$$\therefore m = \frac{3}{2} \times 2 = 3,$$

设一次函数的解析式为 $y = kx + b$,

$$\begin{cases} 2k + b = 3 \\ b = 2 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k = 0.5 \\ b = 2 \end{cases},$$

即一次函数的解析式为 $y = 0.5x + 2$.

(2) 将 $y = 0$ 代入 $y = 0.5x + 2$, 得 $x = -4$,

\therefore 点 C 的坐标为 $(-4, 0)$,

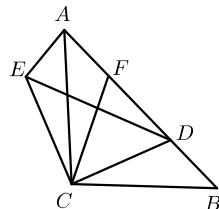
\because 点 $O(0, 0)$, 点 $B(2, 3)$,

$\therefore \triangle BOC$ 的面积是: $\frac{|-4| \times 3}{2} = 6$.

即 $\triangle BOC$ 的面积是 6.

【踩分点】

20. 如图, $\triangle ABC$ 、 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$, 且 D 在边 AB 上, 点 E 在 AC 的左侧, 连接 AE .



(1) 求证: $AE = BD$.

(2) 求证: $AD^2 + BD^2 = 2CD^2$.

(3) 过点 C 作 $CF \perp DE$ 交 AB 于点 F , 若 $BD : AF = 3 : 4$, $CD = \sqrt{5}$, 求线段 AB 的长.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

(3) 4.

【解析】(1) $\because \angle ACE + \angle ACD = \angle ECD = 90^\circ$,

$$\angle BCD + \angle ACD = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCD,$$

又 $\because \triangle ACB$ 与 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore CA = CB, CD = CE,$$

$$\text{在} \triangle ACE \text{与} \triangle BCD \text{中} \begin{cases} CE = CD \\ \angle ACE = \angle BCD, \therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD (\text{SAS}), \\ AC = BC \end{cases}$$

$$\therefore AE = BD.$$

(2) 由(1)得: $\triangle ACE \cong \triangle BCD$, $\therefore \angle B = \angle EAC$,

$$\because \angle BAC + \angle D = 90^\circ, \therefore \angle BAC + \angle EAC = 90^\circ,$$

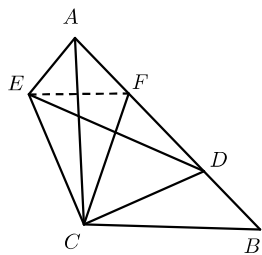
$\therefore \angle DAE = 90^\circ$, \therefore 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 由勾股定理得:

$$AD^2 + BD^2 = AD^2 + AE^2 = DE^2,$$

$$\because DE^2 = CD^2 + CE^2, CD = CE,$$

$$\therefore DE^2 = 2CD^2, \therefore AD^2 + BD^2 = 2CD^2.$$

(3) 连接 EF , 设 $BD = AE = 3x$



$$\because BD : AF = 3 : 4, \therefore AF = 4x,$$

$$\text{在} \text{Rt}\triangle EAF \text{中}, EF^2 = AF^2 + AE^2, \therefore EF = \sqrt{(4x)^2 + (3x)^2} = 5x,$$

$\because \triangle CDE$ 为等腰直角三角形, $CF \perp DE$,

$$\therefore DF = EF = 5x, \therefore AD = AF + DF = 9x,$$

$$\text{由(2)可知: } AD^2 + BD^2 = 2CD^2, \text{ 即 } (9x)^2 + (5x)^2 = 2 \times (\sqrt{5})^2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AB = AD + BD = 12x = 4,$$

即线段 AB 的长为4.

【踩分点】

四、填空题

(本大题共5小题, 每小题4分, 共20分)

21. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 是三边长, 且满足 $(a - \sqrt{3})^2 + |b - 1| + \sqrt{c - 2} = 0$, 则 $\triangle ABC$ 一定是 _____ 三角形.

【答案】直角

【解析】 $\because (a - \sqrt{3})^2 + 16 - 11 + \sqrt{c - 2} = 0$,
 $\therefore \begin{cases} a - \sqrt{3} = 0 \\ b - 1 = 0 \\ c - 2 = 0 \end{cases}$,
 $\therefore \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$,
 $\therefore c^2 = a^2 + b^2$,
 $\therefore \triangle ABC$ 一定为直角三角形.

【踩分点】

22. 在平面直角坐标系中, 点 $A(4, a - b)$ 与 $B(b, -1)$ 关于 x 轴对称, 则 $\sqrt{ab} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2\sqrt{5}$

【解析】 $\because A(4, a - b)$ 与 $B(b, -1)$ 关于 x 轴对称,
 $\therefore \begin{cases} b = 4 \\ a - b = 1 \end{cases}$,
 $\therefore \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$,
 $\therefore \sqrt{ab} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

【踩分点】

23. 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ mx - ny = -5 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} nx + my = 0 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$ 有相同解, 则 $n^m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】根据题意得: $\begin{cases} 2x + y = 10 \text{ ①} \\ x - 3y = -2 \text{ ②} \end{cases}$

由① $\times 3$ +②得: $7x = 30 - 2$,

$x = 4$,

把 $x = 4$ 代入①得: $y = 2$,

把 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} nx + my = 0 \text{ ③} \\ x - 3y = -2 \text{ ④} \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 4n - 2m = -5 \\ 4n + 2m = 0 \end{cases}$,

由③ $\times 2 + 4$ ④得: $10m = -10$,

$$m = -1,$$

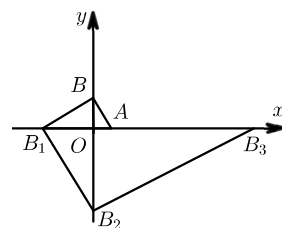
把 $m = -1$, 代入③得: $n = \frac{1}{2}$,

$$\therefore n^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2.$$

故答案为: 2.

【踩分点】

24. 如图所示把多块大小不同的 30° 直角三角板, 摆放在平面直角坐标系中, 第一块三角板 AOB 的一条直角边与 x 轴重合且点 A 的坐标为 $(2, 0)$, $\angle ABO = 30^\circ$, 第二块三角板的斜边 BB_1 与第一块三角板的斜边 AB 垂直且交 x 轴于点 B_1 , 第三块三角板的斜边 B_1B_2 与第二块三角板的斜边 BB_1 垂直且交 y 轴于点 B_2 ; 第四块三角板斜边 B_2B_3 与第三块三角板的斜边 B_1B_2 垂直且交 x 轴于点 B_3 , 则 B_3 坐标为 _____; 按此规律继续下去, 则点 B_{2020} 的坐标为 _____.



【答案】 $(18, 0)$; $(0, 2 \times (\sqrt{3})^{2021})$

【解析】 \because 点 $A(2, 0)$,

$$\therefore OA = 2.$$

又 \because 在 $Rt\triangle ABO$ 中, $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle ABO = 30^\circ$,

$$\therefore AB = 2OA = 2 \times 2 = 4.$$

由勾股定理, 得 $OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore OB = \sqrt{3}OA.$$

$\because BB_1 \perp AB$,

$$\therefore \angle ABB_1 = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle B_1BO + \angle ABO = 90^\circ.$$

又 $\because \angle B_1BO + \angle BB_1O = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BB_1O = \angle ABO = 30^\circ.$$

同理可得, $OB_1 = \sqrt{3}OB$, $OB_2 = \sqrt{3}OB_1$, $OB_3 = \sqrt{3}OB_2$,

$\therefore OB = 2\sqrt{3}$, 点 B 在 y 轴正半轴上, 点 B_1 在 x 轴负半轴上,

点 B_2 在 y 轴负半轴上, 点 B_3 在 x 轴正半轴上,

\therefore 点 $B(0, 2\sqrt{3})$, 点 $B_1(-6, 0)$, 点 $B_2(0, -6\sqrt{3})$, 点 $B_3(18, 0)$.

.....

$\therefore \frac{2020}{4} = 505$,

$\therefore B_{2020}$ 在 y 轴正半轴上.

$\therefore OB_{2020} = (\sqrt{3})^{2020} \times OB = 2 \times (\sqrt{3})^{2021}$.

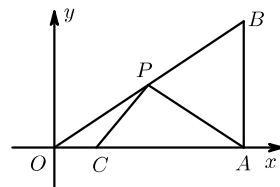
$\therefore B_{2020}(0, 2 \times (\sqrt{3})^{2021})$.

故答案为: $(18, 0)$; $(0, 2 \times (\sqrt{3})^{2021})$.

【踩分点】

25. 如图, 在平面直角坐标系中, $\text{Rt}\triangle OAB$ 的直角顶点 A 在 x 轴的正半轴上, 顶点 B 的纵坐标为 $2\sqrt{3}$, $\angle B = 60^\circ$, $OC = \frac{1}{2}AC$, 点 P 为斜边 OB 上的一个动点, 则 $\triangle PAC$ 的周长的最小值为 _____ .

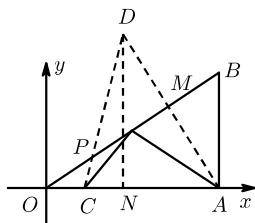
【说明: 在直角三角形中, 如果一个锐角等于 30° , 那么它所对的直角边等于斜边的一半.】



【答案】 $2\sqrt{7} + 4$

【解析】 作 A 关于 OB 的对称点 D , 连接 CD 交 OB 于 P , 连接 AP , 过 D 作 $DN \perp OA$ 于 N , 则此时

$PA + PC$ 的值最小,



$\therefore DP = PA$,

$\therefore PA + PC = PD + PC = CD$,

\therefore 顶点 B 的纵坐标为 $2\sqrt{3}$, $\angle B = 60^\circ$,

$$\therefore AB = 2\sqrt{3}, OA = 6, \text{ 由勾股定理得: } OB = 4\sqrt{3},$$

$$\text{由三角形面积公式得: } 12 \times OA \times AB = 12 \times OB \times AM,$$

$$\therefore AM = 3,$$

$$\therefore AD = 2 \times 3 = 6,$$

$$\because \angle AMB = 90^\circ, \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM = 30^\circ,$$

$$\because \angle BAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAM = 60^\circ,$$

$$\because DN \perp OA,$$

$$\therefore \angle NDA = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得: } DN = 3\sqrt{3},$$

$$\because C(1, 0),$$

$$\therefore CN = AC - AN = 4 - 3 = 1,$$

$$\text{在Rt}\triangle DNC\text{中, 由勾股定理得: } DC = \sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7},$$

$$\text{即 } PA + PC \text{ 的最小值是 } 2\sqrt{7},$$

$$\therefore \triangle PAC \text{ 周长的最小值为: } 2\sqrt{7} + 4.$$

$$\text{故答案为: } 2\sqrt{7} + 4.$$

【踩分点】

五、解答题

(本大题共3小题, 共30分)

26.

$$(1) \text{ 已知 } y = \frac{\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{9 - x^2}}{x - 3} + 9, \text{ 求 } \sqrt[3]{xy} \text{ 的值.}$$

$$(2) \text{ 若 } x = \frac{1}{\sqrt{5} - 2}, \sqrt{5} - 1 \text{ 的小数部分为 } y, \text{ 求 } x^2 + xy + y^2 \text{ 的值.}$$

【答案】(1) -3.

(2) 19.

【解析】(1) 由二次函数存在意义可知: $\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0 \\ 9 - x^2 \geq 0 \end{cases}$

$$\therefore x^2 = 9,$$

$$\text{又} \because x - 3 \neq 0,$$

$$\therefore x \neq 3,$$

$$\therefore x = -3,$$

$$\therefore y = 0 + 9 = 9,$$

$$\therefore \sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{-3 \times 9} = \sqrt[3]{-27} = -3,$$

即 $\sqrt[3]{xy}$ 的值为 -3 .

$$(2) \quad x = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5}+2, \quad y = \sqrt{5}-1-1 = \sqrt{5}-2,$$

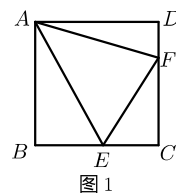
$$\therefore x+y = 2\sqrt{5}, \quad xy = (\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) = 1,$$

$$\therefore x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = (2\sqrt{5})^2 - 1 = 19.$$

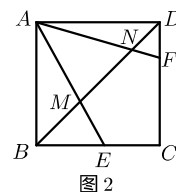
【踩分点】

27. 已知 E 、 F 分别为正方形 $ABCD$ 的边 BC 、 CD 上的点, 且 $\angle EAF = 45^\circ$.

(1) 如图①求证: $BE + DF = EF$.



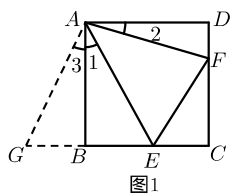
(2) 连接 BD 分别交 AE 、 AF 于 M 、 N , 如图②, 若 $AB = 6\sqrt{2}$, $BM = 3$, 求 MN .



【答案】(1) 证明见解析.

(2) 5.

【解析】(1) 延长 CB 到 G , 使 $GB = DF$, 连接 AG (如图1),



在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle ADF$ 中,

$$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF (\text{SAS}),$$

$$\because \angle BAD = 90^\circ, \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GAE = \angle 1 + \angle 3 = 45^\circ = \angle EAF.$$

$$\begin{cases} AG = AF \\ \angle GAE = \angle EAF, \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore GB + BE = EF,$$

$$\therefore DF + BE = EF.$$

$$\therefore \angle ABM = \angle ADN = 45^\circ,$$

图2

$$\therefore DM' = BM, \quad AM' = AM, \quad \angle ADM' = \angle ABM' = 45^\circ, \quad \angle DAM' = \angle BAM,$$

即 $\angle NDM' = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BAM + \angle DAN = 45^\circ,$$

即 $\angle M'AN = 45^\circ$,

$$\therefore \angle M'AN = \angle MAN,$$

在 $\triangle AMN$ 和 $\triangle AM'N$ 中,

$$\begin{cases} AM = AM' \\ \angle MAN = \angle M'AN, \\ AN = AN \end{cases}$$

$\therefore \triangle AMN \cong \triangle AM'N (\text{SAS}),$

$\therefore M'N = MN,$

$\because \angle NDM' = 90^\circ,$

$\therefore M'N^2 = DN^2 + DM'^2,$

$\therefore MN^2 = DN^2 + BM^2,$

设 $MN = x$, 则 $DN = 9 - x$,

$\therefore x^2 = 3^2 + (9 - x)^2,$

$\therefore x = 5,$

$\therefore NM = 5.$

【踩分点】

28. 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(8, 4)$, $AB \perp y$ 轴于 B , $AC \perp x$ 轴于 C , 直线 $y = x$ 交 AB 于 D , 如图1.

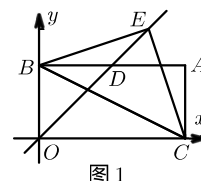


图 1

(1) 直接写出 B 、 C 、 D 三点坐标.

(2) 若 E 为 OD 延长线上一动点, 记点 E 横坐标为 a , $\triangle BCE$ 的面积为 S , 求 S 与 a 的关系式.

(3) 如图2, 当 $S = 20$ 时, 过点 E 作 $EF \perp AB$ 于 F , G 、 H 分别为 AC 、 CB 上动点, 求 $FG + GH$ 的最小值.

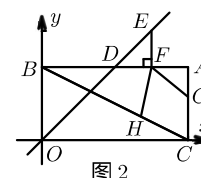


图 2

【答案】 (1) $B(0, 4)$, $C(8, 0)$, $D(4, 4)$.

(2) $6a - 16 (a > 4)$.

(3) $2\sqrt{5}$.

【解析】(1) $\because AB \perp y$ 轴于 B , $AC \perp x$ 轴于 C ,

$$\therefore \angle ABO = \angle ACO = \angle COB = 90^\circ,$$

\therefore 四边形 $ABOC$ 是矩形,

$$\therefore A(8, 4),$$

$$\therefore AB = OC = 8, AC = OB = 4,$$

$$\therefore B(0, 4), C(8, 0),$$

\therefore 直线 $y = x$ 交 AB 于 D ,

$$\therefore \angle BOD = 45^\circ,$$

$$\therefore OB = DB = 4,$$

$$\therefore D(4, 4).$$

(2) 过 E 作 $EM \perp y$ 轴于 M , 则如图1,

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{梯形}EMOC} - S_{\triangle BOC} - S_{\triangle EMB} \\ &= \frac{(a+8)a}{2} - \frac{1}{2} \times 4 \times 8 - \frac{1}{2} \times a \times (a-4) \\ &= \frac{1}{2}a^2 + 4a - 16 - \frac{1}{2}a^2 + 2a \\ &= 6a - 16 (a > 4). \end{aligned}$$

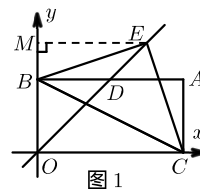


图1

(3) 当 $S = 20$ 时, $20 = 6a - 16$,

解得 $a = 6$,

$$\therefore E(6, 6),$$

$\therefore EF \perp AB$ 于 F ,

$$\therefore F(6, 4),$$

如图2中, 作点 F 关于直线 AC 的对称点 F' ,

作 $F'H \perp BC$ 于 H , 交 AC 于 G .

此时 $FG + GH$ 的值最小.

$$\therefore \angle ABC = \angle F'BH, \angle BAC = \angle F'HB,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle HBF',$$

$$\therefore \frac{AC}{F'H} = \frac{BC}{BF'},$$

$$\therefore AC = 4, BC = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

$$BF' = AB + AF' = 8 + 2 = 10,$$

$$\therefore \frac{4}{F'H} = \frac{4\sqrt{5}}{10},$$

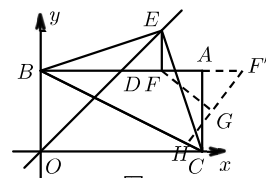


图2

$$\therefore F'H = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore FG + GH \text{ 的最小值 } = F'H = 2\sqrt{5}.$$

【踩分点】