

江北区 2020—2021 学年（上）期末考试

九年级 数学试题

（全卷共四个大题，满分150分，考试时间120分钟）

注意事项：

1. 试题的答案书写在答题卡上，不得在试卷上直接作答；
2. 作答前认真阅读答题卡上的注意事项，并按要求填写内容和答题；
3. 作图（包括作辅助线）请一律用黑色签字笔完成；
4. 考试结束，由监考人员将试题和答题卡一并收回。

参考公式：抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ ，对称轴为

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

一、选择题：（本大题12个小题，每小题4分，共48分）在每个小题的下面，都给出了代号为A、B、C、D的四个答案，其中只有一个是正确的，请用2B铅笔将答题卡上题号右侧正确答案所对应的方框涂黑。

1. -2021的相反数是（ ）

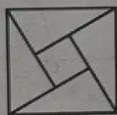
A. -2021

B. 2021

C. $\frac{1}{2021}$

D. $-\frac{1}{2021}$

2. 下面图形是用数学家名字命名的，其中是中心对称图形但不是轴对称图形的是（ ）



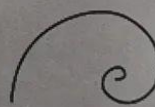
A. 赵爽弦图



B. 笛卡尔心形线



C. 科克曲线



D. 斐波那契螺旋线

3. 下列事件中，必然事件的是（ ）

A. “NBA巨星”詹姆斯上篮100%得分

B. 抛掷一枚骰子，朝上的点数为6

C. 单项式加上单项式，和为多项式

D. 画一个三角形，其内角和为180°

4. 将抛物线 $y = x^2$ 向上平移2个单位长度，再向右平移1个单位长度所得到的抛物线的解析式是（ ）

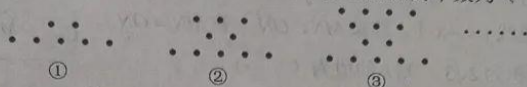
A. $y = (x-1)^2 + 2$

B. $y = (x+1)^2 + 2$

C. $y = (x-1)^2 - 2$

D. $y = (x+1)^2 - 2$

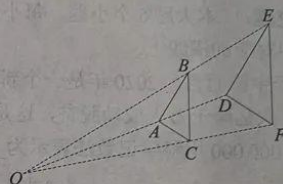
5. 如图所示的图形都是由同样大小的实心圆点按一定的规律组成的, 其中第①个图形一共有7个实心圆点, 第②个图形一共有10个实心圆点, 第③个图形一共有14个实心圆点, ……按此规律排列下去, 第5个图形中实心圆点的个数为 ()



- A. 19 B. 20 C. 25 D. 32
6. 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, $\angle A = 45^\circ$, $BC = 8$, 则 $\odot O$ 的半径为 ()
A. 4 B. $4\sqrt{2}$ C. 8 D. $8\sqrt{2}$



(第6题)



(第7题)

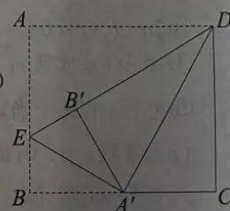
7. 如图, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是位似图形, 且位似中心为 O , $OB:BE = 2:1$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为4, 则 $\triangle DEF$ 的面积为 ()
A. 2 B. 6 C. 8 D. 9
8. 定义运算: $m \star n = mn^2 - mn - 1$. 例如: $4 \star 2 = 4 \times 2^2 - 4 \times 2 - 1 = 7$. 若关于 x 的方程 $5 \star x = 6 - 4x$, 则代数式 $3 - 2x + 10x^2$ 的值为 ()
A. -11 B. 10 C. 11 D. 17
9. 在平面直角坐标系 xOy 中, 对于点 $P(a, b)$, 若 $ab > 0$, 则称点 P 为“同号点”. 下列函数的图象上不存在“同号点”的是 ()
A. $y = -2x + 3$ B. $y = x^2 - 2x$ C. $y = -\frac{5}{x}$ D. $y = x^2 + \frac{1}{x}$

10. 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} a - x \geq -3 \\ x + 4 \leq -2\left(x - \frac{19}{2}\right) \end{cases}$ 的解集为 $x \leq 5$, 且关于 y 的分式方程 $2 - \frac{3}{y-2} = \frac{a}{2-y}$ 有非负整数解, 则符合条件的所有整数 a 的和为 ()

A. 12 B. 13 C. 15 D. 16

11. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 3$, 将 $\angle A$ 向内翻折, 点 A 落在 BC 上, 记为 A' , 折痕为 DE . 若将 $\angle B$ 沿 EA' 向内翻折, 点 B 恰好落在 DE 上, 记为 B' , 则点 B' 到 BC 的距离为 ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

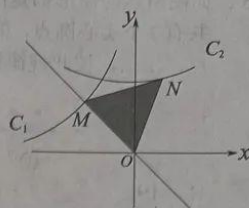


(第11题)

12. 已知反比例函数 $C_1: y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图象如图所示, 将该曲线

绕点 O 顺时针旋转 45° 得到曲线 C_2 , 点 N 是曲线 C_2 上一点, 点 M 在直线 $y = -x$ 上, 连接 MN 、 ON , 若 $MN = ON$, $\triangle MON$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 则 k 的值为 ()

- A. -2 B. $-2\sqrt{3}$
C. -4 D. $-4\sqrt{3}$



(第12题)

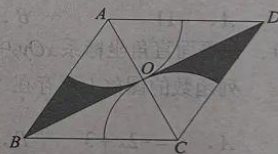
二、填空题: (本大题6个小题, 每小题4分, 共24分) 请将每小题的答案直接填在答题卡中对应的横线上.

13. 对于中国而言, 2020年是一个新的时间坐标. 过去40年, 中国完成了卓越的经济转型, 八亿两千万人成功脱贫, 这是人类发展史上具有里程碑意义的重大成就. 将数字 820 000 000 用科学记数法表示为 _____.

14. 计算: $(\pi - 3.14)^0 + |-5| - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} =$ _____.

15. 现有三张正面分别标有数字1, 2, 3的不透明卡片, 它们除数字外其余完全相同, 将它们背面朝上洗均匀, 随机抽取一张, 记下数字后放回, 背面朝上洗均匀, 再随机抽取一张记下数字. 前后两次抽取的数字分别记为 m, n . 则点 (m, n) 在函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上的概率是 _____.

16. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 和 BD 交于点 O , $\angle ABD = 30^\circ$, $AB = 4$, 分别以点 A 、点 C 为圆心, 以 OA 的长为半径画弧分别与菱形的边相交, 则图中阴影部分的面积为 _____ (结果保留 π).



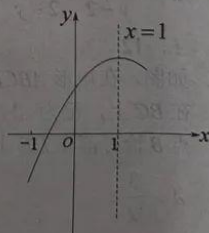
(第16题)

17. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$)

的部分图象如图所示, 对称轴为直线 $x = 1$, 且与 x 轴的一个交点在点 $(-1, 0)$ 和 $(0, 0)$ 之间. 下列四个结论:

- ① $abc < 0$;
② 若点 $C(-3, y_1)$ 、 $D(\sqrt{26}, y_2)$ 在此抛物线上, 则 $y_1 < y_2$;
③ $2a + b + c < 0$;
④ 对于任意实数 m , 总有 $a + b \geq m(am + b)$;
⑤ 对于 a 的每一确定值, 若一元二次方程 $ax^2 + bx + c = p$ (p 为常数, $p > 0$) 的根为整数, 则 p 的值只有两个.

其中正确的结论是 _____ (填写序号).



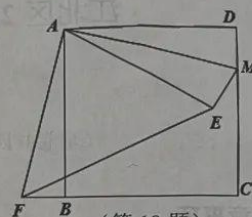
(第17题)

18. 如图, 正方形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{13}$, 点 M 在边 CD 上,

且 $DM = \frac{1}{4} DC$, $\triangle AEM$ 与 $\triangle ADM$ 关于 AM 所在直线对

称, 将 $\triangle ADM$ 按顺时针方向绕点 A 旋转 90° 得到 \triangle

ABF , 连接 EF , 则线段 EF 的长为_____.



(第 18 题)

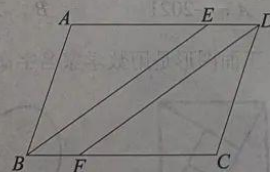
三、解答题: (本大题 7 个小题, 每小题 10 分, 共 70 分) 解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤, 画出必要的图形, 请将解答过程书写在答题卡中对应的位置.

19. (1) 解方程: $2x^2 - 3x + 1 = 0$; (2) 化简: $\frac{m^2 - 1}{m^2 - 2m + 1} \div (\frac{3m - m^2}{m - 1} + m - 1)$.

20. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别是边 AD 、 BC 上一点, 且 $AE = CF$, 连接 BE 、 DF .

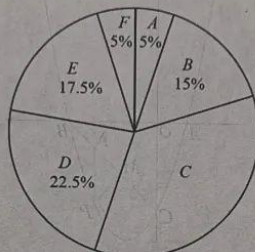
(1) 求证: $BE = DF$;

(2) 若 $\angle C = 110^\circ$, $\angle ADF = 35^\circ$, 求 $\angle ABE$ 的度数.



21. “文明江北，因为有您”！我区自2017年成功创建全国文明城区以来，牢固树立“文明建设为大家、建设文明靠大家”的工作理念，全区掀起了志愿服务的热潮，区教委也号召各校学生积极参与到志愿服务当中。为了解甲、乙两所学校学生一周志愿服务情况，从这两所学校中各随机抽取40名学生，分别对他们一周的志愿服务时长（单位：分钟）进行收集、整理、描述和分析，下面给出了部分信息：

a. 甲校40名学生一周的志愿服务时长的扇形统计图如图（数据分成6组：
A. $20 \leq x < 40$ ，B. $40 \leq x < 60$ ，C. $60 \leq x < 80$ ，D. $80 \leq x < 100$ ，E. $100 \leq x < 120$ ，
F. $120 \leq x < 140$ ）：



b. 甲校40名学生一周志愿服务时长在 $60 \leq x < 80$ 这一组的是：

60 60 62 63 65 68 70 72 73 75 75 76 80 80

c. 甲、乙两校各抽取的40名学生一周志愿服务时长的平均数、中位数、众数如下：

学校	平均数	中位数	众数
甲	75	m	90
乙	75	76	85

根据以上信息，回答下列问题：

- 上面图表中的 $m =$ 75，扇形统计图中“C组”所对应的圆心角的度数为 81° 度；
- 根据上面的统计结果，你认为 甲 校学生志愿服务工作做得好（填“甲”或“乙”），理由是 甲校学生志愿服务时长的众数90大于乙校学生志愿服务时长的众数85；
- 小江和小北两位同学都参加了观音桥街道的志愿者服务项目，该街道志愿者服务工作一共设置了三个岗位，请用列表或画树状图的方法，求小江、小北恰好被分配到同一岗位进行志愿者服务的概率。

22. 在初中阶段的函数学习中, 我们经历了列表、描点、连线画函数图象, 并结合图象研究函数性质的过程. 以下是我们研究函数 $y = \frac{10}{x^2 + 1}$ 性质及其应用的部分过程, 请按要求完成下列各小题.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	a	1	2	5	b	5	2	1	$\frac{10}{17}$...

- (1) 列表, 写出表中 a 、 b 的值: $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

描点、连线, 在所给的平面直角坐标系中画出该函数的图象.

- (2) 根据函数图象, 判断下列关于该函数性质的说法是否正确, 正确的在相应的括号内打“√”, 错误的在相应的括号内打“×”;

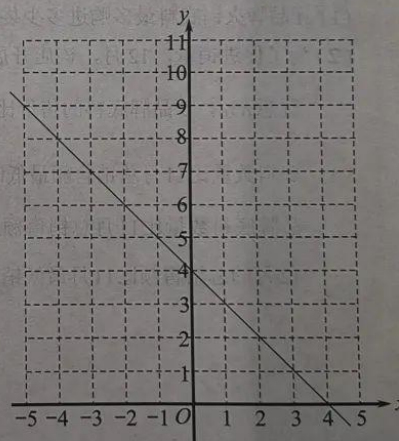
①该函数图象是轴对称图形, 它的对称轴为 y 轴; ()

②该函数在自变量的取值范围内, 没有最大值, 也没有最小值; ()

③当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大. ()

- (3) 已知函数 $y = -x + 4$ 的图象如图所示, 结合你所画的函数图象, 直接写出不等式

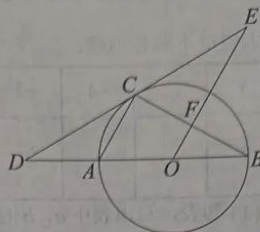
$$\frac{10}{x^2 + 1} > -x + 4 \text{ 的解集.}$$



23. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, 点 D 为线段 BA 的延长线上一点, 连接 DC , 过点 O 作 $OE \parallel AC$ 交 DC 延长线于点 E , 交 BC 于点 F , 且满足 $\angle B = \angle E$.

(1) 求证: DC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AB = 8$, $AC = 4$, 求 EF 的长.



24. 作为巴渝文化的发源地, 重庆在许多领域都首屈一指, 而其中最具代表性的, 当然还是它的美食. 在无数美食中, 最具地域特色的, 非重庆火锅莫属. 近年来, 随着重庆市成为网红城市, 许多游客到重庆来打卡麻辣鲜香的火锅, 同时还会购买火锅底料作为伴手礼. 11月, 洪崖洞附近一特产店购进 A 、 B 两种品牌火锅底料共 450 袋, 其中 A 品牌底料每袋售价 20 元, B 品牌底料每袋售价 30 元. 11月全部售完这批火锅底料, 所得总销售额不低于 11500 元.

(1) A 品牌火锅底料最多购进多少袋?

(2) 为了促进销量, 12月, 该店开展了优惠活动, A 品牌底料的售价比11月的价格

优惠 $a\%$, B 品牌底料的售价比11月的价格优惠 $\frac{2}{5}a\%$. 结果12月售出的 A 品牌

底料数量比11月总销售额最低时售出的 A 品牌底料数量增加了 $\frac{1}{2}a\%$, 售出的 B

品牌底料数量比11月总销售额最低时售出的 B 品牌底料数量增加了 $a\%$, 结果

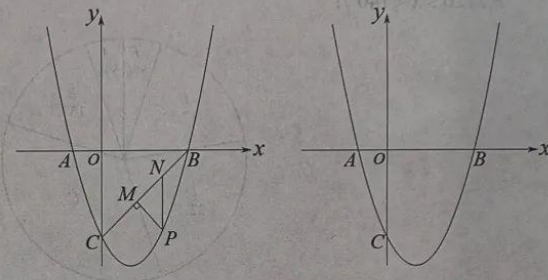
12月的总销售额比11月最低销售额增加了 $\frac{1}{23}a\%$, 求 a 的值.

25. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ ($a > 0$) 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 P 为直线 BC 下方抛物线上的一动点, $PM \perp BC$ 于点 M , $PN \parallel y$ 轴交 BC 于点 N . 求线段 PM 的最大值和此时点 P 的坐标;

(3) 点 E 为 x 轴上一动点, 点 Q 为抛物线上一动点, 是否存在以 CQ 为斜边的等腰直角三角形 CEQ ? 若存在, 请直接写出点 E 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



四、解答题: (本大题1个小题, 共8分) 解答时必须给出必要的演算过程或推理步骤, 画出必要的图形, 请将解答过程书写在答题卡中对应的位置上.

26. 【问题背景】如图1, P 是等边三角形 ABC 外一点, $\angle APB = 30^\circ$, 则 $PA^2 + PB^2 = PC^2$. 小明为了证明这个结论, 将 $\triangle PAB$ 绕点 A 逆时针旋转 60° , 请根据此思路完成其证明;

【迁移应用】如图2, 在等腰直角三角形 ABC 中, $BA = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 点 P 在 $\triangle ABC$ 外部, 且 $\angle BPC = 45^\circ$, 若 $\triangle APC$ 的面积为 5.5, 求 PC ;

【拓展创新】如图3, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 在四边形 $ABCD$ 内部, 且 $DE = EC$, $\angle DEC = 90^\circ$, $\angle AEB = 135^\circ$, $AD = \sqrt{3}$, $BC = \sqrt{5}$, 直接写出 AB 的长.

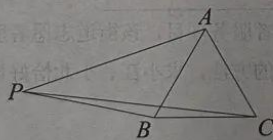


图1

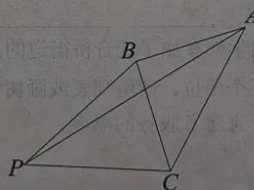


图2

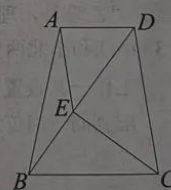


图3