

重庆外国语学校 2020-2021 学年度上学期期末考试

初三 数学试题

(全卷共五个大题, 满分 150 分. 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 试题的答案书写在答题卡上, 不得在试卷上直接作答;
2. 作答前认真阅读答题卡上的注意事项;
3. 作图(包括作辅助线)请一律用黑色签字笔完成;
4. 考试结束, 由监考人员将试题和答题卡一并收回。

参考公式: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$.

一、选择题: (本大题 12 个小题, 每小题 4 分, 共 48 分) 在每个小题的下面, 都给出了代号为 A、B、C、D 的四个答案, 其中只有一个是正确的, 请将答题卡上题号右侧正确答案所对应的方框涂黑。

1. 在下列“禁毒”、“和平”、“志愿者”、“节水”这四个标志中, 属于轴对称图形的是 ()

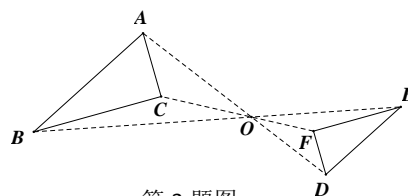


2. 重庆是全国重点旅游城市, 2020 年实现旅游总收入约为 57 400 000 万元, 数据 57 400 000 用科学记数法可表示为 ()

A. 0.574×10^8 B. 5.74×10^8 C. 5.74×10^7 D. 574×10^5

3. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 位似, 位似中心为点 O , 且 $AB:DE = 3:2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积与 $\triangle DEF$ 面积之比为 ()

A. 3:2 B. 3:5
C. 9:4 D. 9:5



第 3 题图

4. 函数 $y = \frac{\sqrt{x+5}}{3}$ 中, x 的取值范围是 ()

A. $x > -5$ B. $x > -5$ 且 $x \neq 0$ C. $x \geq -5$ 且 $x \neq 0$ D. $x \geq -5$

5. 若 $x = -1$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx - 1 = 0$ 的一个根, 则 $2021 - 2a + 2b$ 的值为 ()

A. 2019 B. 2020 C. 2022 D. 2023

6. 已知一次函数 $y = kx + 2$ 的图象经过点 A, 且 y 随 x 的增大而减小, 则点 A 的坐标可以是 ()

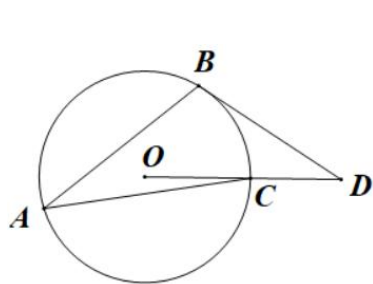
A. $(-1, 2)$ B. $(2, -1)$ C. $(2, 3)$ D. $(3, 4)$

7. 下列命题中, 假命题是 ()

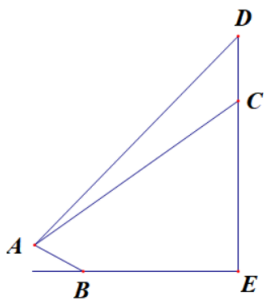
A. 对角线互相垂直的四边形是菱形 B. 正方形的对角线互相垂直平分
C. 矩形的对角线相等 D. 对角线互相平分的四边形是平行四边形

8. 如图, 已知 $\odot O$ 上三点 A 、 B 、 C , 连接 AB 、 AC 、 OC , 切线 BD 交 OC 的延长线于点 D , 若 $OC = 2$, $\angle A = 30^\circ$, 则 DB 的长为 ()

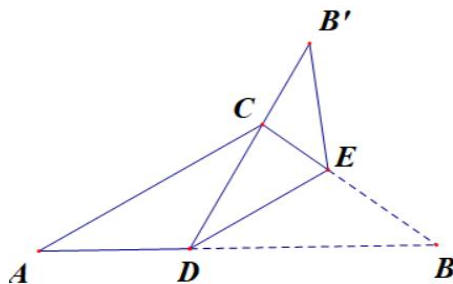
A. 4 B. $2\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 1



第 8 题图



第 9 题图



第 11 题图

9. 山城重庆的美景吸引了很多游客, 越来越多的人喜欢用无人机拍摄网红景点. 如图, 为了拍摄坡比为 $1:2.4$ 的斜坡 AB 上的景点 A , 航拍无人机先从 C 点俯拍, 此时的俯角为 37° , 为取得更震撼的拍摄效果, 无人机升高 100 米到达 D 点, 此时的俯角变为 45° . 已知坡 AB 的长为 65 米, 则无人机与斜坡 AB 的坡底 B 的水平距离 BE 的长度为 () 米 (参考数据: $\tan 37^\circ \approx 0.75$, $\sin 37^\circ \approx 0.6$, $\cos 37^\circ \approx 0.80$)

A. 335 B. 340 C. 345 D. 350

10. 如果关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2x-2a \leq x-1, \\ \frac{x-3}{2}+1 > \frac{x+2}{3} \end{cases}$ 无解, 且关于 y 的分式方程 $\frac{a-y}{1-y} + \frac{2a}{y-1} = 3$ 有正数解, 则所有符合条件的整数 a 的值之和是 ()

A. 3 B. 4 C. 7 D. 8

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 是线段 AB 上的一点, 过点 D 作 $DE \parallel AC$ 交 BC 于点 E , 将 $\triangle BDE$ 沿 DE 翻折, 得到 $\triangle B'DE$, 若点 C 恰好在线段 $B'D$ 上, 若 $\angle BCD = 90^\circ$, $DC:CB' = 3:2$, $AB = 16\sqrt{2}$, 则 CE 的长度为 ()

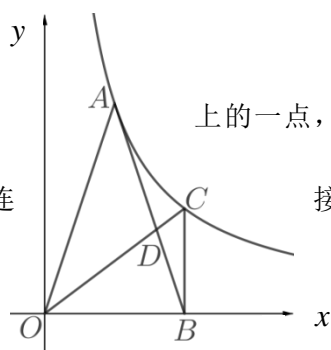
A. $4\sqrt{2}$ B. $\frac{7}{2}\sqrt{2}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

12. 如图, 在等腰 $\triangle AOB$ 中, $AO = AB$, 顶点 A 为反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (其中 $x > 0$) 图象

上的一点, 点 B 在 x 轴正半轴上, 过点 B 作 $BC \perp OB$, 交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象于点 C , 连

OC 交 AB 于点 D , 若 $\triangle BCD$ 的面积为 2, 则 k 的值为 ()

A. 20 B. $\frac{50}{3}$ C. 16 D. $\frac{40}{3}$



第 12 题图

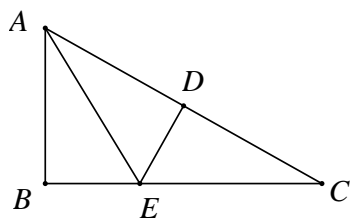
二、填空题: (本大题 6 个小题, 每小题 4 分, 共 24 分) 请将每小题的答案直接填在答题卡中对应的横线上。

13. 计算: $4\sin 45^\circ - |1 - \sqrt{8}| + (-\frac{1}{2})^{-3} =$ _____.

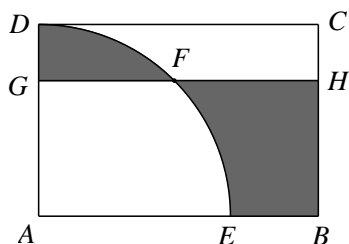
14.如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ$, AC 的垂直平分线交 BC 于点 E 、交 AC 于点 D ,若 $BE=DE$, $DC=3$, 则 AE 的长为_____.

15.现从 $-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3$ 中,任取两个不同的数分别作为二次函数 $y=ax^2-2x+b$ 中的 a 和 b ,则所得抛物线与 x 轴有公共点的概率为_____.

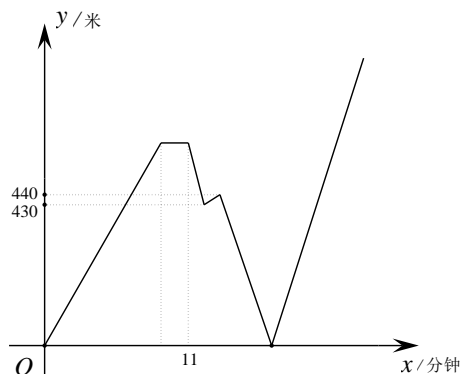
16.如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB=3$, $AD=2$,以 A 为圆心, AD 为半径作圆交 AB 于点 E , F 为 DE 的中点,过 F 作 CD 的平行线,交 AD 于点 G ,交 BC 于点 H ,则阴影部分的面积为_____.



第 14 题图



第 16 题图



第 17 题图

17.一天,小新带弟弟从家出发一起去文具店买文具.出门 10 分钟后,小新发现忘了带钱,于是立即停下,并打电话让正在家里的妈妈送钱出来,挂电话后,小新让弟弟原地等待,自己立刻以先前速度的 1.6 倍往家走去,同时,妈妈也拿上钱从家里出发.30 秒后,小新觉得弟弟一人在路边等待不安全,于是立即以刚才的速度折返,接上弟弟后,立刻以出门时的速度往家走去.与妈妈相遇后,接过妈妈手中的钱,小新和弟弟立即以出门时的速度往文具店走去,妈妈则以先前速度的一半回家.最后妈妈到家时,兄弟俩刚好到达文具店.小新和妈妈相距的路程 y (米) 和小新出发的时间 x (分钟) 之间的函数关系如图所示,整个过程中,小新和妈妈都是匀速前进,且小新接过钱的时间忽略不计,则小新家和文具店的距离是_____米.

18.元旦节前,某商店购进了一批 A 、 B 款式的大灯笼和若干小灯笼,其中小灯笼个数占灯笼总个数的 80%,它们的进价之比为 10:20:1,店主将三种灯笼分别加价 50%、40%、100% 进行销售,全部售完后利润率为 54%.年关将至,该商店又购进了这三种灯笼,且进货量和之前分别相同,但是 A 、 B 款式的大灯笼进价分别上涨了 50%、25%,小灯笼进价不变,于是店主将这两种大灯笼的价格分别在现在的进价基础上加价 60%、40% 进行销售,且购买一个 A 款式的大灯笼赠送两个小灯笼,购买一个 B 款式的大灯笼赠送 4 个小灯笼,余下的小灯笼售价与之前相同,那么这批灯笼卖完后,利润率为_____.

三、解答题(本大题共 6 个小题,每题 10 分,共 60 分),解答时每小题都必须写出必要的演算过程或推理步骤,请将解答过程书写在答题卡中对应的位置上.

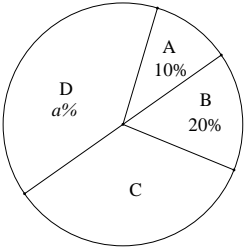
19.计算: (1) $(x-2y)^2 - x(x-4y)$ (2) $(\frac{5}{a+3} + a - 3) \div \frac{a^2 - 4a + 4}{2-a} + 1$

20.目前，重庆市正全面开展生活垃圾分类工作. 随着生活垃圾分类的全面推广，一些街镇也积极行动起来，通过入户宣传、开展各种趣味活动等，提高居民参与生活垃圾分类的积极性。为了进一步提高垃圾分类的准确度，某社区对甲、乙两个小区的居民进行了有关垃圾分类常识的测试（满分 30 分），并从甲、乙两小区各随机抽取 20 名居民的测试成绩进行整理分析（成绩得分用 x 表示，共分成四组：A. $10 \leq x < 15$ ，B. $15 \leq x < 20$ ，C. $20 \leq x < 25$ ，D. $25 \leq x \leq 30$ ），下面给出了部分信息：

甲小区 20 名居民测试成绩：13,15,16,19,20,21,22,23,24,25,25,26,27,27,28,28,28,29,30,30
 乙小区 20 名居民测试成绩在 C 组中的数据是：20 23 21 24 22 21

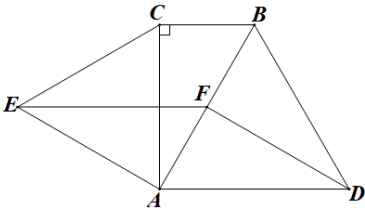
甲、乙两小区被抽取居民的测试成绩统计表 乙小区被抽取居民的测试成绩扇形统计

	平均数	中位数	方差
甲小区	23.8	25	25.75
乙小区	22.3	b	24.34



- 根据以上信息，解答下列问题：
- (1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- 根据以上数据，你认为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 小区（填“甲”或“乙”）垃圾分类的准确度更高，说明理由：
 _____；
- (2) 若甲、乙两个校区居民共 2400 人，估计两个小区测试成绩优秀（ $x \geq 25$ ）的居民人数是多少？

21.如图，分别以 $Rt\triangle ACB$ 的直角边 AC 和斜边 AB 向外作等边 $\triangle ACE$ ，等边 $\triangle ABD$ ，取 AB 的中点 F ，连接 DF 、 EF ，已知 $\angle BAC = 30^\circ$.



- (1) 求证：四边形 $ADFE$ 是平行四边形；
- (2) 若 $BD = 4$ ，求四边形 $BCEF$ 的面积.

22. 学习函数时，我们经历了列表、描点、连线画出函数图象，观察分析图象特征，概括函数性质的过程. 结合已

有的学习经验，下面我们对函数 $y = \begin{cases} -\frac{2}{x} & (x < 0) \\ x^3 - 3x^2 + 2 & (x \geq 0) \end{cases}$ 的图象和性质进行探究，请将以下探究过程补充完整：

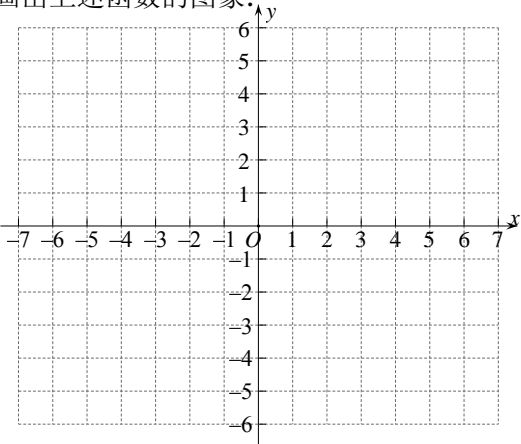
- (1) 选取适当的值补全表格；描点、连线，在所给的平面直角坐标系中画出上述函数的图象：

x
y

- (2) 结合图象，写出该函数的一条性质：_____；
- (3) 结合这个函数的图象与性质，解决下列问题：

①若点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 在这个函数的图象上，且 $0 < x_3 < 3$, $-1 < x_1 < x_2 < 0$, 请写出 y_1, y_2, y_3 的大小关系_____（用“ $<$ ”连接）.

②若直线 $y = 2a + 1$ （ a 是常数）与该函数图象有且只有三个交点，则 a 的取值范围为_____.



23.在大力推广垃圾分类之前,某小区虽然在每栋楼都放置了可回收垃圾桶和不可回收垃圾桶,但是少数居民对垃圾分类的认识不够深入,常常将垃圾混装后随意丢入垃圾桶,导致垃圾分类混乱,垃圾处理站将可回收垃圾桶内的垃圾记为 A 类垃圾,将不可回收垃圾桶内的垃圾记为 B 类垃圾.该小区共有 10 栋楼,平均每栋楼每月产生 12 吨 A 类垃圾和 4 吨 B 类垃圾,每吨 B 类垃圾处理费是每吨 A 类垃圾处理费的 2 倍,该小区每月 A 、 B 两类垃圾处理费总费用为 8000 元.

(1) 求每吨 A 类垃圾处理费多少元?

(2) 在大力推广垃圾分类之后,该小区的居民认识到了垃圾分类的重要性并规范地放置垃圾.该小区每月产生的 A 、 B 两类垃圾总重量不变的情况下, B 类垃圾的重量增加了 $a\%$, 同时, 垃圾处理站通过技术革新将 A 、 B 两类垃圾每吨处理费分别降低了 $\frac{5}{4}a\%$ 和 $\frac{15}{16}a\%$, 这样与推广垃圾分类之前相比, 该小区每月 A 、 B 两类垃圾处理费总费用减少了 $\frac{39}{40}a\%$, 求 a 的值.

24.如果一个三位数满足各位数字都不为 0, 且个位数字比十位数字大 1, 则称这个三位数为完美数.若 m 、 n 都是完美数, 将组成 m 的各数位上的数字中最大数字作为两位数 p 的十位上的数字, 组成 n 的各数位上的数字中最大数字作为两位数 p 的个位上的数字, 再将组成 m 的各数位上的数字中最小数字作为两位数 q 的十位上的数字, 组成 n 的各数位上的数字中最小数字作为两位数 q 的个位上的数字, 所得的这两个数 p 、 q 之和记为 $F(m, n)$.

例如: 因为 $1+1=2, 4+1=5$, 所以 112 和 645 都是完美数, 则 $F(112, 645) = 26 + 14 = 40$.

因为 $1+1=2, 8+1=9$, 所以 212 和 689 都是完美数, 则 $F(212, 689) = 29 + 16 = 45$.

(1) 判断 623 和 456 是否为完美数并说明原因.如果都是完美数则计算 $F(623, 456)$ 的值.

(2) 若 s 、 t 都是完美数, 其中 $s = 400 + 10x + y$, $t = 310 + 100a + b$ ($1 \leq x \leq 8$, $1 \leq y \leq 9$, $0 \leq a \leq 5$, $1 \leq b \leq 9$ 且 x 、 y 、 a 、 b 都是整数), 规定: $K(s, t) = |s - t|$, 当 $F(s, 123) - F(t, 867) = 20$ 时, 求 $K(s, t)$ 的最小值.

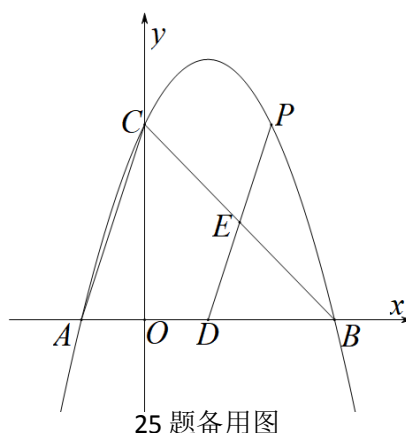
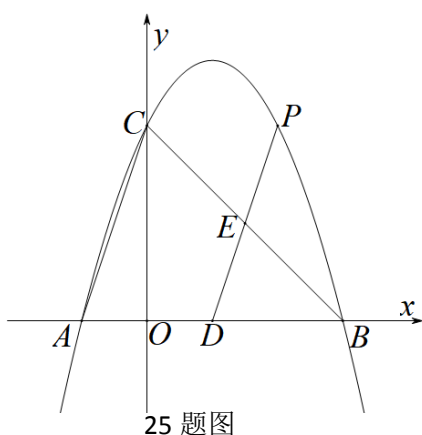
四、解答题：（本大题共 2 个小题，其中 25 题 10 分，26 题 8 分，共 18 分），解答时每小题都必须写出必要的演算过程或推理步骤，请将解答过程书写在答题卡中对应的位置上。

25. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于 A, B 两点（ A 在 B 的左侧），与 y 轴交于点 $C(0, 6)$ ，其中 $AB = 8$ ， $\tan \angle CAB = 3$ 。

（1）求抛物线的表达式；

（2）点 P 是直线 BC 上方抛物线上一点，过点 P 作 $PD \parallel AC$ 交 x 轴于点 D ，交 BC 于点 E ，求 $\sqrt{10}PE - \sqrt{2}BE$ 的最大值及点 P 的坐标。

（3）将该抛物线沿射线 CA 方向平移 $2\sqrt{10}$ 个单位长度得到抛物线 y_1 ，平移后的抛物线与原抛物线相交于点 F ，点 G 为抛物线 y_1 的顶点，点 M 为直线 FG 上一点，点 N 为平面上一点。在（2）中，当 $\sqrt{10}PE - \sqrt{2}BE$ 的值最大时，是否存在以 P, E, M, N 为顶点的四边形是菱形，若存在，直接写出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由。



26. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 45^\circ$ ， CD 是边 AB 上的高线， E 是 AC 上一点，连接 BE ，交 CD 于点 F 。

（1）如图 1，若 $\angle ABE = 15^\circ$ ， $BC = \sqrt{3} + 1$ ，求 DF 的长；

（2）如图 2，若 $BF = AC$ ，过点 D 作 $DG \perp BE$ 于点 G ，求证： $BE = CE + 2DG$ ；

（3）如图 3，若 R 为射线 BA 上的一个动点，以 BR 为斜边向外作等腰直角 $\triangle BRH$ ， M 为 RH 的中点。在（2）的条件下，将 $\triangle CEF$ 绕点 C 旋转，得到 $\triangle CE'F'$ ， E, F 的对应点分别为 E', F' ，直线 MF' 与直线 AB 交于点 P ， $\tan \angle ACD = \frac{1}{3}$ ，直接写出当 MF' 取最小值时 $\frac{RM}{PF'}$ 的值。

