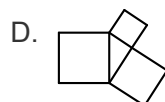
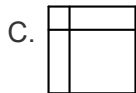


# 2020~2021学年福建福州台江区福州华伦中学初二上学期期末数学试卷

## 一、选择题

(本大题共10小题，每小题4分，共40分)

1. 古人使用下面的几何图形研究勾股定理，是轴对称图形的是（ ）.



2. 下列二次根式中属于最简二次根式的是（ ）.

A.  $\sqrt{14}$

B.  $\sqrt{48}$

C.  $\sqrt{4a+4}$

D.  $\sqrt{0.1a}$

3. 下列各式运算的结果可以表示为 $2021^5$ （ ）.

A.  $(2021^3)^2$

B.  $2021^3 \times 2021^2$

C.  $2021^{10} \div 2021^2$

D.  $2021^3 + 2021^2$

4. 小聪在计算 $9.7 \times 10.3$ 时，做法如下：

$$9.7 \times 10.3 = (10 - 0.3) \times (10 + 0.3) = 10^2 - 0.3^2 = 100 - 0.09 = 99.91.$$

在以上解法中，小聪没有用到的数学方法是（ ）.

A. 平方差公式.

B. 完全平方公式

C. 平方运算

D. 有理数减法

5. 下列等式成立的是（ ）.

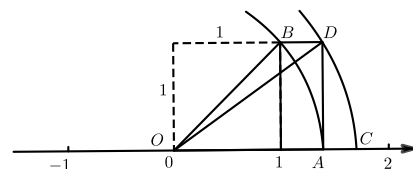
A.  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{a+b}$

B.  $\frac{2}{2a+b} = \frac{1}{a+b}$

C.  $\frac{ab}{ab-b^2} = \frac{a}{a-b}$

D.  $\frac{a}{-a+b} = -\frac{a}{a+b}$

6. 如图，数轴上点C表示的数是（ ）.



A. 1

B.  $\sqrt{2}$

C.  $\sqrt{3}$

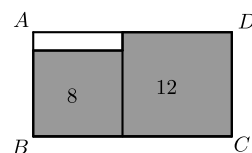
D. 1.5

7.

甲、乙两位同学做中国结，已知甲每小时比乙少做6个，甲做30个所用的时间与乙做45个所用的时间相同，求甲每小时做中国结的个数．设甲每小时做 $x$ 个，可列方程为（ ）．

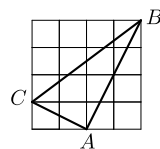
- A.  $\frac{30}{x+6} = \frac{45}{x}$       B.  $\frac{30}{x-6} = \frac{45}{x}$       C.  $\frac{30}{x} = \frac{45}{x-6}$       D.  $\frac{30}{x} = \frac{45}{x+6}$

8. 如图，在矩形 $ABCD$ 中无重叠放入面积分别为 $8\text{cm}^2$ 和 $12\text{cm}^2$ 的两张正方形纸片，则图中空白部分的面积为（ ）．



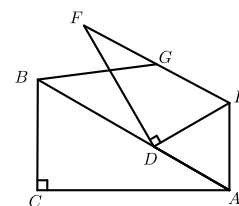
- A.  $4\sqrt{3}\text{cm}^2$       B.  $(8\sqrt{3} - 12)\text{cm}^2$       C.  $(4\sqrt{6} - 8)\text{cm}^2$       D.  $(4\sqrt{6} + 12)\text{cm}^2$

9. 在如图的网格中，每个小正方形的边长为1， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 三点均在正方形格点上，则下列结论错误的是（ ）．



- A.  $AB = 2\sqrt{5}$       B.  $\angle BAC = 90^\circ$   
C.  $S_{\triangle ABC} = 10$       D. 点 $A$ 到直线 $BC$ 的距离是2

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 30^\circ$ ， $AC = 6\sqrt{3}$ ， $D$ 为 $AB$ 上一动点（不与点 $A$ 重合）， $\triangle AED$ 为等边三角形，过 $D$ 点作 $DE$ 的垂线， $F$ 为垂线上任意一点， $G$ 为 $EF$ 的中点，则线段 $BG$ 长的最小值是（ ）．



- A.  $2\sqrt{3}$       B. 6      C.  $3\sqrt{3}$       D. 9

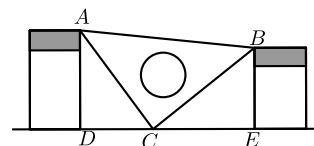
## 二、填空题

（本大题共6小题，每小题4分，共24分）

11. 新冠病毒的直径大约是0.00000014米，0.00000014用科学记数法表示为 \_\_\_\_\_ ．

12.

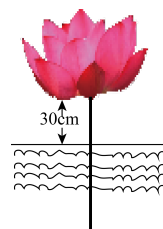
如图，课间小明拿着老师的等腰三角板玩，不小心掉到两张凳子之间（凳子与地面垂直），已知  $DC = 60$ ， $CE = 80$ ，则两张凳子的高度之和为 \_\_\_\_\_。



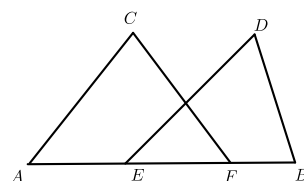
13. 计算:  $(\sqrt{2-x})^2 + \sqrt{(x-7)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

14. 点  $A(a+1, 2)$ 、 $B(3, b-1)$  两点关于  $x$  轴对称， $C(a, b)$  的坐标是 \_\_\_\_\_。

15. 如图，湖面上有一朵盛开的红莲，它高出水面 30cm。大风吹过，红莲被吹至一边，花朵下部刚好齐及水面，已知红莲移动的水平距离为 60cm，则水深是 \_\_\_\_\_ cm。



16. 如图，线段  $AB = 10$ ， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $AC = BD = 4\sqrt{2}$ ，点  $E$ 、 $F$  为线段  $AB$  上两点。从下面 4 个条件中：①  $CE = DF = 5$ ；②  $AF = BE$ ；③  $CE = DF = 7$ ；④  $\angle CEB = \angle DEA$ ，选择一个条件，使得  $\triangle ACE$  和  $\triangle BDF$  全等。则所有满足的条件是 \_\_\_\_\_。（填序号）



### 三、解答题

(本大题共 8 小题，共 86 分)

17. 解答下列各题。

(1) 化简:  $9(x-1)^2 - (3x+2)(3x-2)$ .

(2) 计算:  $\sqrt{24} \div \sqrt{3} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2021^0$ .

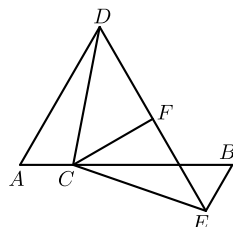
18. 解答下列各题。

(1) 分解因式:  $2ab^2 - 4a^2b + 2a^3$ .

(2) 解方程:  $\frac{a}{2-a} + \frac{2}{a-2} = 1$ .

19. 先化简再求值:  $\left(\frac{3}{x-1} - x - 1\right) \div \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1}$ , 其中  $x = 2 - \sqrt{2}$ .

20. 如图, 点  $C$  在线段  $AB$  上,  $AD \parallel EB$ ,  $AC = BE$ ,  $AD = BC$ .  $CF$  平分  $\angle DCE$ , 求证:  $CF \perp DE$ .



21. 已知  $m = a^2b$ ,  $n = 2a^2 + 3ab$ .

(1) 当  $a = -3$ ,  $b = -2$ , 分别求  $m$ ,  $n$  的值.

(2) 若  $m = 12$ ,  $n = 18$ , 求  $\frac{1}{a} + \frac{2}{3b}$  的值.

22. 学校在假期对教室内的黑板进行整修, 需在规定的日期内完成. 如果由甲工程小组做, 恰好按期完成; 如果由乙工程小组做, 则要超过规定日期3天. 结果两队合作了2天, 余下部分由乙组独做, 正好在规定的日期内完成, 问规定日期是几天?

23. 若一个含根号的式子  $a + b\sqrt{x}$  可以写成  $m + n\sqrt{x}$  的平方 (其中  $a, b, m, n$  都是整数,  $x$  是正整数), 即  $a + b\sqrt{x} = (m + n\sqrt{x})^2$ , 则称  $a + b\sqrt{x}$  为完美根式,  $m + n\sqrt{x}$  为  $a + b\sqrt{x}$  的完美平方根.

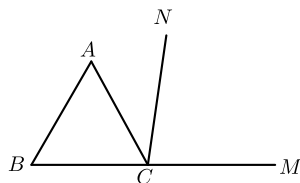
例如: 因为  $19 - 6\sqrt{2} = (1 - 3\sqrt{2})^2$ , 所以  $1 - 3\sqrt{2}$  是  $19 - 6\sqrt{2}$  的完美平方根.

(1) 已知  $2\sqrt{3} - 3$  是  $a - 12\sqrt{3}$  的完美平方根, 求  $a$  的值.

(2) 若  $m + n\sqrt{7}$  是  $a + b\sqrt{7}$  的完美平方根, 用含  $m, n$  的式子分别表示  $a, b$ .

(3) 已知  $17 - 12\sqrt{2}$  是完美根式, 直接写出它的一个完美平方根.

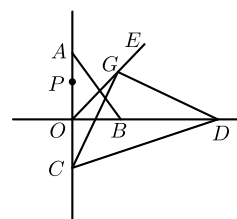
24. 如图,  $CN$  是等边  $\triangle ABC$  外角  $\angle ACM$  内部的一条射线, 设  $\angle ACN = \alpha$ , 点  $A$  关于  $CN$  的对称点为  $D$ , 连接  $AD, BD, CD$ , 其中  $AD, BD$  分别交射线  $CN$  于点  $E, P$ .



(1) 依题意补全图形, 并求出 $\angle BDC$ 的大小. (用含 $\alpha$ 的式子表示).

(2) 用等式表示线段 $PB$ ,  $PC$ 与 $PE$ 之间的数量关系, 并证明.

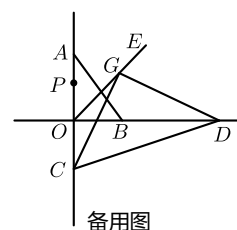
25. 如图, 点 $O$ 为线段 $AC$ 上一点,  $AC = 7$ ,  $OA = 4$ , 过点 $O$ 作直线 $OD \perp AC$ ,  $OD = 9$ , 在线段 $OD$ 上有一点 $B$ , 使得 $OB = \frac{1}{2}BD$ , 连接 $AB$ , 若动点 $P$ 从点 $O$ 开始以每秒1个单位的速度按 $O \rightarrow A \rightarrow B$ 的路径运动, 当运动到 $B$ 点时停止运动, 设出发的时间为 $t$ 秒.



(1) 当点 $P$ 在线段 $OA$ 上运动时, 若 $BP = \sqrt{13}$ , 则 $t$ 的值为 \_\_\_\_\_.

(2) 求当 $t$ 为何值时,  $\triangle BOP$ 为等腰三角形.

(3) 若点 $G$ 为 $\angle AOB$ 内部射线 $OE$ 上一点, 当 $\triangle CGD$ 为等腰直角三角形, 求线段 $OG$ 的长.

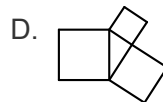
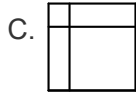
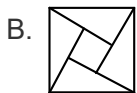
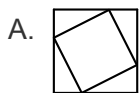


## 2020~2021学年福建福州台江区福州华伦中学初二上学期期末数学试卷(详解)

### 一、选择题

(本大题共10小题，每小题4分，共40分)

1. 古人使用下面的几何图形研究勾股定理，是轴对称图形的是（ ）.



【答案】C

【解析】A选项：不是轴对称图形，所以本选项不符合题意，错误；

B选项：不是轴对称图形，所以本选项不符合题意，错误；

C选项：是轴对称图形，所以本选项符合题意，正确；

D选项：不是轴对称图形，所以本选项不符合题意，错误.

故选C.

2. 下列二次根式中属于最简二次根式的是（ ）.

A.  $\sqrt{14}$

B.  $\sqrt{48}$

C.  $\sqrt{4a+4}$

D.  $\sqrt{0.1a}$

【答案】A

【解析】A选项： $\sqrt{14}$ 是最简二次根式，故A正确；

B选项： $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ 不是最简二次根式，故B错误；

C选项： $\sqrt{4a+4} = 2\sqrt{a+1}$ 不是最简二次根式，故C错误；

D选项： $\sqrt{0.1a} = \frac{\sqrt{10a}}{10}$ 不是最简二次根式，故D错误.

故选A.

3. 下列各式运算的结果可以表示为 $2021^5$ （ ）.

A.  $(2021^3)^2$

B.  $2021^3 \times 2021^2$

C.  $2021^{10} \div 2021^2$

D.  $2021^3 + 2021^2$

【答案】B

【解析】A 选项： $(2021^3)^2 = 2021^6$ ，故A错误；

B 选项： $2021^3 \times 2021^2 = 2021^5$ ，故B正确；

C 选项： $2021^{10} \div 2021^2 = 2021^8$ ，故C错误；

D 选项： $2021^3 + 2021^2 = 2022 \times 2021^2$ ，故D错误.

故选 B .

4. 小聪在计算 $9.7 \times 10.3$ 时，做法如下：

$$9.7 \times 10.3 = (10 - 0.3) \times (10 + 0.3) = 10^2 - 0.3^2 = 100 - 0.09 = 99.91.$$

在以上解法中，小聪没有用到的数学方法是（ ）.

A. 平方差公式.

B. 完全平方公式

C. 平方运算

D. 有理数减法

【答案】B

【解析】在以上解法中，

小聪运用到的数学方法有平方差公式、平方运算、有理数减法，

没有用到完全平方公式.

故选B.

5. 下列等式成立的是（ ）.

A.  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{3}{a+b}$

B.  $\frac{2}{2a+b} = \frac{1}{a+b}$

C.  $\frac{ab}{ab-b^2} = \frac{a}{a-b}$

D.  $\frac{a}{-a+b} = -\frac{a}{a+b}$

【答案】C

【解析】A 选项： $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = \frac{b+2a}{ab} \neq \frac{3}{a+b}$ ，故A错误；

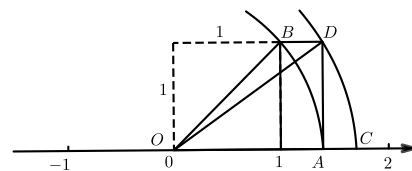
B 选项： $\frac{1}{a+b} = \frac{2}{2a+2b} \neq \frac{2}{2a+b}$ ，故B错误；

C 选项： $\frac{ab}{ab-b^2} = \frac{a}{a-b}$ ，故C正确；

D 选项： $\frac{a}{-a+b} = -\frac{a}{a-b} \neq -\frac{a}{a+b}$ ，故D错误.

故选 C .

6. 如图，数轴上点C表示的数是（ ）.



- A. 1                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\sqrt{3}$                       D. 1.5

【答案】C

【解析】由勾股定理可知：

$$OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\text{即 } OA = OB = \sqrt{2},$$

$$OD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } OC = OD = \sqrt{3},$$

所以数轴上点C表示的数是 $\sqrt{3}$ .

故选C.

7. 甲、乙两位同学做中国结，已知甲每小时比乙少做6个，甲做30个所用的时间与乙做45个所用的时间相同，求甲每小时做中国结的个数. 设甲每小时做 $x$ 个，可列方程为（ ）.

- A.  $\frac{30}{x+6} = \frac{45}{x}$                       B.  $\frac{30}{x-6} = \frac{45}{x}$                       C.  $\frac{30}{x} = \frac{45}{x-6}$                       D.  $\frac{30}{x} = \frac{45}{x+6}$

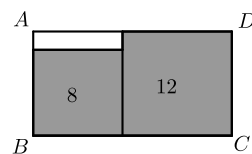
【答案】D

【解析】设甲每小时做 $x$ 个，则乙每小时做 $(x+6)$ 个，

$$\text{依题意得：} \frac{30}{x} = \frac{45}{x+6}.$$

故选D.

8. 如图，在矩形ABCD中无重叠放入面积分别为 $8\text{cm}^2$ 和 $12\text{cm}^2$ 的两张正方形纸片，则图中空白部分的面积为（ ）.



- A.  $4\sqrt{3}\text{cm}^2$                       B.  $(8\sqrt{3} - 12)\text{cm}^2$                       C.  $(4\sqrt{6} - 8)\text{cm}^2$                       D.  $(4\sqrt{6} + 12)\text{cm}^2$

【答案】C



【解析】由图可得大正方形面积为 $12\text{cm}^2$ ，所以边长为 $2\sqrt{3}\text{cm}$ ，

小正方形面积为 $8\text{cm}^2$ ，所以边长为 $2\sqrt{2}\text{cm}$ ，

$$\therefore AD = (2\sqrt{3} + 2\sqrt{2})\text{cm}, DC = 2\sqrt{3}\text{cm},$$

$$S_{\text{矩形}ABCD} = (2\sqrt{3} + 2\sqrt{2})2\sqrt{3}$$

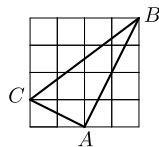
$$= (12 + 4\sqrt{6})\text{cm}^2,$$

$$\therefore S_{\text{空白}} = (12 + 4\sqrt{6}) - 12 - 8$$

$$= (4\sqrt{6} - 8)\text{cm}^2,$$

$\therefore$ 答案选C.

9. 在如图的网格中，每个小正方形的边长为1，A、B、C三点均在正方形格点上，则下列结论错误的是（ ）.



A.  $AB = 2\sqrt{5}$

B.  $\angle BAC = 90^\circ$

C.  $S_{\triangle ABC} = 10$

D. 点A到直线BC的距离是2

【答案】C

【解析】 $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ，故选项A正确，不符合题意；

$$\therefore AC = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2 = 25,$$

$\therefore \triangle ACB$ 是直角三角形，

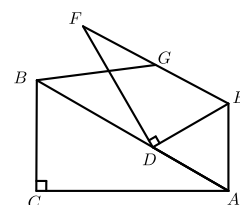
$\therefore \angle CAB = 90^\circ$ ，故选项B正确，不符合题意；

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 5, \text{故选项C错误，符合题意；}$$

$$\text{点A到直线BC的距离} = \frac{AC \cdot AB}{BC} = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{5} = 2, \text{故选项D正确，不符合题意.}$$

故选：C.

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 30^\circ$ ， $AC = 6\sqrt{3}$ ，D为AB上一动点（不与点A重合）， $\triangle AED$ 为等边三角形，过D点作DE的垂线，F为垂线上任意一点，G为EF的中点，则线段BG长的最小值是（ ）.



A.  $2\sqrt{3}$

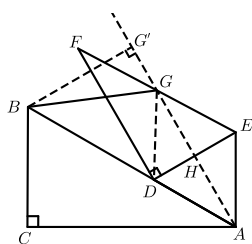
B. 6

C.  $3\sqrt{3}$

D. 9

【答案】B

【解析】如图，连接 $DG$ ， $AG$ ，设 $AG$ 交 $DE$ 于点 $H$ ，



$\because DE \perp DF$ ， $G$ 为 $EF$ 的中点，

$\therefore DG = GE$ ，

$\therefore$ 点 $G$ 在线段 $DE$ 的垂直平分线上，

$\because \triangle AED$ 为等边三角形，

$\therefore AD = AE$ ，

$\therefore$ 点 $A$ 在线段 $DE$ 的垂直平分线上，

$\therefore AG$ 为线段 $DE$ 的垂直平分线，

$\therefore AG \perp DE$ ， $\angle DAG = \frac{1}{2} \angle DAE = 30^\circ$ ，

$\therefore$ 点 $G$ 在射线 $AH$ 上，当 $BG \perp AH$ 时， $BG$ 的值最小，如图所示，设点 $G'$ 为垂足，

$\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle CAB = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB = \angle AG'B$ ， $\angle CAB = \angle BAG'$ ，

则在 $\triangle BAC$ 和 $\triangle BAG'$ 中，

$$\begin{cases} \angle ACB = \angle AG'B \\ \angle CAB = \angle BAG' \\ AB = AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAC \cong \triangle BAG'$  (AAS)，

$\therefore BG' = BC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC = 6\sqrt{3}$ ， $\angle CAB = 30^\circ$ ，

$\therefore AB = 2BC$ ，

$$\begin{aligned}\because AB^2 &= BC^2 + AC^2, \\ \therefore 4BC^2 &= BC^2 + (6\sqrt{3})^2, \\ \therefore BC &= 6, \\ \therefore BG' &= 6.\end{aligned}$$

故选B.

## 二、填空题

(本大题共6小题, 每小题4分, 共24分)

11. 新冠病毒的直径大约是0.00000014米, 0.00000014用科学记数法表示为 \_\_\_\_\_ .

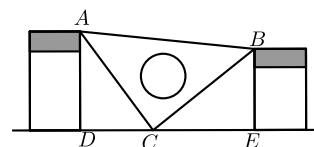
【答案】  $1.4 \times 10^{-7}$

【解析】  $0.00000014 = 1.4 \times 10^{-7}$ ,

故答案是:  $1.4 \times 10^{-7}$ .

【踩分点】

12. 如图, 课间小明拿着老师的等腰三角板玩, 不小心掉到两张凳子之间 (凳子与地面垂直), 已知  $DC = 60$ ,  $CE = 80$ , 则两张凳子的高度之和为 \_\_\_\_\_ .



【答案】 140

【解析】 由题意可得:  $\angle ACD + \angle BCE = 90^\circ$ ,  $\angle ACD + \angle DAC = 90^\circ$ ,

则  $\angle DAC = \angle BCE$ ,

在  $\triangle ACD$  和  $\triangle CBE$  中,

$$\begin{cases} \angle CDA = \angle CEB \\ \angle DAC = \angle BCE, \\ AC = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE$  (AAS) ,

故  $DC = BE = 60$ ,  $AD = CE = 80$ ,

则两条凳子的高度之和为:  $60 + 80 = 140$ .

【踩分点】

13. 计算:  $(\sqrt{2-x})^2 + \sqrt{(x-7)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$  .

【答案】  $9 - 2x$

【解析】  $\sqrt{2-x}$  有意义,

$$\therefore 2 - x \geq 0,$$

$$\therefore x \leq 2,$$

$$\therefore (\sqrt{2-x})^2 + \sqrt{(x-7)^2}$$

$$= 2 - x + 7 - x$$

$$= 9 - 2x$$

【踩分点】

14. 点  $A(a+1, 2)$ 、 $B(3, b-1)$  两点关于  $x$  轴对称,  $C(a, b)$  的坐标是  $\underline{\hspace{2cm}}$  .

【答案】  $(2, -1)$

【解析】  $\because A(a+1, 2)$ ,  $B(3, b-1)$  关于  $x$  轴对称,

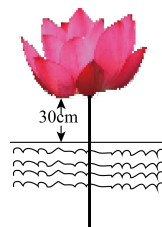
$$\therefore a+1 = 3, \quad b-1 = -2,$$

$$\therefore a = 2, \quad b = -1,$$

$$\therefore C(2, -1).$$

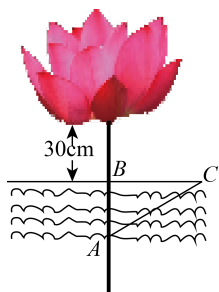
【踩分点】

15. 如图, 湖面上有一朵盛开的红莲, 它高出水面 30cm. 大风吹过, 红莲被吹至一边, 花朵下部刚好齐及水面, 已知红莲移动的水平距离为 60cm, 则水深是  $\underline{\hspace{2cm}}$  cm.



【答案】 45

【解析】红莲被吹至一边，花朵刚好齐及水面即 $AC$ 为红莲的长．



设水深 $h$ 尺，由题意得：Rt $\triangle ABC$ 中， $AB = h$ ， $AC = h + 30$ ， $BC = 60$ ，

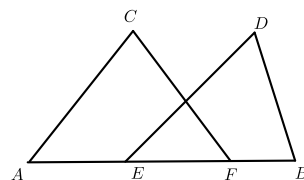
由勾股定理得： $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ，即 $(h + 30)^2 = h^2 + 60^2$ ，

解得： $h = 45$ ．

故答案为：45．

【踩分点】

16. 如图，线段 $AB = 10$ ， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ， $AC = BD = 4\sqrt{2}$ ，点 $E$ 、 $F$ 为线段 $AB$ 上两点．从下面4个条件中：① $CE = DF = 5$ ；② $AF = BE$ ；③ $CE = DF = 7$ ；④ $\angle CEB = \angle DEA$ ，选择一个条件，使得 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BDF$ 全等．则所有满足的条件是 \_\_\_\_\_．（填序号）



【答案】②③④

【解析】①如图1，

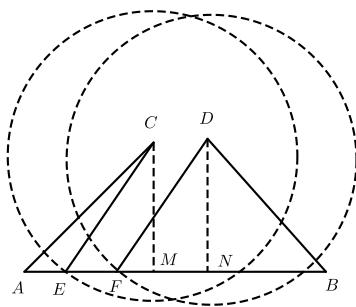


图1

过 $C$ 作 $CM \perp AB$ 于 $M$ ，过 $D$ 作 $DN \perp AB$ 于 $N$ ，

$\because \angle A = \angle B = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle ACM$ 和 $\triangle BDN$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore AC = BD = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore CM = DN = 4,$$

$$\therefore 4 < 5 < 4\sqrt{2},$$

$$\therefore CE = DF = 5,$$

$\therefore$ 符合条件的 $E$ 和 $F$ 在线段 $AB$ 上各有两个点,

如图1,  $\triangle ACE$ 不一定和 $\triangle BDF$ 全等, 故①不符合题意;

②如图2,

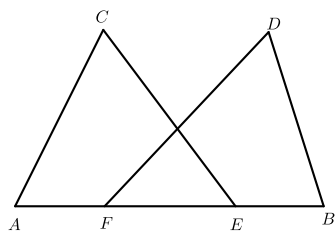


图2

$$\therefore AF = BE,$$

$$\therefore AE = BF,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BDF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} AC = BD \\ \angle A = \angle B, \\ AE = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BDF (\text{SAS}),$$

故②符合题意;

③如图3,

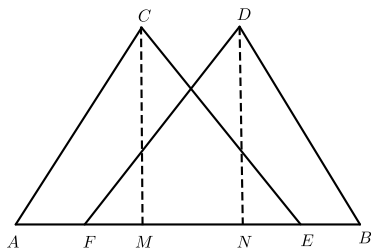


图3

过 $C$ 作 $CM \perp AB$ 于 $M$ , 过 $D$ 作 $DN \perp AB$ 于 $N$ ,

由①知 $CM = DN$ ,

$$\therefore CE = DF = 7, \text{ 且 } 7 > 4\sqrt{2},$$

$\therefore E$ 和 $F$ 在线段 $AB$ 上各存在一个点,

在 $\text{Rt}\triangle CME$ 和 $\text{Rt}\triangle DNF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} CM = DN \\ CB = DF \end{cases} ,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CME \cong \text{Rt}\triangle DNF (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle CEM = \angle DFN,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BDF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle A = \angle B \\ \angle CEM = \angle DFN, \\ AC = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BDF (\text{AAS}),$$

故③符合题意;

④如图4,

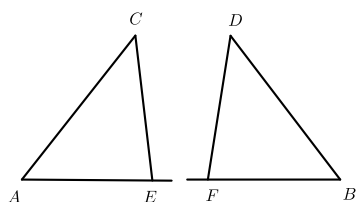


图4

$$\therefore \angle CEB = \angle DFA,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle BFD,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BDF$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle A = \angle B \\ \angle AEC = \angle DFB, \\ AC = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BDF (\text{AAS}),$$

故④符合题意.

【踩分点】

### 三、解答题

(本大题共8小题, 共86分)

17. 解答下列各题.

(1) 化简:  $9(x-1)^2 - (3x+2)(3x-2)$ .

(2) 计算:  $\sqrt{24} \div \sqrt{3} - 4\sqrt{\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - 2021^0$ .

【答案】 (1)  $-18x + 13$ .

(2)  $-3$ .

【解析】(1) 原式  $= 9(x^2 - 2x + 1) - (9x^2 - 4)$   
 $= 9x^2 - 18x + 9 - 9x^2 + 4$   
 $= -18x + 13.$

(2) 原式  $= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2 - 1$   
 $= -3.$

【踩分点】

18. 解答下列各题.

(1) 分解因式:  $2ab^2 - 4a^2b + 2a^3.$

(2) 解方程:  $\frac{a}{2-a} + \frac{2}{a-2} = 1.$

【答案】(1)  $2a(a-b)^2.$

(2) 原方程无解.

【解析】(1)  $2ab^2 - 4a^2b + 2a^3$

$$= 2a(b^2 - 2ab + a^2)$$

$$= 2a(a-b)^2.$$

(2)  $\frac{a}{2-a} + \frac{2}{a-2} = 1$

去公母得:  $a-2 = 2-a$

$$2a = 4$$

$$a = 2,$$

经检验  $a = 2$  是原方程增根, 原方程无解.

【踩分点】

19. 先化简再求值:  $\left(\frac{3}{x-1} - x - 1\right) \div \frac{x^2 - 4x + 4}{x-1}$ , 其中  $x = 2 - \sqrt{2}.$

【答案】  $2\sqrt{2} - 1.$

【解析】原式  $= \left(\frac{3}{x-1} - \frac{x+1}{1}\right) \times \frac{x-1}{(x-2)^2}$   
 $= \frac{3-x^2+1}{x-1} \times \frac{x-1}{(x-2)^2}$   
 $= \frac{4-x^2}{(x-2)^2}$



$$= \frac{(2+x)(2-x)}{(2-x)^2}$$

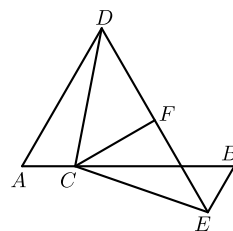
$$= \frac{2+x}{2-x},$$

当  $x = 2 - \sqrt{2}$  时,

$$\text{原式} = \frac{2+2-\sqrt{2}}{2-2+\sqrt{2}} = \frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}-2}{2} = 2\sqrt{2}-1.$$

【踩分点】

20. 如图, 点  $C$  在线段  $AB$  上,  $AD \parallel EB$ ,  $AC = BE$ ,  $AD = BC$ .  $CF$  平分  $\angle DCE$ , 求证:  $CF \perp DE$ .



【答案】证明见解析.

【解析】 $\because AD \parallel EB$ ,

$$\therefore \angle A = \angle B,$$

在  $\triangle ACD$  和  $\triangle BEC$  中,

$$\begin{cases} AD = BC \\ \angle A = \angle B \\ AC = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BEC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore CD = CE,$$

又  $\because CF$  平分  $\angle DCE$ ,

$$\therefore CF \perp DE.$$

【踩分点】

21. 已知  $m = a^2b$ ,  $n = 2a^2 + 3ab$ .

(1) 当  $a = -3$ ,  $b = -2$ , 分别求  $m$ ,  $n$  的值.

(2) 若  $m = 12$ ,  $n = 18$ , 求  $\frac{1}{a} + \frac{2}{3b}$  的值.

【答案】(1)  $m = -18$ ,  $n = 36$ .

$$(2) \frac{1}{2}.$$

【解析】(1)  $m = a^2b = (-3)^2 \times (-2) = -18$ ,

$$n = 2a^2 + 3ab = 2 \times (-3)^2 + 3 \times (-3) \times (-2) = 36.$$

(2)  $\because m = 12, n = 18, m = a^2b, n = 2a^2 + 3ab$ ,

$$\therefore a^2b = 12, 2a^2 + 3ab = 18,$$

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{3b} = \frac{3b + 2a}{3ab} = \frac{3ab + 2a^2}{3a^2b} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

【踩分点】

22. 学校在假期内对教室内的黑板进行整修, 需在规定日期内完成. 如果由甲工程小组做, 恰好按期完成; 如果由乙工程小组做, 则要超过规定日期3天. 结果两队合作了2天, 余下部分由乙组独做, 正好在规定日期内完成, 问规定日期是几天?

【答案】6天.

【解析】设规定日期为 $x$ 天,

$$\text{根据题意, 得 } 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) + \frac{1}{x+3} \times (x-2) = 1,$$

解这个方程, 得 $x = 6$ ,

经检验,  $x = 6$ 是原方程的解.

$\therefore$ 原方程的解是 $x = 6$ .

答: 规定日期是6天.

【踩分点】

23. 若一个含根号的式子 $a + b\sqrt{x}$ 可以写成 $m + n\sqrt{x}$ 的平方(其中 $a, b, m, n$ 都是整数,  $x$ 是正整数), 即 $a + b\sqrt{x} = (m + n\sqrt{x})^2$ , 则称 $a + b\sqrt{x}$ 为完美根式,  $m + n\sqrt{x}$ 为 $a + b\sqrt{x}$ 的完美平方根. 例如: 因为 $19 - 6\sqrt{2} = (1 - 3\sqrt{2})^2$ , 所以 $1 - 3\sqrt{2}$ 是 $19 - 6\sqrt{2}$ 的完美平方根.

(1) 已知 $2\sqrt{3} - 3$ 是 $a - 12\sqrt{3}$ 的完美平方根, 求 $a$ 的值.

(2) 若 $m + n\sqrt{7}$ 是 $a + b\sqrt{7}$ 的完美平方根, 用含 $m, n$ 的式子分别表示 $a, b$ .

(3) 已知 $17 - 12\sqrt{2}$ 是完美根式, 直接写出它的一个完美平方根.

【答案】(1)  $a = 21$ .

$$(2) a = m^2 + 7n^2, b = 2mn.$$

$$(3) 3 - 2\sqrt{2} \text{ 或 } 2\sqrt{2} - 3 \text{ 是 } 17 - 12\sqrt{2} \text{ 的完美平方根.}$$

【解析】(1)  $\because 2\sqrt{3} - 3$  是  $a - 13$  的完美平方根,

$$\therefore a - 12\sqrt{3} = (2\sqrt{3} - 3)^2 = 12 + 9 - 12\sqrt{3} = 21 - 12\sqrt{3},$$

$$\therefore a = 21.$$

(2)  $\because m + n\sqrt{7}$  是  $a + b\sqrt{7}$  的完美增方根,

$$\therefore a + b\sqrt{7} = (m + n\sqrt{7})^2 = m^2 + 7n^2 + 2mn\sqrt{7},$$

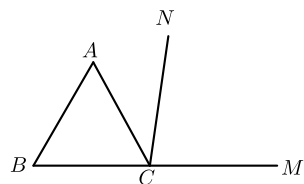
$$\therefore a = m^2 + 7n^2, \quad b = 2mn.$$

(3)  $\because 17 - 12\sqrt{2} = 17 - 2\sqrt{72} = (\sqrt{9} - \sqrt{8})^2 = (2\sqrt{2} - 3)^2,$

$\therefore 3 - 2\sqrt{2}$  或  $2\sqrt{2} - 3$  是  $17 - 12\sqrt{2}$  的完美平方根.

【踩分点】

24. 如图,  $CN$  是等边  $\triangle ABC$  外角  $\angle ACM$  内部的一条射线, 设  $\angle ACN = \alpha$ , 点  $A$  关于  $CN$  的对称点为  $D$ , 连接  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$ , 其中  $AD$ ,  $BD$  分别交射线  $CN$  于点  $E$ ,  $P$ .

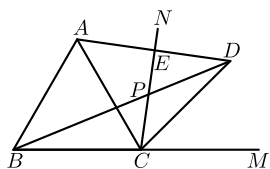


- (1) 依题意补全图形, 并求出  $\angle BDC$  的大小. (用含  $\alpha$  的式子表示).  
 (2) 用等式表示线段  $PB$ ,  $PC$  与  $PE$  之间的数量关系, 并证明.

【答案】(1) 画图见解析;  $\angle BDC = 60^\circ - \alpha$ .

(2)  $PB = PC + 2PE$ ; 证明见解析.

【解析】(1) 如图所示:



$\because$  点  $A$  与点  $D$  关于  $CN$  对称,

$\therefore CN$  是  $AD$  的垂直平分线,

$\therefore CA = CD$ .

$\because \angle ACN = \alpha$ ,

$\therefore \angle ACD = 2\angle ACN = 2\alpha$ ,

$\therefore \triangle ABC$  是等边三角形,

$$\therefore CA = CB = CD, \angle ACB = 60^\circ,$$

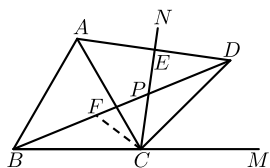
$$\therefore \angle BCD = \angle ACB + \angle ACD = 60^\circ + 2\alpha.$$

$$\therefore \angle BDC = \angle DBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCD) = 60^\circ - \alpha.$$

$$(2) PB = PC + 2PE,$$

证明: 在  $PB$  上截取  $PF$  使  $PF = PC$ ,

如图, 连接  $CF$ .



$$\therefore CA = CD, \angle ACD = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle CAD = 90^\circ - \alpha.$$

$$\therefore \angle BDC = 60^\circ - \alpha.$$

$$\therefore \angle PDE = \angle CDA - \angle BDC = 30^\circ,$$

$$\therefore PD = 2PE.$$

$$\therefore \angle CPF = \angle DPE = 90^\circ - \angle PDE = 60^\circ.$$

$\therefore \triangle CPF$  是等边三角形.

$$\therefore \angle CPF = \angle CFP = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle BFC = \angle DPC = 120^\circ.$$

$\therefore$  在  $\triangle BFC$  和  $\triangle DPC$  中,

$$\begin{cases} \angle CFB = \angle CPD \\ \angle CBF = \angle CDP, \\ CB = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BFC \cong \triangle DPC (\text{AAS}).$$

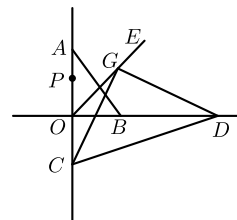
$$\therefore BF = PD = 2PE.$$

$$\therefore PB = PF + BF = PC + 2PE.$$

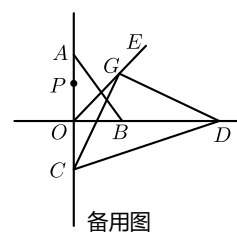
**【踩分点】**

25. 如图, 点  $O$  为线段  $AC$  上一点,  $AC = 7$ ,  $OA = 4$ , 过点  $O$  作直线  $OD \perp AC$ ,  $OD = 9$ , 在线段  $OD$  上有一点  $B$ , 使得  $OB = \frac{1}{2}BD$ , 连接  $AB$ , 若动点  $P$  从点  $O$  开始以每秒 1 个单位的速度按  $O \rightarrow A \rightarrow B$  的路径

运动，当运动到B点时停止运动，设出发的时间为 $t$ 秒。



- (1) 当点 $P$ 在线段 $OA$ 上运动时，若 $BP = \sqrt{13}$ ，则 $t$ 的值为 \_\_\_\_\_ .
- (2) 求当 $t$ 为何值时， $\triangle BOP$ 为等腰三角形.
- (3) 若点 $G$ 为 $\angle AOB$ 内部射线 $OE$ 上一点，当 $\triangle CGD$ 为等腰直角三角形，求线段 $OG$ 的长.



【答案】 (1) 2

(2)  $t$ 为3s或5.4s或6s或 $\frac{13}{2}$ s时， $\triangle BOP$ 为等腰三角形.

(3)  $OG = \sqrt{18}$  (或 $3\sqrt{2}$ ) .

【解析】 (1)  $\because OB = \frac{1}{2}BD$ ,  $OD = 9$ ,

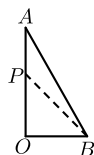
$$\therefore OB = 3,$$

$\therefore$ 当点 $P$ 在线段 $OA$ 上运动时，若 $BP = \sqrt{13}$ 时，

$$\therefore OP = \sqrt{13 - 9} = 2,$$

$\therefore t$ 的值为2.

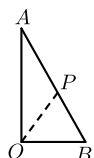
(2) 如图，当 $P$ 在 $OA$ 上， $OP = OB$ 时， $\triangle BOP$ 为等腰三角形，



若点 $P$ 在 $OA$ 上，则 $1t = 3$ ,

解得 $t = 3(s)$ ;

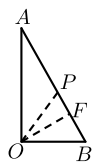
如图，当 $P$ 在 $AB$ 上， $BP = BO = 3$ 时， $\triangle BOP$ 为等腰三角形，



$$\therefore AP = AB - BP = 2,$$

$$\therefore t = (4 + 2) + 1 = 6(\text{s});$$

如图, 若点  $P$  在  $AB$  上,  $OP = OB = 3$ , 作  $OF \perp AB$  于  $F$ ,



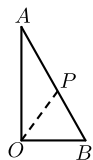
则根据面积法求得  $OF = \frac{12}{5}$ , 在  $\text{Rt}\triangle BOF$  中, 由勾股定理得  $BF = \frac{9}{5}$ ,

$$\therefore PB = 2BF = \frac{18}{5},$$

$$\therefore OA + AP = 4 + 5 - \frac{18}{5} = 5.4,$$

$$\text{此时 } t = 5.4 + 1 = 5.4(\text{s});$$

如图, 当  $PO = PB$  时,  $\triangle BOP$  为等腰三角形,  $\angle A = \angle AOP$ ,

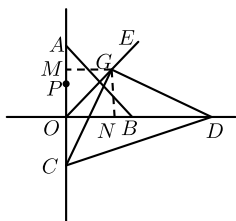


$$\therefore AP = PO = PB,$$

$$t = \left(4 + \frac{5}{2}\right) + 1 = \frac{13}{2}(\text{s});$$

综上所述,  $t$  为 3s 或 5.4s 或 6s 或  $\frac{13}{2}$ s 时,  $\triangle BOP$  为等腰三角形.

(3) 如图, 过  $G$  作  $GM \perp AC$  于  $M$ ,  $GN \perp OB$  于  $N$ :



$$\therefore \angle CMG = \angle DNG, \angle MCG = \angle NDG, CG = DG,$$

$$\therefore \triangle GMC \cong \triangle DNG(\text{AAS}),$$

$$\text{设 } MG = NG = x, \text{ 则 } MC = x + 3,$$

$$\therefore ND = x + 3, OD = x + (x + 3) = 9, x = 3,$$

$$\text{所以 } OG = \sqrt{18} \text{ (或 } 3\sqrt{2} \text{)}.$$

【踩分点】

