

数学

班级_____ 学号_____ 姓名_____

学生
须知

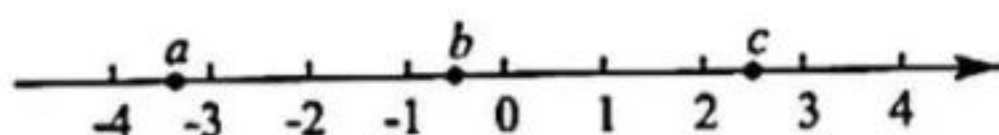
1. 共 8 页，共 28 道小题，满分 100 分。
2. 在练习卷和答题卡上准确填写班级、姓名和学号。
3. 答案一律填写在答题纸上，在练习卷上作答无效。

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）
第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. 如图，下列水平放置的几何体中，从上面看是矩形的是()



2. 实数在数轴上的对应点的位置如图所示，则下列结论正确的是()



- A. $a > b > c$ B. $|b| > |a|$ C. $b + c < 0$ D. $ab > 0$

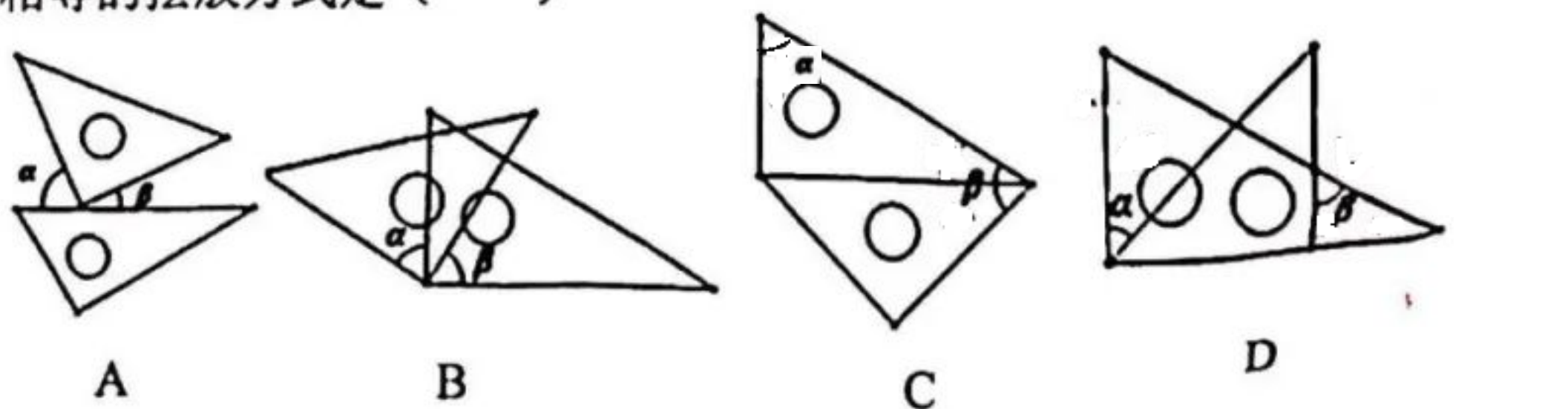
3. 2019 年 4 月 10 日，天文学家召开全球新闻发布会，发布首次直接拍摄到的黑洞照片，这颗黑洞位于代号为 M87 的星系当中，距离地球 5500 万光年，质量相当于 65 亿颗太阳，太阳质量大约是 2.0×10^{30} 千克，那么这颗黑洞的质量约是()

- A. 130×10^{30} 千克 B. 1.3×10^{30} 千克 C. 1.3×10^{40} 千克 D. 1.3×10^{41} 千克

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $\angle C = 50^\circ$ ，如果 AD 平分 $\angle BAC$ ，那么 $\angle ADB$ 的度数是()

- A. 35° B. 70° C. 85° D. 95°

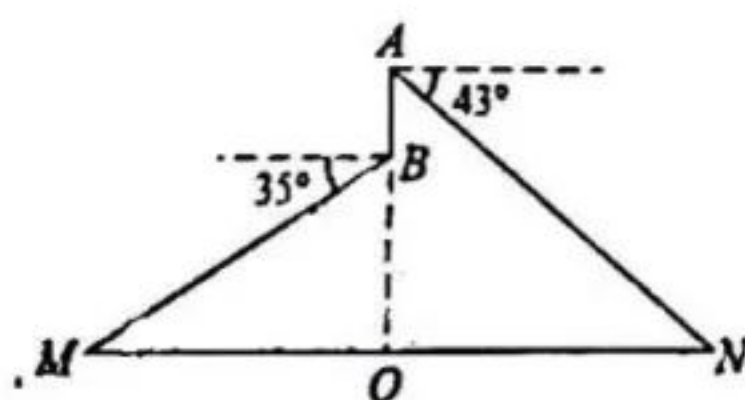
5. 一副直角三角板有不同的摆放方式，图中满足 $\angle \alpha$ 与 $\angle \beta$ 相等的摆放方式是()



6. 如果 $a^2 - a = 6$, 那么代数式 $(a - \frac{1}{a}) \cdot \frac{a^2}{a+1}$ 的值为()

- A. 12 B. 6 C. 2 D. -6

7. 无人机低空遥感技术已广泛应用于农作物监测. 如图, 某农业特色品牌示范基地用无人机对一块试验田进行监测作业时, 在距地面高度为 $135m$ 的 A 处测得试验田右侧边界 N 处俯角为 43° , 无人机垂直下降 $40m$ 至 B 处, 又测得试验田左侧边界 M 处俯角为 35° , 则 M, N 之



间的距离为() (参考数据: $\tan 43^\circ \approx 0.9$, $\sin 43^\circ \approx 0.7$, $\cos 35^\circ \approx 0.8$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$, 结果保留整数)

- A. $188m$ B. $269m$ C. $286m$ D. $312m$

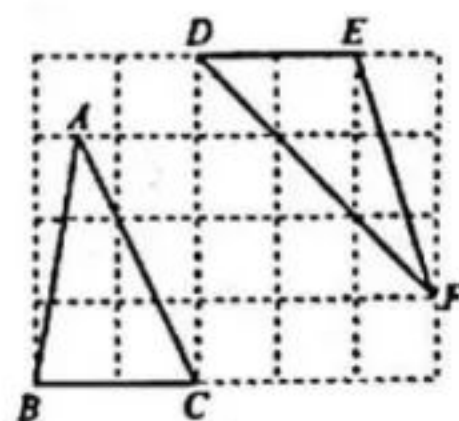
8. 已知, 点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 均在抛物线 $y = -\frac{a}{6}x^2 + ax + c$ 上, 其中

$y_2 = \frac{3}{2}a + c$, 下列说法正确的是()

- A. 若 $|x_1 - x_2| \leq |x_3 - x_2|$, 则 $y_2 \geq y_3 \geq y_1$ B. 若 $|x_1 - x_2| \geq |x_3 - x_2|$, 则 $y_2 \geq y_3 \geq y_1$
C. 若 $y_1 > y_3 \geq y_2$, 则 $|x_1 - x_2| < |x_2 - x_3|$ D. 若 $y_1 > y_3 \geq y_2$, 则 $|x_1 - x_2| > |x_2 - x_3|$

二、填空题 (共 16 分, 每小题 2 分)

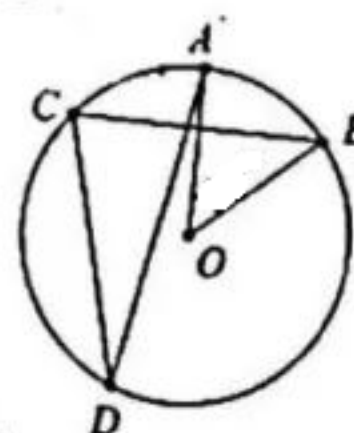
9. 如图, 网格是正方形网格, $\triangle ABC$ 的面积 _____ $\triangle DEF$ 的面积. (填“>”, “=”或“<”).



10. 写出一个满足 $\sqrt{2} < a < \sqrt{10}$ 的整数 a 的值为_____.

11. 分解因式: $2m^3 - 8m^2 + 8m$ _____.

12. 如图, 在 $\odot O$ 中, $OA \perp BC$, $\angle AOB = 50^\circ$, 则 $\angle ADC =$ _____ $^\circ$.



13. 盒中有 x 枚黑棋和 y 枚白棋, 这些棋除颜色外无其他差别. 从盒

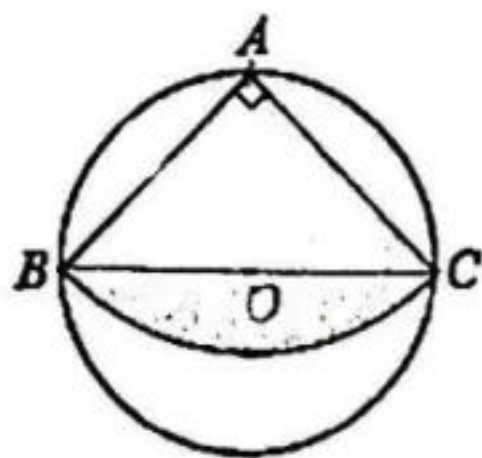
中随机取出一枚棋子, 如果它是黑棋的概率是 $\frac{3}{8}$.

(1) 用含 x 的式子表示 y : _____;

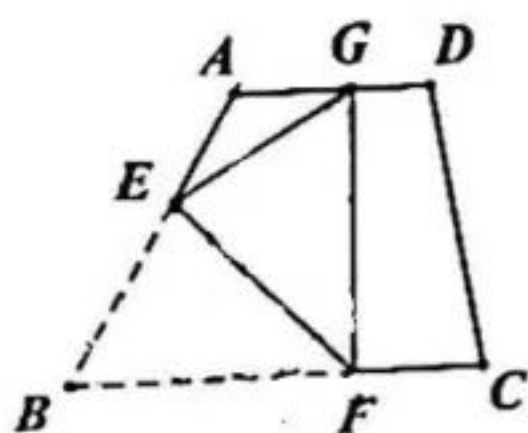
(2) y 与 x 满足 _____ 函数关系. (从“一次”函数, “反比例”函数,

“二次函数”中选一个)

14. 如图, 从一块直径是1m的圆形铁皮上剪出一个圆心角为 90° 的扇形, 如果将剪下来的扇形围成一个圆锥, 圆锥的底面圆的半径为____m.



第 14 题图



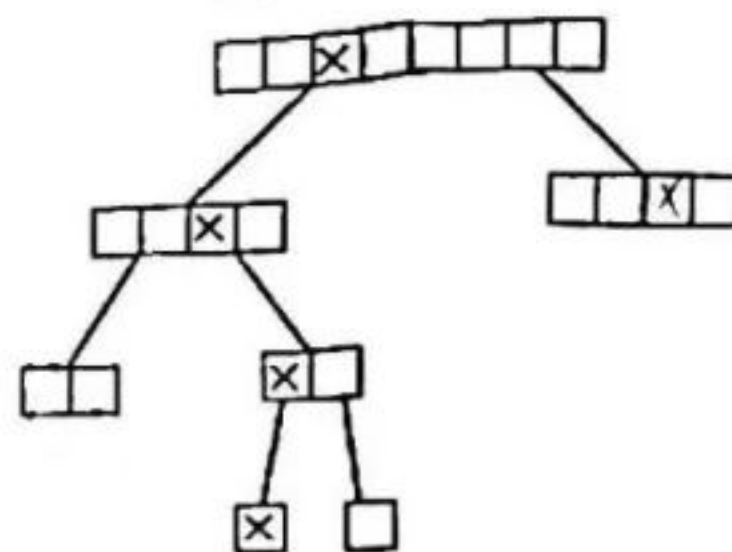
第 15 题图

第 1 轮

第 2 轮

第 3 轮

第 4 轮



第 16 题图

15. 如图, 在四边形纸片 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = 10$, $\angle B = 60^\circ$, 将纸片折叠, 使点 B 落在 AD 边上的点 G 处, 折痕为 EF , 若 $\angle BFE = 45^\circ$, 则 BF 的长为_____.

16. 为确定传染病的感染者, 医学上可采用“二分检测方案”. 假设待检测的总人数是 2^m (m 为正整数). 将这 2^m 个人的样本混合在一起做第 1 轮检测 (检测 1 次), 如果检测结果是阴性, 可确定这些人都未感染; 如果检测结果是阳性, 可确定其中有感染者, 则将这些入平均分成两组, 每组 2^{m-1} 个人的样本混合在一起做第 2 轮检测, 每组检测 1 次. 依此类推: 每轮检测后, 排除结果为阴性的组, 而将每个结果为阳性的组再平均分成两组, 做下一轮检测, 直至确定所有的感染者.

例如, 当待检测的总人数为 8, 且标记为“x”的人是唯一感染者时, “二分检测方案”可用如图表示. 从图中可以看出, 需要经过 4 轮共 n 次检测后, 才能确定标记为“x”的人是唯一感染者.

(1) n 的值为_____;

(2) 若待检测的总人数为 8, 采用“二分检测方案”, 经过 4 轮共 9 次检测后确定了所有的感染者, 写出感染者人数的所有可能值_____;

三. 解答题 (共 68 分, 第 17-20 题, 每题 5 分, 第 21-22 题, 每题 6 分, 第 23 题 5 分, 第 24 题 6 分, 第 25 题 5 分, 第 26 题 6 分, 第 27-28 题, 每题 7 分) 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. 计算 $-1^{2022} + (\frac{1}{2})^{-2} - |\sqrt{3} - 2| - 2\sin 60^\circ$

18. 解不等式组 $\begin{cases} 4(x+1) \leq 7x+10 \\ x-5 < \frac{x-8}{3} \end{cases}$, 并求该不等式组的所有非负整数解.

19. 下面是小明设计的“过直线外一点作这条直线的平行线”的尺规作图过程.
已知: 如图 1, 直线 BC 及直线 BC 外一点 P .

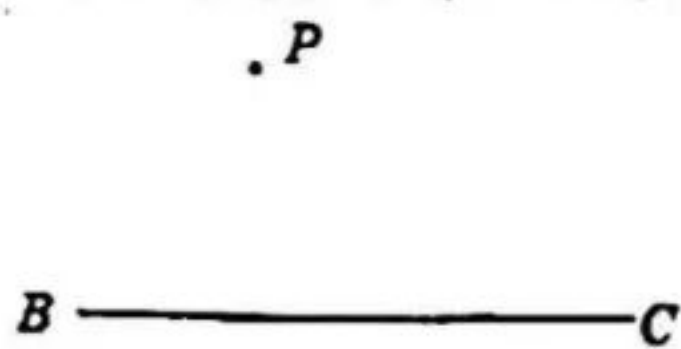


图1

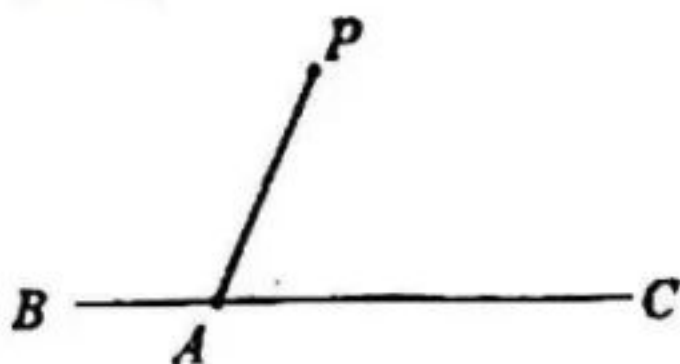


图2

求作: 直线 PE , 使得 $PE \parallel BC$.

作法: 如图 2.

- ①在直线 BC 上取一点 A , 连接 PA ;
- ②作 $\angle PAC$ 的平分线 AD ;
- ③以点 P 为圆心, PA 长为半径画弧, 交射线 AD 于点 E ;
- ④作直线 PE .

所以直线 PE 就是所求作的直线. 根据小明设计的尺规作图过程.

(1) 使用直尺和圆规, 补全图形 (保留作图痕迹);

(2) 完成下面的证明.

证明: $\because AD$ 平分 $\angle PAC$,

$$\therefore \angle PAD = \angle CAD.$$

$$\because PA = PE,$$

$$\therefore \angle PAD = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\therefore \angle PEA = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\therefore PE \parallel BC. (\underline{\hspace{2cm}}) (\text{填推理依据}).$$

20. 已知关于 x 的方程 $mx^2 + (3-m)x - 3 = 0$ (m 为实数, $m \neq 0$).

(1) 求证: 此方程总有两个实数根.

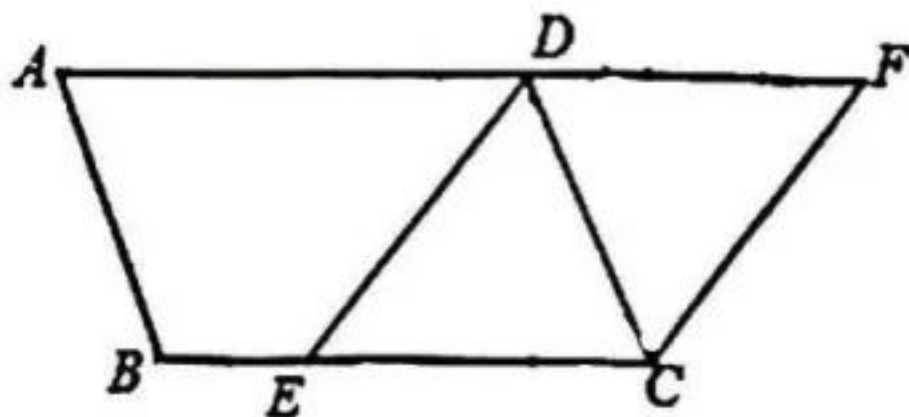
(2) 如果此方程的两个实数根都为正整数, 求整数 m 的值.

21. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是 BC 边的一点, 将边 AD 延长至点 F , 使得 $\angle AFC = \angle DEC$, 连接 CF , DE .

(1) 求证: 四边形 $DECF$ 是平行四边形;

(2) 如果 $AB = 13$, $DF = 14$, $\tan \angle DCB = \frac{12}{5}$,

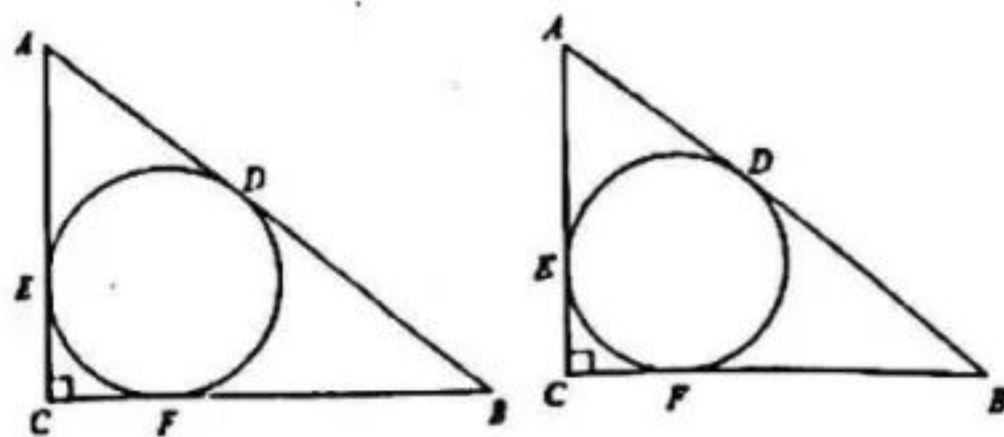
求 CF 的长.



22. 有这样一个问题:

如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 的内切圆与斜边 AB 相切于点 D , $AD=m$, $BD=n$, 求 $\triangle ABC$ 的面积 (用含 m , n 的式子表示).

小冬根据学习几何的经验, 先从特殊情况开始探究:



解: 如图, 令 $AD=3$, $BD=4$,

设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别与 AC 、 BC 相切于点 E 、 F , CE 的长为 x .

根据切线长定理, 得 $AE=AD=3$, $BF=BD=4$, $CF=CE=x$.

根据勾股定理得, $(x+3)^2 + (x+4)^2 = (3+4)^2$. 整理, 得 $x^2 + 7x = 12$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} (x+3)(x+4) = \frac{1}{2} (x^2 + 7x + 12) = \frac{1}{2} \times (12 + 12) = 12$$

请你参考小冬的做法, 解决以下问题:

(1) 当 $AD=5$, $BD=7$ 时, 求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2) 当 $AD=m$, $BD=n$ 时, $\triangle ABC$ 的面积为_____ (用含 m , n 的式子表示).

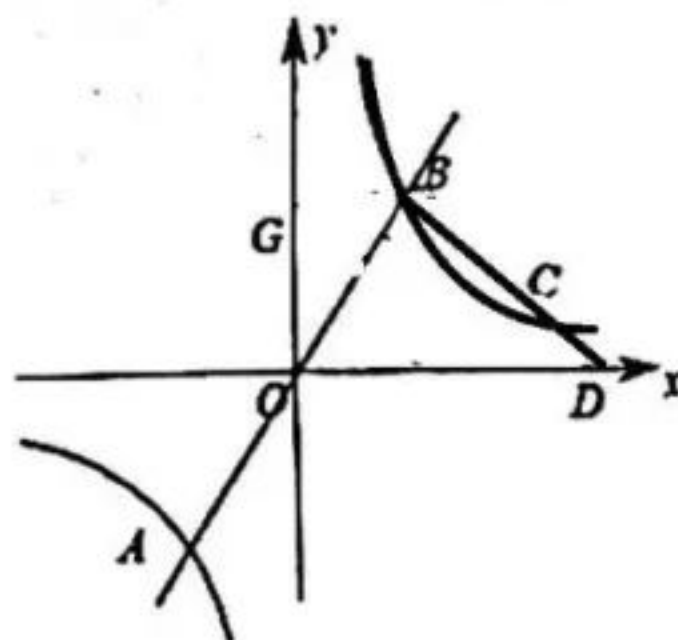
23. 如图, 直线 $y = \frac{3}{2}x$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 交于 A , B 两点, 点 A 的坐标为

$(m, -3)$, 点 C 是双曲线第一象限分支上的一点, 连接 BC 并延长交 x 轴于点 D , 且 $BC=2CD$.

(1) 直接写出 k 的值和点 B 的坐标;

(2) 点 G 是 y 轴上的动点, 连接 GB , GC ,

求 $GB+GC$ 的最小值.



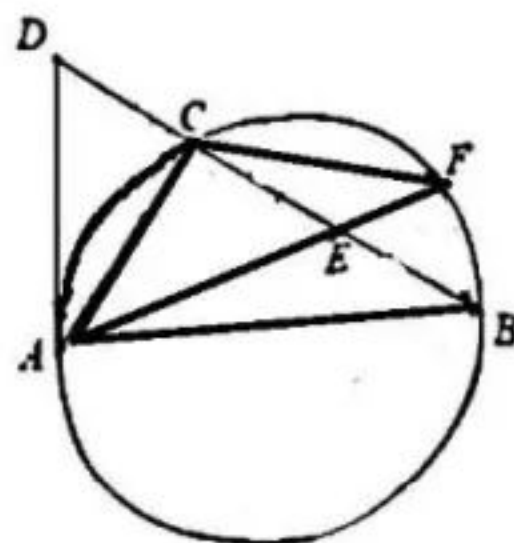
24. 如图, $\triangle ABC$ 内接于以 AB 为直径的 $\odot O$, 过点

A 作 $\odot O$ 的切线, 与 BC 的延长线相交于点 D , 在 CB 上截

取 $CE=CD$, 连接 AE 并延长, 交 $\odot O$ 于点 F , 连接 CF .

(1) 求证: $AC=CF$;

(2) 若 $AB=4$, $\sin B = \frac{3}{5}$, 求 EF 的长.



25. 品味诗词之美，传承中华文明，央视节目《中国诗词大会》备受大众欢迎。节目规则如下：由 100 位诗词爱好者组成的百人团与挑战者共同答题，每位挑战者最多可答五轮题。每轮比赛答题时，如挑战者答对，则百人团答错的人数即为选手该轮得分；如挑战者答错，则该轮不得分，且停止答题。每轮比赛的得分之和即为挑战者的总得分。现有甲、乙、丙三人作为挑战者参加节目答题，相关信息如下：

a. 甲、乙两人参加比赛的得分统计图如图 1，每个点的横坐标与纵坐标分别表示甲、乙二人在相同轮次的得分；

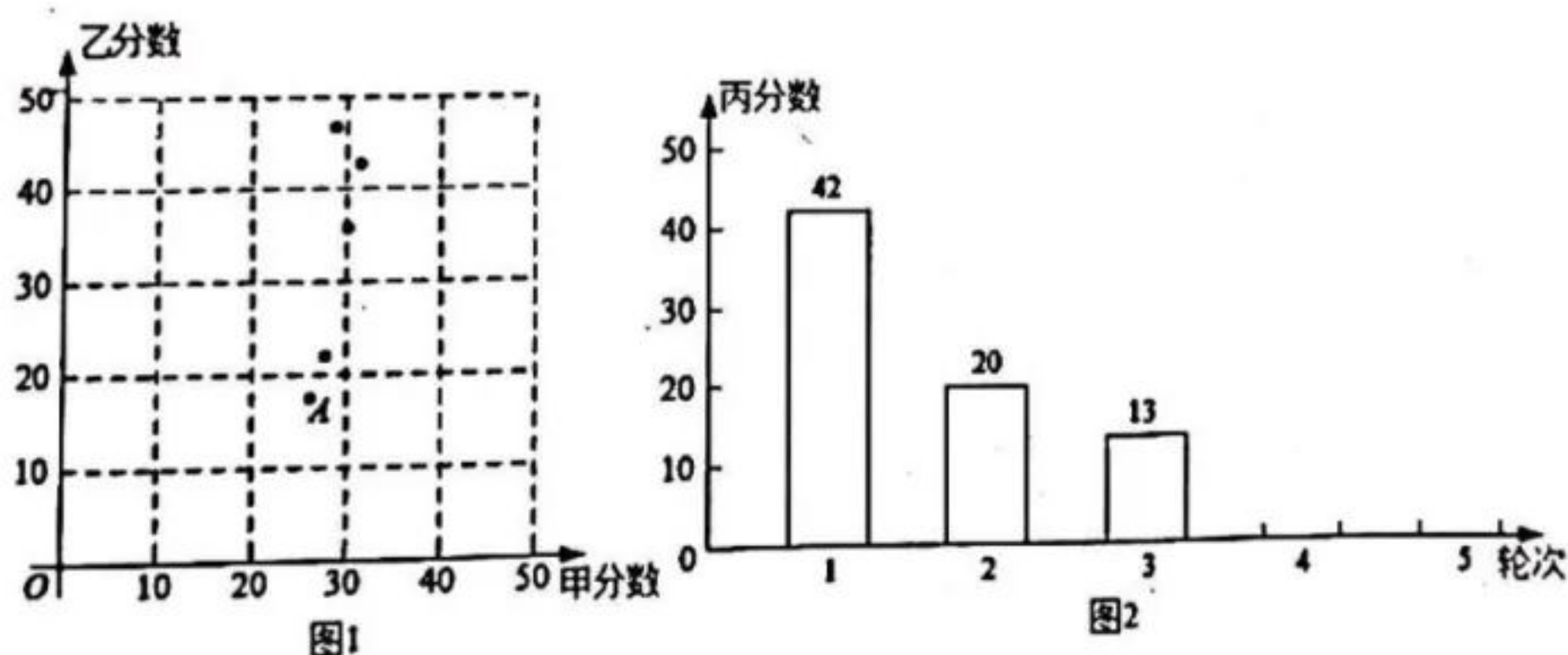
b. 丙参加比赛的得分统计图如图 2；

根据以上信息，回答下列问题：

(1) 已知点 A 的坐标为 $(26, 18)$ ，则此轮比赛中：甲的得分为____，与甲同场答题的百人团中，有____人答对；

(2) 这五轮比赛中，甲得分高于乙得分的比赛共有____轮；甲、乙、丙三人中总得分最高的为____；

(3) 设甲参加的第一轮至第五轮比赛时百人团答对人数的方差为 s_1^2 ，乙参加的第一轮至第五轮比赛时百人团答对人数的方差为 s_2^2 ，则 s_1^2 ____ s_2^2 (填“>”，“<”或“=”)。



26. 已知, 二次函数 $y = ax^2 - 4ax + 1$ 的图象为抛物线 G , 抛物线 G' 与抛物线 G 关于 x 轴对称.

- (1) 求抛物线 G' 的解析式.
- (2) 点 B 是抛物线 G 上一点, 点 B 的横坐标为 1, 过点 B 作 x 轴垂线, 交抛物线 G' 于点 C , 分别作 B, C 关于各自抛物线对称轴的对称点 B', C' , 连接 $BC, CC', B'C', BB'$. 当 $BB'C'C$ 为正方形时, 求 a 的值.
- (3) 抛物线 G' 与抛物线 G 围成的封闭区域内 (不包括边界) 共有 11 个整点, 直接写出 a 的取值范围.

27. 如图, AM 是 $\triangle ABC$ 的中线, D 是线段 AM 上一点 (不与点 A 重合). $DE \parallel AB$ 交 AC 于点 F , $CE \parallel AM$, 连接 AE .

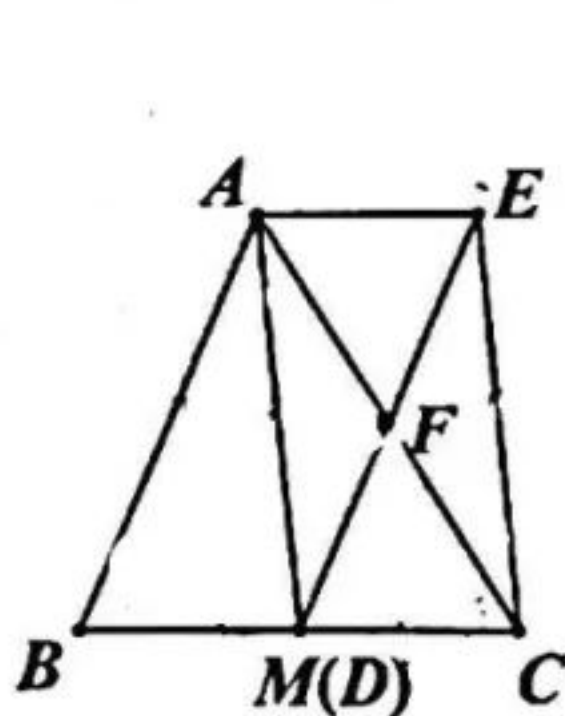


图 1

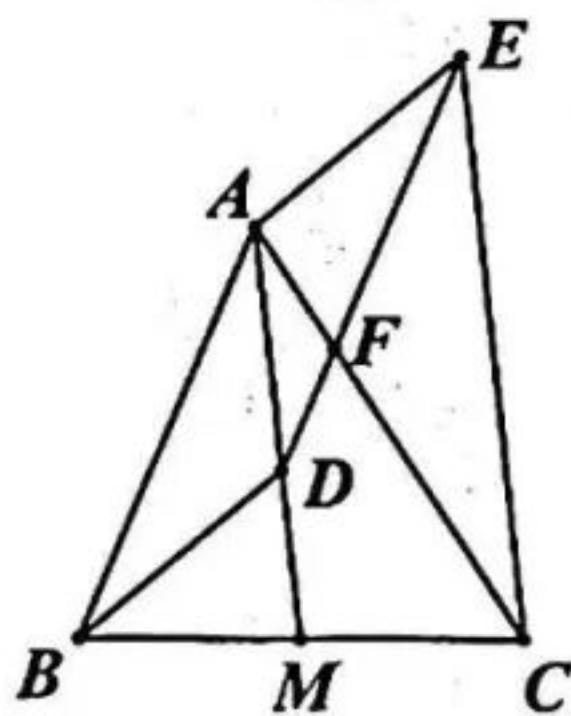


图 2

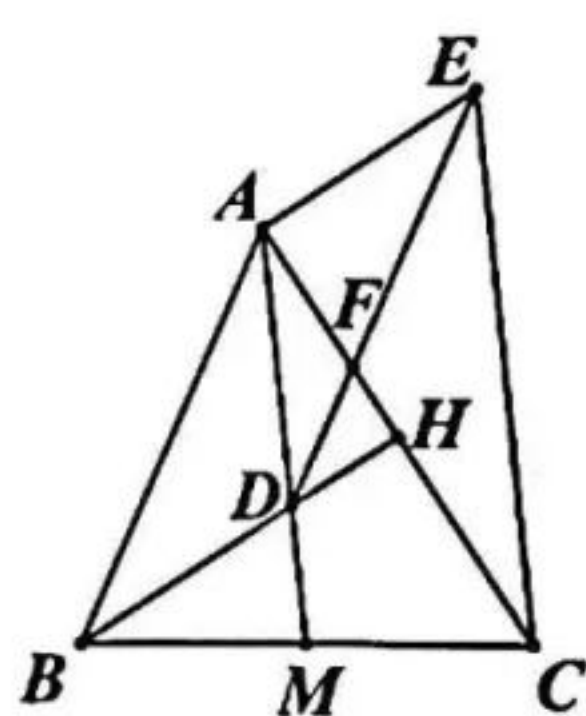


图 3

- (1) 如图 1, 当点 D 与 M 重合时, 求证: 四边形 $ABDE$ 是平行四边形;
- (2) 如图 2, 当点 D 不与 M 重合时, (1) 中的结论还成立吗? 请说明理由.
- (3) 如图 3, 延长 BD 交 AC 于点 H , 若 $BH \perp AC$, 且 $BH = AM$, 求 $\angle CAM$ 的度数.

28. 对于平面直角坐标系上的点 S 与图形 Ω , 给出如下定义: 若图形 Ω 上有一点 T , 使得 $ST=4$, 且以 T 为旋转中心, 把点 S 顺时针旋转 90° 后的对应点 S' 也在图形 Ω 上, 则称点 S 为图形 Ω 的“初心点”;

例如: 如图 1, 给出点 $S(1, -4)$ 与 x 轴, 过点 S 作 $ST \perp x$ 轴于点 T , 则可得点 T 的坐标为 $(1, 0)$, 此时 $ST=4$, 且使点 S 绕点 T 顺时针旋转 90° 后得到的对应点 $S'(-3, 0)$ 也在 x 轴上, 因此点 S 为 x 轴的“初心点”.

- (1) 如图 2, 已知点 $A(4, 0), B(-5, 0), C(-1, -4), D(0, 4), E(5, -4), F(4, -4), G(1, 4), H(-5, 4)$.

①点 C, D, E, F, G, H 中, 为线段 AB 的“初心点”的是_____;

②已知反比例函数 $y = \frac{a}{x}$, 若该反比例函数图象上只有 1 个点为线段 AB 的“初心点”, 求 a 的取值范围;

- (2) 如图 3, 已知点 $N(n, 0)$ 为 x 轴上的一个动点, 以 N 为圆心的 $\odot N$ 半径长为 $2\sqrt{2}$, 以 $P(3, 0), Q(0, 4)$ 为端点的线段 PQ 上同时存在 2 个点为 $\odot N$ 的“初心点”, 请直接写出 n 的取值范围.

