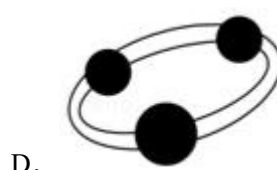
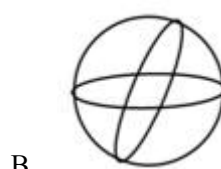


2021-2022 学年广东省深圳市宝安区富源学校九年级（下）质检

数学试卷（3 月份）

一. 选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. （3 分）在下列图形中是轴对称图形的是（ ）



2. （3 分）华为麒麟 990 芯片采用了最新的 0.000000007 米的工艺制程，数 0.000000007 用科学记数法表示为（ ）

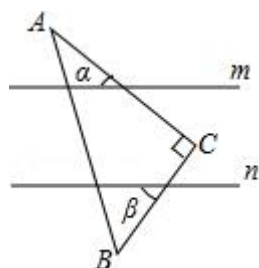
A.  $7 \times 10^{-9}$

B.  $7 \times 10^{-8}$

C.  $0.7 \times 10^{-9}$

D.  $0.7 \times 10^{-8}$

3. （3 分）如图， $m \parallel n$ ，直角三角尺  $ABC$  的直角顶点  $C$  在两直线之间，两直角边与两直线相交所形成的锐角分别为  $\alpha$ ， $\beta$ 。若  $\alpha = 35^\circ$ ，则  $\beta$  的值为（ ）



A.  $55^\circ$

B.  $35^\circ$

C.  $45^\circ$

D.  $50^\circ$

4. （3 分）下列运算正确的是（ ）

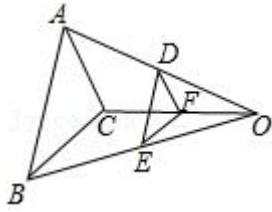
A.  $a^2 + a^3 = a^5$

B.  $3a^2 \cdot 2a^3 = 6a^6$

C.  $(-a^3)^2 = a^6$

D.  $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

5. （3 分） $\triangle DEF$  和  $\triangle ABC$  是位似图形，点  $O$  是位似中心，点  $D$ ， $E$ ， $F$  分别是  $OA$ ， $OB$ ， $OC$  的中点，若  $\triangle DEF$  的面积是 2，则  $\triangle ABC$  的面积是（ ）



- A. 2                      B. 4                      C. 6                      D. 8

6. (3分) 已知  $m$  是方程  $x^2 - 2x - 1010 = 0$  的根, 则代数式  $4m - 2m^2 - 1$  的值为 ( )

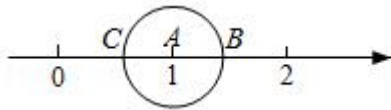
- A. -2021                      B. 2021                      C. -2022                      D. 2022

7. (3分) 下列哪一个命题是假命题 ( )

- A. 五边形外角和为  $360^\circ$   
 B. 圆的切线垂直于经过切点的半径  
 C.  $(3, -2)$  关于  $y$  轴的对称点为  $(-3, 2)$   
 D. 抛物线  $y = x^2 - 4x + 2020$  的对称轴为直线  $x = 2$

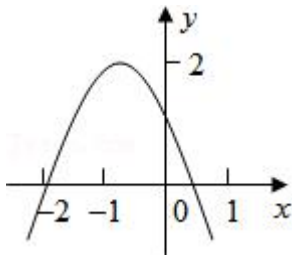
8. (3分) 如图所示, 以  $A$  为圆心的圆交数轴于  $B, C$  两点, 若  $A, B$  两点表示的数分别为

$1, \sqrt{2}$ , 则点  $C$  表示的数是 ( )



- A.  $\sqrt{2} - 1$                       B.  $2 - \sqrt{2}$                       C.  $2\sqrt{2} - 2$                       D.  $1 - \sqrt{2}$

9. (3分) 如图, 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象经过点  $(-1, 2)$ , 且与  $x$  轴交点的横坐标分别为  $x_1, x_2$ , 其中  $-2 < x_1 < -1, 0 < x_2 < 1$ , 下列结论: ①  $4a - 2b + c < 0$ ; ②  $2a - b < 0$ ; ③  $abc > 0$ ; ④  $b^2 + 8a > 4ac$ . 其中正确的是 ( )



- A. ①②③                      B. ①③④                      C. ②③④                      D. ①②③④

10. (3分) 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 以其三边为边向外作正方形,  $P$  是  $AE$

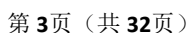
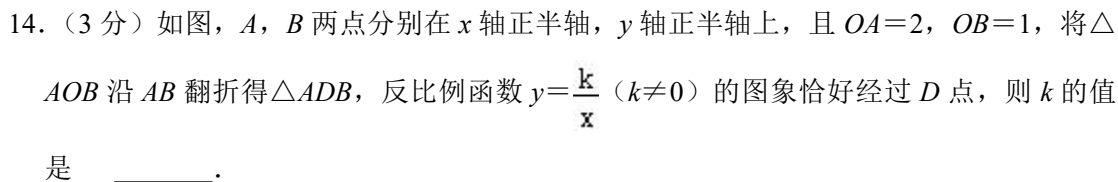
边上一点, 连结  $PC$  并延长交  $HI$  于点  $Q$ , 连结  $CG$  交  $AB$  于点  $K$ . 若  $\frac{PC}{CQ} = \frac{3}{4}$ , 则  $\frac{CK}{KG}$  的值为 ( )



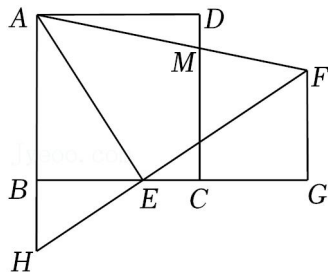
11. (3 分) 因式分解:  $2ab^3 - 2a^3b =$ \_\_\_\_\_.

12. (3 分) 时隔十三年，奥运圣火再次在北京点燃．北京将首次举办冬奥会，成为国际上唯一举办过夏季和冬季奥运会的“双奥之城”．墩墩和融融积极参加雪上项目的训练，现有三辆车按照 1，2，3 编号，两人可以任选坐一辆车去训练，则两人同坐 2 号车的概率是\_\_\_\_\_．

13. (3 分) 如图, 无人机与亮亮的水平距离是 15 米, 当他抬头仰视无人机时, 仰角恰好为  $30^\circ$ , 若亮亮身高 1.70 米, 则无人机距离地面的高度为 \_\_\_\_\_ 米. (结果带根号即可)



15. (3 分) 如图, 在正方形  $ABCD$  中, 点  $E$  在  $BC$  边上且  $BE=3$ , 将线段  $AE$  绕点  $E$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到线段  $EF$ . 过点  $F$  作  $FG \perp BC$  交  $BC$  的延长线于点  $G$ , 延长  $FE$  交  $AB$  的延长线于点  $H$ . 若  $BH=2$ , 则  $AM=$ \_\_\_\_\_.



三. 解答题 (共 7 小题, 共 55 分)

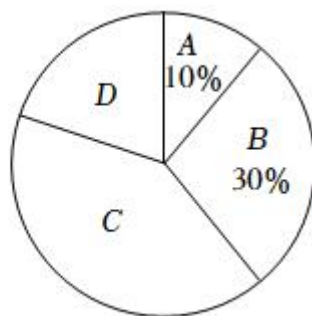
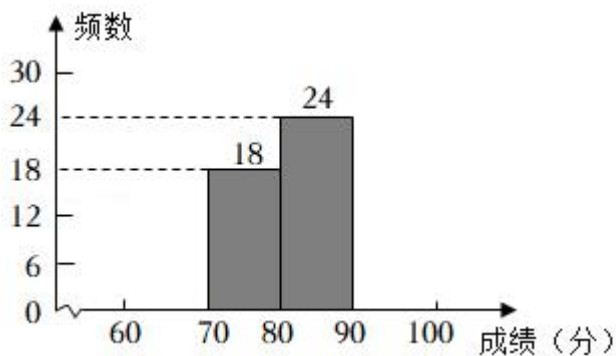
16. (5 分) 计算:  $(\frac{1}{4})^{-1} - 3\tan 30^\circ + |1 - \sqrt{3}| - (3.14 - \pi)^0$ .

17. (6 分) 先化简, 再求值:  $\frac{3-x}{x^2-6x+9} \div (\frac{x^2-x}{x-3} - x - 1)$ , 然后从  $-2$ 、 $2$ 、 $-3$ 、 $3$  中选择一个合适的整数作为  $x$  的值代入求值.

18. (8 分) 2021 年 12 月 9 日“天宫课堂”第一课正式开讲, 神舟十三号乘组航天员翟志刚、

王亚平、叶光富在中国空间站进行太空授课, 神奇的太空实验堪称宇宙级精彩! 某校为了培养学生对航天知识的学习兴趣, 组织全校 800 名学生进行了“航天知识竞赛”. 教务处从中随机抽取了  $n$  名学生的竞赛成绩 (满分 100 分, 每名学生的成绩记为  $x$  分) 分成四组,  $A$  组:  $60 \leq x < 70$ ;  $B$  组:  $70 \leq x < 80$ ;  $C$  组:  $80 \leq x < 90$ ;  $D$  组:  $90 \leq x \leq 100$ , 并得到如下不完整的频数分布表、频数分布直方图和扇形统计图. 根据图中信息, 解答下列问题:

分组	频数
$A: 60 \leq x < 70$	$a$
$B: 70 \leq x < 80$	18
$C: 80 \leq x < 90$	24
$D: 90 \leq x \leq 100$	$b$



(1)  $n$  的值为 \_\_\_\_\_,  $a$  的值为 \_\_\_\_\_,  $b$  的值为 \_\_\_\_\_.

(2) 请补全频数分布直方图并计算扇形统计图中表示“C”的扇形圆心角的度数为 \_\_\_\_\_°.

(3) 若规定学生竞赛成绩  $x \geq 80$  为优秀, 请估算全校竞赛成绩达到优秀的学生人数.

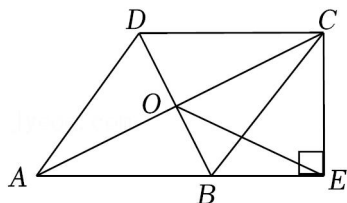
(4) 竞赛结束后, 九年级一班从本班获得优秀 ( $x \geq 80$ ) 的甲、乙、丙、丁四名同学中随机抽取两名宣讲航天知识. 请用列表或画树状图的方法求恰好抽到甲、乙两名同学的概率.



19. (8分) 如图, 在四边形  $ABCD$  中,  $AB \parallel DC$ ,  $AB = AD$ , 对角线  $AC$ ,  $BD$  交于点  $O$ ,  $AC$  平分  $\angle BAD$ , 过点  $C$  作  $CE \perp AB$  交  $AB$  的延长线于点  $E$ , 连接  $OE$

(1) 求证: 四边形  $ABCD$  是菱形;

(2) 若  $AB = \sqrt{10}$ ,  $BD = 2$ , 请直接写出  $\triangle OBE$  的面积为 \_\_\_\_\_.



20. (8分) 五月的第二个星期日是母亲节, 母亲们在这一天通常会收到礼物, 康乃馨被视为献给母亲的花, 某花店在母亲节前夕用 3000 元购进一批康乃馨, 在母亲节当天供不应求, 又马上用 6000 元加急购进一批康乃馨, 第二批康乃馨数量是第一批的 1.2 倍, 单价比第一批贵 2 元.

(1) 第一批康乃馨进货单价多少元?

(2) 若两次购进康乃馨按同一价格销售, 两批全部售完后, 获利不少于 4200 元, 那么

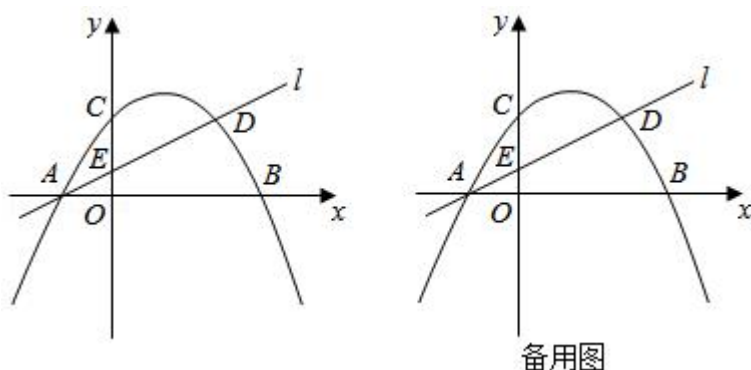
销售单价至少为多少元？

21. (10分) 如图，抛物线  $y=ax^2+bx+c$  与  $x$  轴交于  $A(-2, 0)$ ,  $B(6, 0)$  两点，与  $y$  轴交于点  $C$ ，直线  $l$  与抛物线交于  $A, D$  两点，与  $y$  轴交于点  $E$ ，且点  $D$  为  $(4, 3)$ 。

(1) 求抛物线及直线  $l$  的函数关系式；

(2) 点  $F$  为抛物线顶点，在抛物线的对称轴上是否存在点  $G$ ，使  $\triangle AFG$  为等腰三角形，若存在，求出点  $G$  的坐标；

(3) 若点  $Q$  是  $y$  轴上一点，且  $\angle ADQ=45^\circ$ ，请直接写出点  $Q$  的坐标。

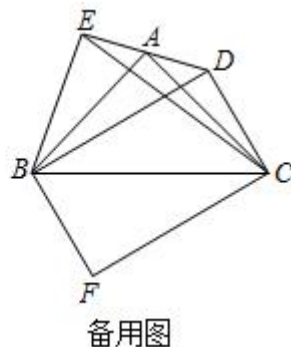
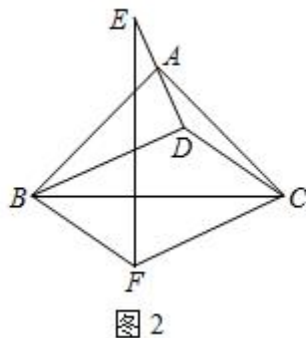
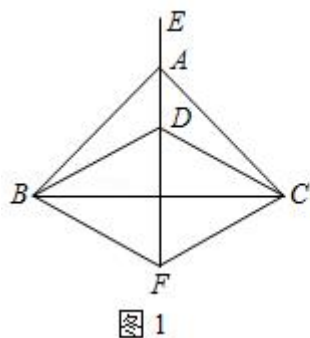


22. (10分) 已知  $D$  是等腰直角  $\triangle ABC$  所在平面上的任意一点， $\angle BAC=90^\circ$ ，连接  $DA$  并延长到点  $E$ ，使得  $AE=DA$ 。连接  $BD, CD$ ，以  $DB, DC$  为邻边作平行四边形  $DBFC$ ，连接  $EF$ 。

(1) 如图 1，当点  $D$  在  $\triangle ABC$  的直角角平分线上时， $EF$  与  $BC$  的位置关系为 \_\_\_\_\_，数量关系为 \_\_\_\_\_；

(2) 如图 2，当点  $D$  不在  $\angle BAC$  的平分线上时，(1) 中的两个结论是否仍然成立？如果成立，请仅就图 2 的情形进行证明；如果不成立，请说明理由；

(3) 将  $AD$  绕点  $A$  逆时针旋转，当  $\angle ACD=15^\circ$ ， $\angle BFC=90^\circ$  时，请直接写出  $\frac{DC}{AB}$  的值。



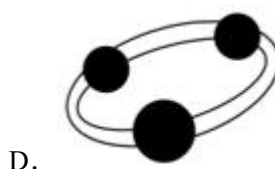
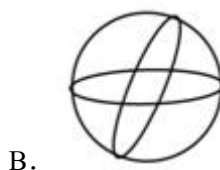
# 2021-2022 学年广东省深圳市宝安区富源学校九年级（下）质检

## 数学试卷（3 月份）

参考答案与试题解析

### 一. 选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. （3 分）在下列图形中是轴对称图形的是（ ）



【分析】根据轴对称图形的概念求解.

【解答】解： $A$ 、不是轴对称图形，因为找不到任何这样的一条直线，使它沿这条直线折叠后，直线两旁的部分能够重合，即不满足轴对称图形的定义，不符合题意；

$B$ 、是轴对称图形，符合题意；

$C$ 、不是轴对称图形，因为找不到任何这样的一条直线，使它沿这条直线折叠后，直线两旁的部分能够重合，即不满足轴对称图形的定义，不符合题意；

$D$ 、不是轴对称图形，因为找不到任何这样的一条直线，使它沿这条直线折叠后，直线两旁的部分能够重合，即不满足轴对称图形的定义，不符合题意.

故选： $B$ .

【点评】此题主要考查了轴对称图形的概念：如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

2. （3 分）华为麒麟 990 芯片采用了最新的 0.000000007 米的工艺制程，数 0.000000007 用科学记数法表示为（ ）

A.  $7 \times 10^{-9}$

B.  $7 \times 10^{-8}$

C.  $0.7 \times 10^{-9}$

D.  $0.7 \times 10^{-8}$

【分析】绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为  $a \times 10^{-n}$ ，与较大

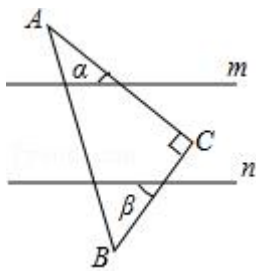
数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定．

【解答】解：数 0.00 000 0007 用科学记数法表示为  $7 \times 10^{-9}$ ．

故选：A．

【点评】本题考查用科学记数法表示较小的数，一般形式为  $a \times 10^{-n}$ ，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定．

3. (3 分) 如图， $m \parallel n$ ，直角三角尺  $ABC$  的直角顶点  $C$  在两直线之间，两直角边与两直线相交所形成的锐角分别为  $\alpha$ ， $\beta$ ．若  $\alpha = 35^\circ$ ，则  $\beta$  的值为 ( )



- A.  $55^\circ$                       B.  $35^\circ$                       C.  $45^\circ$                       D.  $50^\circ$

【分析】过点  $C$  作  $CD \parallel m$ ，交  $AB$  与点  $D$ ．利用平行线的性质和角的和差关系，求出  $\angle \beta$  的值．

【解答】解：如图，过点  $C$  作  $CD \parallel m$ ，交  $AB$  与点  $D$ ．

$$\because m \parallel n, CD \parallel m,$$

$$\therefore m \parallel n \parallel CD.$$

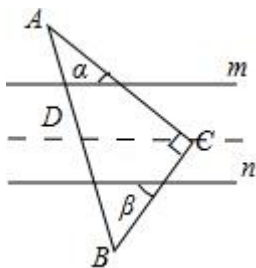
$$\therefore \angle ACD = \angle \alpha = 35^\circ, \angle DCB = \angle \beta.$$

$$\because \angle ACD + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle \alpha + \angle \beta = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle \beta = 55^\circ.$$

故选：A．



【点评】本题考查了平行线的性质和角的和差等知识点．解决本题亦可延长  $AC$  交直线  $n$



于点  $E$ ，利用平行线的性质和三角形的内角和定理求解.

4. (3分) 下列运算正确的是 ( )

A.  $a^2+a^3=a^5$

B.  $3a^2 \cdot 2a^3=6a^6$

C.  $(-a^3)^2=a^6$

D.  $(a-b)^2=a^2-b^2$

【分析】依据合并同类项法则、单项式乘单项式法则、积的乘方法则、完全平方公式计算即可.

【解答】解： $A$ 、 $a^2$ 与 $a^3$ 不是同类项，不能合并，故  $A$  错误；

$B$ 、 $3a^2 \cdot 2a^3=6a^5$ ，故  $B$  错误；

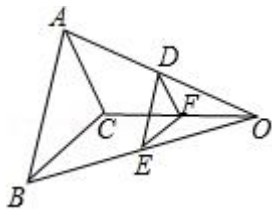
$C$ 、 $(-a^3)^2=a^6$ ，正确，故  $C$  正确；

$D$ 、 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ ，故  $D$  错误.

故选： $C$ .

【点评】本题主要考查的是合并同类项法则、单项式乘单项式法则、积的乘方法则、完全平方公式，熟练掌握相关知识是解题的关键.

5. (3分)  $\triangle DEF$  和  $\triangle ABC$  是位似图形，点  $O$  是位似中心，点  $D, E, F$  分别是  $OA, OB, OC$  的中点，若  $\triangle DEF$  的面积是 2，则  $\triangle ABC$  的面积是 ( )



A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

【分析】根据点  $D, E, F$  分别是  $OA, OB, OC$  的中点知  $\frac{DF}{AC}=\frac{1}{2}$ ，由位似图形性质得  $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}$

$=\left(\frac{DF}{AC}\right)^2$ ，即  $\frac{2}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}$ ，据此可得答案.

【解答】解： $\because$  点  $D, E, F$  分别是  $OA, OB, OC$  的中点，

$$\therefore \frac{DF}{AC}=\frac{1}{2},$$

$\therefore \triangle DEF$  与  $\triangle ABC$  的相似比是 1:2，

$$\therefore \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{DF}{AC}\right)^2, \text{ 即 } \frac{2}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4},$$

解得： $S_{\triangle ABC}=8$ ，

故选： $D$ .

【点评】本题主要考查了三角形中位线定理、位似的定义及性质，掌握面积的比等于相似比的平方是解题的关键.

6. (3分) 已知  $m$  是方程  $x^2 - 2x - 1010 = 0$  的根，则代数式  $4m - 2m^2 - 1$  的值为 ( )

- A. -2021                      B. 2021                      C. -2022                      D. 2022

【分析】把  $x=m$  代入方程得出  $m^2 - 2m = 3$ ，把  $4m - 2m^2 - 1$  化成  $-2(m^2 - 2m) - 1$ ，代入求出即可.

【解答】解：∵  $m$  是方程  $x^2 - 2x - 1010 = 0$  的一个根，

$$\therefore m^2 - 2m - 1010 = 0,$$

$$\therefore m^2 - 2m = 1010,$$

$$\therefore 4m - 2m^2 - 1$$

$$= -2(m^2 - 2m) - 1$$

$$= -2 \times 1010 - 1$$

$$= -2021,$$

故选：A.

【点评】本题考查了一元二次方程的解的应用，用了整体代入思想，即把  $m^2 - 2m$  当作一个整体来代入.

7. (3分) 下列哪一个是假命题 ( )

- A. 五边形外角和为  $360^\circ$   
B. 圆的切线垂直于经过切点的半径  
C. (3, -2) 关于  $y$  轴的对称点为 (-3, 2)  
D. 抛物线  $y = x^2 - 4x + 2020$  的对称轴为直线  $x = 2$

【分析】分析是否为真命题，需要分别分析各题设是否能推出结论，从而利用排除法得出答案.

【解答】解：A、五边形外角和为  $360^\circ$ ，是真命题；

B、圆的切线垂直于经过切点的半径，是真命题；

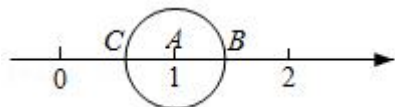
C、(3, -2) 关于  $y$  轴的对称点为 (-3, -2)，原命题是假命题；

D、抛物线  $y = x^2 - 4x + 2020$  的对称轴为直线  $x = 2$ ，是真命题；

故选：C.

【点评】主要考查命题的真假判断，正确的命题叫真命题，错误的命题叫做假命题. 判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

8. (3分) 如图所示, 以  $A$  为圆心的圆交数轴于  $B, C$  两点, 若  $A, B$  两点表示的数分别为  $1, \sqrt{2}$ , 则点  $C$  表示的数是 ( )



- A.  $\sqrt{2} - 1$       B.  $2 - \sqrt{2}$       C.  $2\sqrt{2} - 2$       D.  $1 - \sqrt{2}$

【分析】根据数轴两点间的距离求出  $\odot A$  的半径  $AB = \sqrt{2} - 1$ , 从而得到  $AC = \sqrt{2} - 1$ , 即可求解.

【解答】解:  $\because A, B$  两点表示的数分别为  $1, \sqrt{2}$ ,

$$\therefore AB = \sqrt{2} - 1,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AC = \sqrt{2} - 1,$$

$\because$  点  $C$  在点  $A$  的左边,

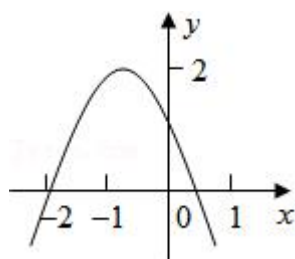
$$\therefore \text{点 } C \text{ 表示的数为 } 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2},$$

(备注: 由  $A$  是  $BC$  的中点, 用中点坐标公式也可求解),

故选:  $B$ .

【点评】本题主要考查了是数轴上两点之间的距离. 注意: 因为点  $C$  在点  $A$  的左边, 所以用点  $A$  表示的数减去  $AC$  的距离, 计算即可.

9. (3分) 如图, 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象经过点  $(-1, 2)$ , 且与  $x$  轴交点的横坐标分别为  $x_1, x_2$ , 其中  $-2 < x_1 < -1$ ,  $0 < x_2 < 1$ , 下列结论: ①  $4a - 2b + c < 0$ ; ②  $2a - b < 0$ ; ③  $abc > 0$ ; ④  $b^2 + 8a > 4ac$ . 其中正确的是 ( )



- A. ①②③      B. ①③④      C. ②③④      D. ①②③④

【分析】根据抛物线开口向下, 与  $x$  轴交点的横坐标分别为  $x_1, x_2$ , 其中  $-2 < x_1 < -1$ ,  $0 < x_2 < 1$ , 即可判断①②; 由抛物线对称轴在  $y$  轴的左侧, 交  $y$  轴的正半轴, 即可判断③; 抛物线的顶点纵坐标大于 2, 即可判断④.

【解答】解:  $\because$  抛物线开口向下, 与  $x$  轴交点的横坐标分别为  $x_1, x_2$ , 其中  $-2 < x_1 < -1$ ,

$$0 < x_2 < 1,$$

∴ 当  $x = -2$  时,  $y = 4a - 2b + c < 0$ , 故①正确;

∵ 抛物线开口向下, 与  $x$  轴交点的横坐标分别为  $x_1, x_2$ , 其中  $-2 < x_1 < -1, 0 < x_2 < 1$ ,

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore \text{函数的对称轴为: } x = -\frac{b}{2a} > -1,$$

$$\therefore b > 2a, \text{ 即 } 2a - b < 0, \text{ 故②正确;}$$

∵ 抛物线对称轴在  $y$  轴的左侧, 交  $y$  轴的正半轴,

$$\therefore ab \text{ 同号, } c > 0,$$

$$\therefore abc > 0, \text{ 故③正确;}$$

∵ 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象经过点  $(-1, 2)$ ,

$$\therefore \text{顶点纵坐标大于 } 2, \text{ 故 } \frac{4ac - b^2}{4a} > 2,$$

$$\therefore b^2 + 8a > 4ac, \text{ 故④正确;}$$

故选:  $D$ .

**【点评】** 本题主要考查对二次函数图象与系数的关系, 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 中,  $a$  的符号由抛物线的开口方向决定;  $c$  的符号由抛物线与  $y$  轴交点的位置确定;  $b$  的符号由对称轴的位置与  $a$  的符号决定; 抛物线与  $x$  轴的交点个数决定根的判别式的符号, 此外还要注意二次函数图象上的一些特殊点.

10. (3 分) 如图, 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ , 以其三边为边向外作正方形,  $P$  是  $AE$  边上一点, 连结  $PC$  并延长交  $HI$  于点  $Q$ , 连结  $CG$  交  $AB$  于点  $K$ . 若  $\frac{PC}{CQ} = \frac{3}{4}$ , 则  $\frac{CK}{KG}$  的值为 ( )



【解答】解：如图，过点  $C$  作  $CN \perp FG$  交  $AB$ ,  $FG$  于点  $M$ ,  $N$ ,



$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle ICQ,$$

设  $AC=3x$ , 则  $BC=4x$ ,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5x,$$

$$\therefore MN = AF = AB = 5x,$$

$$\because CM \perp AB,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \cdot CM = \frac{1}{2} \times AC \cdot BC,$$

$$\therefore CM = \frac{12}{5}x,$$

$$\because MK \parallel NG,$$

$$\therefore \frac{CK}{KG} = \frac{CM}{MN} = \frac{\frac{12}{5}x}{5x} = \frac{12}{25}.$$

故选：A.

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，解决本题的关键是得到 $\triangle ACP \sim \triangle ICQ$ .

## 二. 填空题（共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

11. (3 分) 因式分解： $2ab^3 - 2a^3b = \underline{2ab(b+a)(b-a)}$ .

【分析】原式提取公因式，再利用平方差公式分解即可.

【解答】解：原式 $= 2ab(b^2 - a^2)$

$$= 2ab(b+a)(b-a).$$

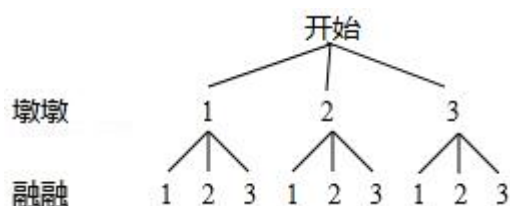
故答案为： $2ab(b+a)(b-a)$ .

【点评】此题考查了提公因式法与公式法的综合运用，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

12. (3 分) 时隔十三年，奥运圣火再次在北京点燃. 北京将首次举办冬奥会，成为国际上唯一举办过夏季和冬季奥运会的“双奥之城”. 墩墩和融融积极参加雪上项目的训练，现有三辆车按照 1, 2, 3 编号，两人可以任选坐一辆车去训练，则两人同坐 2 号车的概率是  $\underline{\frac{1}{9}}$ .

【分析】画树状图，共有 9 种等可能的结果，其中墩墩和融融两人同坐 2 号车的结果有 1 种，再由概率公式求解即可.

【解答】解：画树状图如下：



共有 9 种等可能的结果，其中墩墩和融融两人同坐 2 号车的结果有 1 种，

∴ 墩墩和融融两人同坐 2 号车的概率为  $\frac{1}{9}$ ，

故答案为：  $\frac{1}{9}$  .

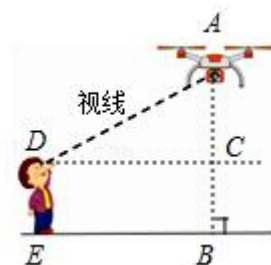
**【点评】** 本题考查了树状图法求概率：利用树状图法展示所有等可能的结果  $n$ ，再从中选出符合事件  $A$  或  $B$  的结果数目  $m$ ，然后利用概率公式计算事件  $A$  或事件  $B$  的概率.

13. (3 分) 如图，无人机与亮亮的水平距离是 15 米，当他抬头仰视无人机时，仰角恰好为  $30^\circ$ ，若亮亮身高 1.70 米，则无人机距离地面的高度为  $(5\sqrt{3}+1.70)$  米. (结果带根号即可)



**【分析】** 过  $A$  作  $AB \perp$  地面于  $B$ ，过  $D$  作  $DE \perp$  地面于  $E$ ， $DC \perp AB$  于  $C$ ，则四边形  $DEBC$  是矩形，得  $BC=ED=1.70$  米， $DC=EB=15$  米，再由锐角三角函数定义得  $AC=5\sqrt{3}$  (米)，即可解决问题.

**【解答】** 解：如图，过  $A$  作  $AB \perp$  地面于  $B$ ，过  $D$  作  $DE \perp$  地面于  $E$ ， $DC \perp AB$  于  $C$ ，



则四边形  $DEBC$  是矩形，

∴  $BC=ED=1.70$  米， $DC=EB=15$  米，

在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中， $\angle ADC=30^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle ADC = \tan 30^\circ = \frac{AC}{DC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore AC = \frac{\sqrt{3}}{3} DC = 5\sqrt{3} \text{ (米)},$$

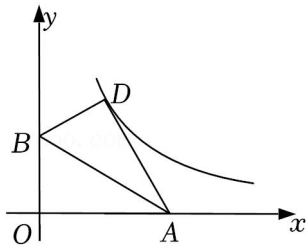
$$\therefore AB = AC + CB = (5\sqrt{3} + 1.70) \text{ (米)}.$$

即无人机距离地面的高度为  $(5\sqrt{3}+1.70)$  米，

故答案为：  $(5\sqrt{3}+1.70)$  .

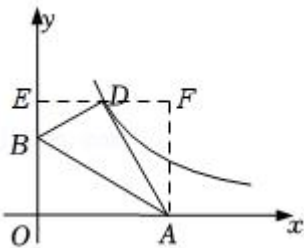
【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，熟练掌握仰角俯角的定义，正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键．

14. (3 分) 如图， $A, B$  两点分别在  $x$  轴正半轴， $y$  轴正半轴上，且  $OA=2, OB=1$ ，将  $\triangle AOB$  沿  $AB$  翻折得  $\triangle ADB$ ，反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象恰好经过  $D$  点，则  $k$  的值是  $\frac{32}{25}$ ．



【分析】 过点  $D$  作  $y$  轴的垂线于点  $E$ ，交过点  $A$  作  $x$  轴的垂线于点  $F$ ，可得  $\triangle BED \sim \triangle DFA$ ，所以  $BE:DF=DE:AF=BD:DA$ ，由折叠可知， $\angle ADB=\angle AOB=90^\circ$ ， $OA=AD=2, OB=BD=1$ ，所以  $BE:DF=DE:AF=BD:AD=1:2$ ．设  $BE=a$ ，则  $DF=2a$ ，所以  $AF=1+a, DE=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}(1+a)$ ，所以  $\frac{1}{2}(1+a)+2a=2$ ，解得  $a=\frac{3}{5}$ ．所以  $D(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$ ，所以  $k=\frac{32}{25}$ ．

【解答】 解：如图，过点  $D$  作  $y$  轴的垂线于点  $E$ ，交过点  $A$  作  $x$  轴的垂线于点  $F$ ，



$$\therefore \angle F = \angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE + \angle EBD = \angle ADF + \angle BDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle ADF,$$

$$\therefore \triangle BED \sim \triangle DFA,$$

$$\therefore BE:DF=DE:AF=BD:DA,$$

由折叠可知， $\angle ADB=\angle AOB=90^\circ$ ， $OA=AD=2, OB=BD=1$ ，

$$\therefore BE:DF=DE:AF=BD:AD=1:2,$$

设  $BE=a$ ，则  $DF=2a$ ，

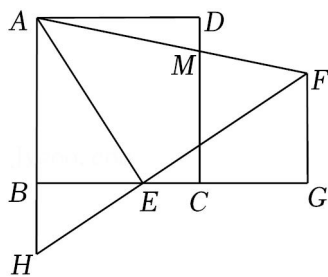
$$\therefore AF=1+a,$$



$$\begin{aligned}\therefore DE &= \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}(1+a), \\ \therefore \frac{1}{2}(1+a) + 2a &= 2, \text{ 解得 } a = \frac{3}{5}. \\ \therefore D &\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \\ \therefore k &= \frac{32}{25}. \\ \text{故答案为: } &\frac{32}{25}.\end{aligned}$$

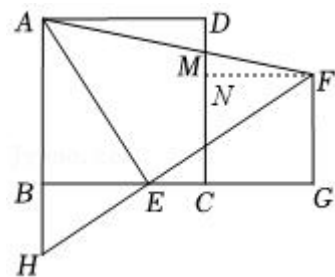
【点评】本题考查了反比例函数点的坐标特征，翻折变换（折叠问题），相似三角形的性质与判定，正确地作出辅助线是解题的关键。

15. (3分) 如图，在正方形  $ABCD$  中，点  $E$  在  $BC$  边上且  $BE=3$ ，将线段  $AE$  绕点  $E$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到线段  $EF$ 。过点  $F$  作  $FG \perp BC$  交  $BC$  的延长线于点  $G$ ，延长  $FE$  交  $AB$  的延长线于点  $H$ 。若  $BH=2$ ，则  $AM = \frac{9\sqrt{26}}{10}$ 。



【分析】由“ $AAS$ ”可证  $\triangle ABE \cong \triangle EGF$ ，可得  $BE=FG$ ， $AB=EG$ ，可证  $BF=FG=3$ ，通过证明  $\triangle ABE \sim \triangle EBH$ ，可求  $AB$  的长，由勾股定理可求  $AE$ ， $AF$  的，即可求解。

【解答】解：过点  $F$  作  $FN \perp CD$  于  $N$ ，



$\because$  将线段  $AE$  绕点  $E$  顺时针旋转  $90^\circ$  得到线段  $EF$ 。

$$\therefore AE = EF, \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB + \angle GEF = 90^\circ, AF = \sqrt{2}AE,$$

$$\text{又} \because \angle AEB + \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GEF = \angle BAE,$$

---

又 $\because FG \perp BC$ ,

$$\therefore \angle ABE = \angle EGF = 90^\circ,$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle EGF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle EGF \\ \angle BAE = \angle GEF, \\ AE = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle EGF \text{ (AAS)};$$

$$\therefore BE = FG, AB = EG,$$

$$\because AB = BC,$$

$$\therefore BC = EG,$$

$$\therefore BE = CG,$$

$$\therefore FG = CG,$$

$$\because \angle AEH = \angle ABE = \angle EBH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle AEB = 90^\circ, \quad \angle AEB + \angle BEH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEH = \angle EAB,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle EBH,$$

$$\therefore \frac{BE}{BH} = \frac{AB}{BE},$$

$$\therefore EB^2 = AB \cdot BH,$$

$$\therefore 9 = 2 \cdot AB,$$

$$\therefore AB = \frac{9}{2},$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + 9} = \frac{3\sqrt{13}}{2},$$

$$\therefore AF = \sqrt{2}AE = \frac{3\sqrt{26}}{2},$$

$$\because \angle G = \angle DCG = \angle FNC = 90^\circ,$$

$\therefore$  四边形  $CGFN$  是矩形,

$$\because FG = CG,$$

$\therefore$  四边形  $CGFN$  是正方形,

$$\therefore FN = FG = 3,$$

$$\because FN \parallel AD,$$

$$\therefore \frac{AD}{FN} = \frac{AM}{MF} = \frac{\frac{9}{2}}{3} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore AM = \frac{3}{5}AF = \frac{9\sqrt{26}}{10},$$

故答案为:  $\frac{9\sqrt{26}}{10}$ .

【点评】本题考查了旋转的性质，正方形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质等知识，求出  $AF$  的长是解题的关键.

### 三. 解答题 (共 7 小题, 共 55 分)

16. (5 分) 计算:  $(\frac{1}{4})^{-1} - 3\tan 30^\circ + |1 - \sqrt{3}| - (3.14 - \pi)^0$ .

【分析】直接利用特殊角的三角函数值以及负整数指数幂的性质、绝对值的性质、零指数幂的性质分别化简，进而计算得出答案.

【解答】解: 原式  $= 4 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} - 1 - 1$

$$= 4 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1 - 1$$

$$= 2.$$

【点评】此题主要考查了实数的运算，正确化简各数是解题关键.

17. (6 分) 先化简，再求值:  $\frac{3-x}{x^2-6x+9} \div (\frac{x^2-x}{x-3} - x - 1)$ ，然后从  $-2$ 、 $2$ 、 $-3$ 、 $3$  中

选择一个合适的整数作为  $x$  的值代入求值.

【分析】根据分式的加减运算、乘除运算法则进行化简，然后根据分式有意义的条件可求出  $x$  的值，然后代入原式即可求出答案.

【解答】解: 原式  $= \frac{-(x-3)}{(x-3)^2} \div \frac{x^2-x-(x+1)(x-3)}{x-3}$

$$= \frac{-(x-3)}{(x-3)^2} \div \frac{x^2-x-x^2+2x+3}{x-3}$$

$$= -\frac{1}{x-3} \div \frac{x+3}{x-3}$$

$$= -\frac{1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{x+3}$$

$$= -\frac{1}{x+3},$$

根据分式有意义的条件可知:  $x$  不能取  $3$ ， $-3$ ,

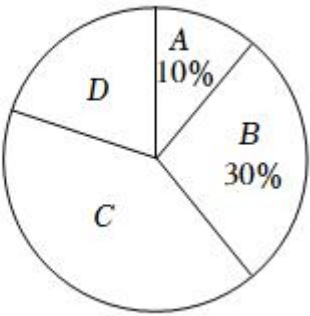
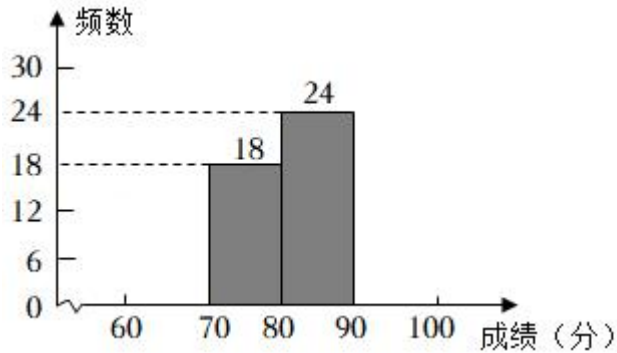
当  $x=2$  时,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= -\frac{1}{2+3} \\ &= -\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

【点评】 本题考查分式的混合运算，解题的关键是熟练运用分式的加减运算、乘除运算法则，本题属于基础题型.

18. (8分) 2021年12月9日“天宫课堂”第一课正式开讲，神舟十三号乘组航天员翟志刚、王亚平、叶光富在中国空间站进行太空授课，神奇的太空实验堪称宇宙级精彩!某校为了培养学生对航天知识的学习兴趣，组织全校800名学生进行了“航天知识竞赛”. 教务处从中随机抽取了  $n$  名学生的竞赛成绩(满分100分，每名学生的成绩记为  $x$  分)分成四组，A组： $60 \leq x < 70$ ；B组： $70 \leq x < 80$ ；C组： $80 \leq x < 90$ ；D组： $90 \leq x \leq 100$ ，并得到如下不完整的频数分布表、频数分布直方图和扇形统计图. 根据图中信息，解答下列问题：

分组	频数
A: $60 \leq x < 70$	$a$
B: $70 \leq x < 80$	18
C: $80 \leq x < 90$	24
D: $90 \leq x \leq 100$	$b$



- (1)  $n$  的值为 60， $a$  的值为 6， $b$  的值为 12 .
- (2) 请补全频数分布直方图并计算扇形统计图中表示“C”的扇形圆心角的度数为 144° .
- (3) 若规定学生竞赛成绩  $x \geq 80$  为优秀，请估算全校竞赛成绩达到优秀的学生人数.
- (4) 竞赛结束后，九年级一班从本班获得优秀 ( $x \geq 80$ ) 的甲、乙、丙、丁四名同学中

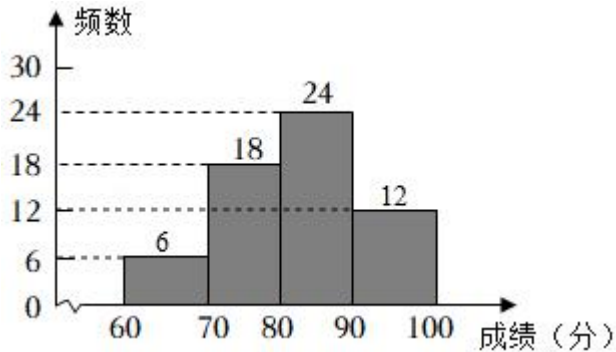
随机抽取两名宣讲航天知识．请用列表或画树状图的方法求恰好抽到甲、乙两名同学的概率．



【分析】（1）由  $B$  的人数除以所占百分比得出  $n$  的值，即可求出  $a$ 、 $b$  的值；  
 （2）由（1）的结果补全频数分布直方图，再由  $360^\circ$  乘以“ $C$ ”所占的比例即可；  
 （3）由全校总人数乘以达到优秀的学生人数所占的比例即可；  
 （4）画树状图，共有 12 种等可能的结果，其中恰好抽到甲、乙两名同学的结果有 2 种，再由概率公式求解即可．

【解答】解：（1） $n = 18 \div 30\% = 60$ ，  
 $\therefore a = 60 \times 10\% = 6$ ，  
 $\therefore b = 60 - 6 - 18 - 24 = 12$ ，  
 故答案为：60，6，12；

（2）补全频数分布直方图如下：



扇形统计图中表示“ $C$ ”的扇形圆心角的度数为： $360^\circ \times \frac{24}{60} = 144^\circ$ ，

故答案为：144；

（3）估算全校竞赛成绩达到优秀的学生人数为： $800 \times \frac{24+12}{60} = 480$ （人）；

（4）画树状图如下：



共有 12 种等可能的结果，其中恰好抽到甲、乙两名同学的结果有 2 种，

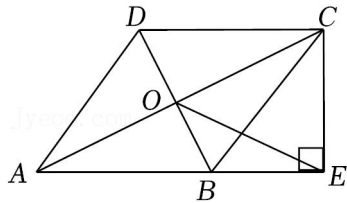
$\therefore$  恰好抽到甲、乙两名同学的概率为  $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ .

**【点评】** 此题主要考查了树状图法求概率以及频数分布直方图和扇形统计图等知识，树状图法可以不重复不遗漏地列出所有可能的结果，适用于两步或两步以上完成的事件；解题时还要注意是放回试验还是不放回试验．用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比．

19. (8 分) 如图，在四边形  $ABCD$  中， $AB \parallel DC$ ， $AB = AD$ ，对角线  $AC$ ， $BD$  交于点  $O$ ， $AC$  平分  $\angle BAD$ ，过点  $C$  作  $CE \perp AB$  交  $AB$  的延长线于点  $E$ ，连接  $OE$

(1) 求证：四边形  $ABCD$  是菱形；

(2) 若  $AB = \sqrt{10}$ ， $BD = 2$ ，请直接写出  $\triangle OBE$  的面积为  $-\frac{6}{5}$ ．



**【分析】** (1) 先证  $CD = AD$ ，再证四边形  $ABCD$  是平行四边形，然后由  $AB = AD$ ，即可得出结论；

(2) 由菱形的性质得  $OA = OC$ ， $BD \perp AC$ ， $OB = \frac{1}{2}BD = 1$ ，则  $OA = 3$ ，再证  $\triangle AOB \sim \triangle AEC$ ，得  $EA = \frac{9\sqrt{10}}{5}$ ，则  $BE = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ ，过  $O$  作  $OP \perp AE$  于  $P$ ，然后由面积法得  $OP = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ，即可得出答案．

**【解答】** (1) 证明： $\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore \angle CAB = \angle DCA$ ，

$\because AC$  为  $\angle BAD$  的平分线，

$\therefore \angle CAB = \angle DAC$ ，

$\therefore \angle DCA = \angle DAC$ ，

$\therefore CD = AD$ ，

$\because AB = AD$ ，

$\therefore AB = CD$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是平行四边形，

$$\because AB=AD,$$

$\therefore$  平行四边形  $ABCD$  是菱形;

(2) 解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是菱形,

$$\therefore OA=OC, BD \perp AC, OB=\frac{1}{2}BD=1,$$

$$\therefore \angle AOB=90^\circ,$$

$$\therefore OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=3,$$

$$\therefore AC=2OA=6,$$

$$\because CE \perp AB,$$

$$\therefore \angle AEC=90^\circ = \angle AOB,$$

$$\text{又} \because \angle OAB = \angle EAC,$$

$$\therefore \triangle AOB \sim \triangle AEC,$$

$$\therefore \frac{OA}{EA} = \frac{AB}{AC},$$

$$\text{即} \frac{3}{EA} = \frac{\sqrt{10}}{6},$$

$$\text{解得: } EA = \frac{9\sqrt{10}}{5},$$

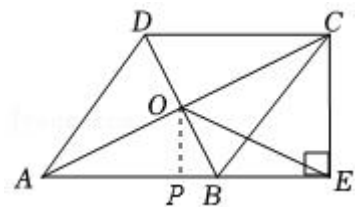
$$\therefore BE = EA - AB = \frac{9\sqrt{10}}{5} - \sqrt{10} = \frac{4\sqrt{10}}{5},$$

过  $O$  作  $OP \perp AE$  于  $P$ ,

$$\text{则 } OP = \frac{OA \times OB}{AB} = \frac{3 \times 1}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\therefore \triangle OBE \text{ 的面积} = \frac{1}{2} BE \times OP = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{10}}{5} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{6}{5},$$

故答案为:  $\frac{6}{5}$ .



**【点评】** 本题考查了菱形的判定与性质、平行四边形的判定与性质、等腰三角形的判定、平行线的性质、勾股定理以及三角形面积等知识; 熟练掌握菱形的判定与性质是解题的关键.

20. (8 分) 五月的第二个星期日是母亲节, 母亲们在这一天通常会收到礼物, 康乃馨被视

为献给母亲的花，某花店在母亲节前夕用 3000 元购进一批康乃馨，在母亲节当天供不应求，又马上用 6000 元加急购进一批康乃馨，第二批康乃馨数量是第一批的 1.2 倍，单价比第一批贵 2 元.

(1) 第一批康乃馨进货单价多少元?

(2) 若两次购进康乃馨按同一价格销售，两批全部售完后，获利不少于 4200 元，那么销售单价至少为多少元?

**【分析】**(1) 设第一批康乃馨进货单价为  $x$  元，则第二批康乃馨进货单价为  $(x+2)$  元，根据数量 = 总价  $\div$  单价，结合第二批购进的数量是第一批的 1.2 倍，即可得出关于  $x$  的分式方程，解之经检验后即可得出结论；

(2) 设销售单价为  $y$  元，利用销售利润 = 销售总价 - 进货总价，结合获利不少于 4200 元，即可得出关于  $y$  的一元一次不等式，解之取其中的最小值即可得出结论.

**【解答】**解：(1) 设第一批康乃馨进货单价为  $x$  元，则第二批康乃馨进货单价为  $(x+2)$  元，

依题意得：
$$\frac{6000}{x+2} = \frac{3000}{x} \times 1.2,$$

解得： $x=3$ ，

经检验， $x=3$  是原方程的解，且符合题意.

答：第一批康乃馨进货单价为 3 元.

(2) 设销售单价为  $y$  元，

依题意得：
$$\left(\frac{3000}{3} + \frac{6000}{3+2}\right)y - 3000 - 6000 \geq 4200,$$

解得： $y \geq 6$ .

答：销售单价至少为 6 元.

**【点评】**本题考查了分式方程的应用以及一元一次不等式的应用，解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出分式方程；(2) 根据各数量之间的关系，正确列出一元一次不等式.

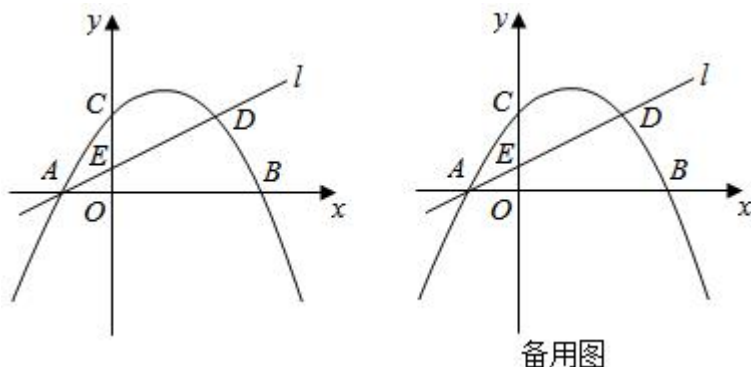
21. (10 分) 如图，抛物线  $y=ax^2+bx+c$  与  $x$  轴交于  $A(-2, 0)$ ， $B(6, 0)$  两点，与  $y$  轴交于点  $C$ ，直线  $l$  与抛物线交于  $A, D$  两点，与  $y$  轴交于点  $E$ ，且点  $D$  为  $(4, 3)$ .

(1) 求抛物线及直线  $l$  的函数关系式；

(2) 点  $F$  为抛物线顶点，在抛物线的对称轴上是否存在点  $G$ ，使  $\triangle AFG$  为等腰三角形，若存在，求出点  $G$  的坐标；



(3) 若点  $Q$  是  $y$  轴上一点, 且  $\angle ADQ = 45^\circ$ , 请直接写出点  $Q$  的坐标.



【分析】(1) 设抛物线函数关系式为  $y = a(x+2)(x-6)$ , 将点  $D(4, 3)$  代入可求二次函数的解析式; 再由待定系数法求直线解析式即可;

(2) 由题知, 点  $F(2, 4)$ , 设  $G(2, y)$ , 分三种情况讨论: ①当点  $A$  为顶点,  $AF$  为腰时,  $AF = AG$ , 此时  $G(2, -4)$ ; ②当点  $F$  为顶点,  $AF$  为腰时,  $FA = FG$ , 此时  $G(2, 4+4\sqrt{2})$  或  $(2, 4-4\sqrt{2})$ ; ③当点  $G$  为顶点,  $AF$  为底时,  $GA = GF$ , 此时  $G(2, 0)$ ;

(3) 分两种情况讨论: ①当  $Q$  点在  $y$  轴正半轴上时, 过点  $D$  作  $DF \perp y$  轴交于  $F$  点, 取点  $M(0, 2)$ , 连接  $AM$ , 过点  $E$  作  $EK \perp AM$  交于点  $K$ , 可得  $\angle QDF = \angle MAE$ , 再求出  $KM = KE = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $AK = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ , 可求  $\tan \angle KAE = \tan \angle QDF = \frac{1}{3} = \frac{QF}{FD}$ , 从而可求  $QF = \frac{4}{3}$ , 则  $Q(0, \frac{13}{3})$ ; ②当  $Q$  点在  $y$  轴负半轴上时, 过点  $D$  作  $DH \perp x$  轴交于点  $H$ , 可得  $\angle MAE = \angle QDH$ , 由  $\tan \angle QDH = \frac{1}{3} = \frac{PH}{DH}$ , 求出  $PH = 1$ , 则  $OP = 3$ , 再求出  $\angle OQP = \angle PDH$ , 由  $\tan \angle OQP = \frac{1}{3} = \frac{OP}{OQ}$ , 可求  $OQ = 9$ , 从而得到  $Q(0, -9)$ .

【解答】解: (1) 设抛物线函数关系式为  $y = a(x+2)(x-6)$ ,

将点  $D(4, 3)$  代入得,

$$a = -\frac{1}{4},$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3;$$

设直线  $l$  的函数关系式为  $y = kx + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = 0, \\ 4k + b = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 1;$$

---

(2) 存在点  $G$ ，使  $\triangle AFG$  为等腰三角形，理由如下：

由题知，点  $F(2, 4)$ ，

$$\therefore AF = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2},$$

设  $G(2, y)$ ，

$$\therefore AG = \sqrt{16 + y^2},$$

当点  $A$  为顶点， $AF$  为腰时， $AF = AG$ ，

$$\therefore 4\sqrt{2} = \sqrt{16 + y^2},$$

$$\therefore y = \pm 4,$$

此时  $G(2, -4)$ ，

当点  $F$  为顶点， $AF$  为腰时， $FA = FG$ ，

$$\therefore 4\sqrt{2} = |4 - y|,$$

$$\therefore y = 4 - 4\sqrt{2} \text{ 或 } y = 4 + 4\sqrt{2},$$

此时  $G(2, 4 + 4\sqrt{2})$  或  $(2, 4 - 4\sqrt{2})$ ，

当点  $G$  为顶点， $AF$  为底时， $GA = GF$ ，

$$\therefore \sqrt{(2+2)^2 + y^2} = 4 - y,$$

解得  $y = 0$ ，

$$\therefore G(2, 0),$$

综上所述： $G(2, 0)$ ， $(2, 4 + 4\sqrt{2})$ ， $(2, 4 - 4\sqrt{2})$ ， $(2, -4)$ ；

(3) 如图 1，当  $Q$  点在  $y$  轴正半轴上时，

过点  $D$  作  $DF \perp y$  轴交于  $F$  点，取点  $M(0, 2)$ ，连接  $AM$ ，过点  $E$  作  $EK \perp AM$  交于点  $K$ ，

$$\because DF \parallel AO,$$

$$\therefore \angle FDA = \angle EAO,$$

$$\because OM = OA,$$

$$\therefore \angle MAO = 45^\circ,$$

$$\because \angle ADQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle QDF = \angle MAE,$$

$$\because ME = 1,$$

$$\therefore KM = KE = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because OM = OA = 2,$$

$$\therefore AM = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AK = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \tan \angle KAE = \frac{KE}{AK} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \tan \angle QDF = \frac{1}{3} = \frac{QF}{FD} = \frac{QF}{4},$$

$$\therefore QF = \frac{4}{3},$$

$$\therefore OQ = \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3},$$

$$\therefore Q \left( 0, \frac{13}{3} \right);$$

如图 2，当  $Q$  点在  $y$  轴负半轴上时，

过点  $D$  作  $DH \perp x$  轴交于点  $H$ ，

$$\because \angle ADQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FDA + \angle QDH = 45^\circ,$$

$$\because \angle FDE = \angle EAO,$$

$$\therefore \angle MAE = \angle QDH,$$

$$\therefore \tan \angle QDH = \frac{1}{3} = \frac{PH}{DH} = \frac{PH}{3},$$

$$\therefore PH = 1,$$

$$\therefore OP = 3,$$

$$\because \angle PDH + \angle DPH = 90^\circ, \quad \angle OPQ + \angle OQP = 90^\circ, \quad \angle OPQ = \angle DPH,$$

$$\therefore \angle OQP = \angle PDH,$$

$$\therefore \tan \angle OQP = \frac{1}{3} = \frac{OP}{OQ} = \frac{3}{OQ},$$

$$\therefore OQ = 9,$$

$$\therefore Q \left( 0, -9 \right);$$

综上所述： $Q$  点坐标为  $(0, -9)$  或  $(0, \frac{13}{3})$ .

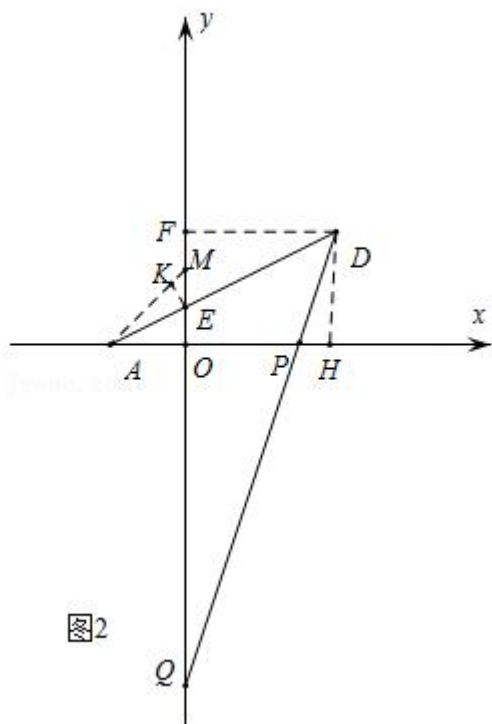


图2

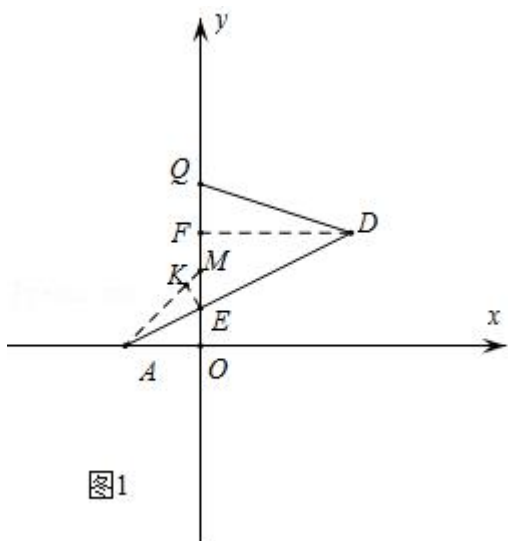


图1

【点评】本题是二次函数的综合题，熟练掌握二次函数的图象及性质，等腰三角形的性质，直角三角形的性质是解题的关键。

22. (10 分) 已知  $D$  是等腰直角  $\triangle ABC$  所在平面上的任意一点， $\angle BAC = 90^\circ$ ，连接  $DA$  并延长到点  $E$ ，使得  $AE = DA$ 。连接  $BD$ ， $CD$ ，以  $DB$ ， $DC$  为邻边作平行四边形  $DBFC$ ，连接  $EF$ 。

(1) 如图 1，当点  $D$  在  $\triangle ABC$  的直角角平分线上时， $EF$  与  $BC$  的位置关系为  $EF \perp BC$ ，数量关系为  $EF = BC$ ；

(2) 如图 2，当点  $D$  不在  $\angle BAC$  的平分线上时，(1) 中的两个结论是否仍然成立？如果

成立，请仅就图 2 的情形进行证明；如果不成立，请说明理由；

(3) 将  $AD$  绕点  $A$  逆时针旋转，当  $\angle ACD=15^\circ$ ， $\angle BFC=90^\circ$  时，请直接写出  $\frac{DC}{AB}$  的值.

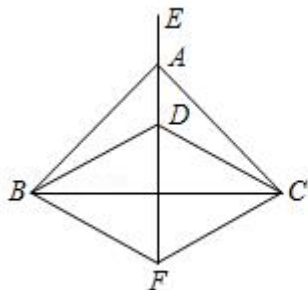


图 1

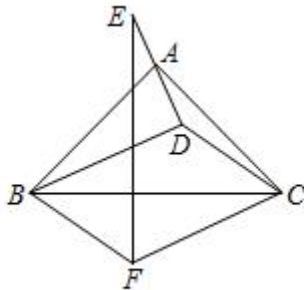
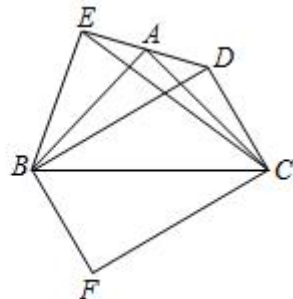


图 2



备用图

【分析】(1) 设  $EF$  交  $BC$  于点  $G$ ，由  $AB=AC$ ， $AF$  平分  $\angle BAC$  得  $EF \perp BC$ ，因为四边形  $DBFC$  是平行四边形，所以  $FG=DG$ ，而  $AE=DA$ ，可得  $EF=2AG=BC$ ；

(2)  $EF \perp BC$ ， $EF=BC$  仍然成立，设  $EF$  交  $BC$  于点  $H$ ，连接  $DF$  交  $BC$  于点  $G$ ，连接  $AG$ ，则  $FG=DG$ ， $AE=DA$ ，根据三角形中位线定理可得  $AG \parallel EF$ ， $AG=\frac{1}{2}EF$ ，而  $AG \perp BC$ ， $AG=\frac{1}{2}BC$ ，于是得  $EF \perp BC$ ， $EF=BC$ ；

(3) 分两种情况，一是点  $D$  与点  $B$  在直线  $AC$  的异侧，则  $\angle BCD=45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ ，由四边形  $DBFC$  是平行四边形，且  $\angle BFC=90^\circ$  得  $\angle BDC=90^\circ$ ，于是可求得  $DC=\frac{1}{2}BC$ ， $AB=\frac{\sqrt{2}}{2}BC$ ，可求得  $\frac{DC}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ；二是点  $D$  与点  $B$  在直线  $AC$  的同侧，则  $\angle BCD=45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ ，于是可求得  $DC=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$ ， $AB=\frac{\sqrt{2}}{2}BC$ ，可求得  $\frac{DC}{AB}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

【解答】(1) 解：如图 1， $EF$  交  $BC$  于点  $G$ ，

$\because AB=AC$ ， $AF$  平分  $\angle BAC$ ，

$\therefore EF \perp BC$ ，

$\because \angle BAC=90^\circ$ ，

$\therefore AG=\frac{1}{2}BC=BG=CG$ ，

$\because$  四边形  $DBFC$  是平行四边形，

$\therefore FG=DG$ ，

$\because AE=DA$ ，

$\therefore EF=AG+AE+FG=AG+DA+DG=AG+AG=\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}BC=BC$ ，

---

故答案为:  $EF \perp BC$ ,  $EF = BC$ .

(2) 解: 成立,

证明: 如图 2,  $EF$  交  $BC$  于点  $H$ , 连接  $DF$  交  $BC$  于点  $G$ , 连接  $AG$ ,

$\because$  四边形  $DBFC$  是平行四边形,

$\therefore GF = DG$ ,  $BG = CG$ ,

$\because AB = AC$ ,

$\therefore AG \perp BC$ ,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$ ,

$\because AG = \frac{1}{2}BC$ ,

$\therefore AE = DA$ ,

$\therefore AG \parallel EF$ ,  $AG = \frac{1}{2}EF$ ,

$\therefore \angle EHB = \angle AGB = 90^\circ$ ,  $\frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}BC$ ,

$\therefore EF \perp BC$ ,  $EF = BC$ .

(3) 解: 如图 3, 点  $D$  与点  $B$  在直线  $AC$  的异侧,

$\because \angle ACB = \angle ABC = 45^\circ$ ,  $\angle ACD = 15^\circ$ ,

$\therefore \angle BCD = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ ,

$\because$  四边形  $DBFC$  是平行四边形, 且  $\angle BFC = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BDC = \angle BFC = 90^\circ$ ,

$\therefore DC = BC \cdot \cos \angle BCD = BC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}BC$ ,

$\because AB = BC \cdot \cos \angle ABC = BC \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$ ,

$\therefore \frac{DC}{AB} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

如图 4, 点  $D$  与点  $B$  在直线  $AC$  的同侧,

$\because \angle ACB = \angle ABC = 45^\circ$ ,  $\angle ACD = 15^\circ$ ,

$\therefore \angle BCD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ ,

$\because$  四边形  $DBFC$  是平行四边形, 且  $\angle BFC = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle BDC = \angle BFC = 90^\circ$ ,

$$\therefore DC = BC \cdot \cos \angle BCD = BC \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} BC,$$

$$\therefore AB = BC \cdot \cos \angle ABC = BC \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} BC,$$

$$\therefore \frac{DC}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} BC}{\frac{\sqrt{2}}{2} BC} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

综上所述,  $\frac{DC}{AB}$  的值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ .

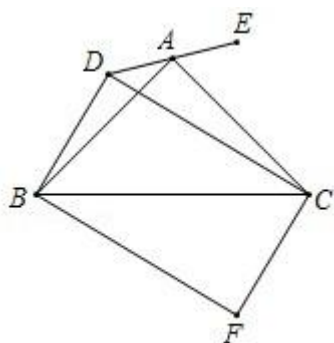


图4

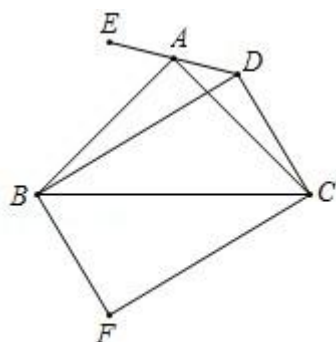


图3

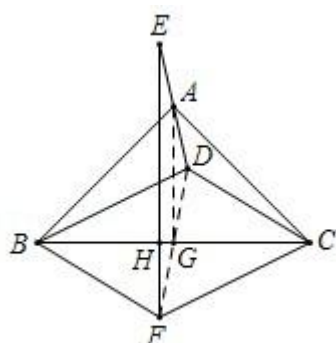


图2

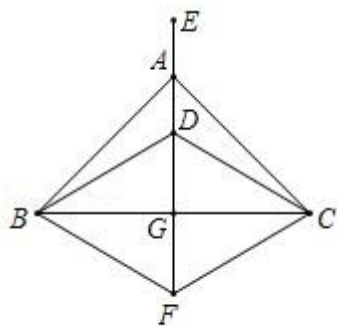


图1

【点评】此题考查等腰直角三角形的性质、三角形中位线定理、平行四边形的性质、平行线的性质、锐角三角函数、解直角三角形、分类讨论数学思想的运用等知识与方法，此题难度较大，属于考试压轴题