

# 北师大附属实验中学 2022-2023 学年度第一学期期中试卷

## 九年级数学

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

考生须知	<p>1. 本试卷共 8 页，共三道大题，28 道小题；答题纸共 3 页。满分 100 分。考试时间 120 分钟。</p> <p>2. 在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名、学号。</p> <p>3. 试卷答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效。</p> <p>4. 在答题卡上，选择题须用 2B 铅笔将选中项涂黑涂满，作图题用 2B 铅笔绘图，其他试题用黑色字迹签字笔作答。</p>
	<p>命题人：胡波平、吴勇、毕航达                      审题人：陈平</p>

### 一、 单项选择题（本题共 8 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项最符合题意。每小题 2 分，共 16 分）

1. 抛物线  $y = 2(x - 3)^2 + 1$  的顶点坐标是（      ）

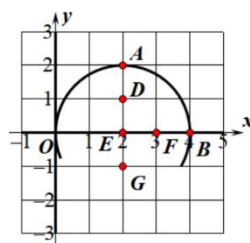
A. (3, 1)              B. (3, -1)              C. (-3, -1)              D. (-3, 1)

2. 一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有一根为零, 则下列说法正确的是（      ）

A.  $b^2 - 4ac = 0$     B.  $c = 0$               C.  $b = 0$               D.  $c \neq 0$

3. 如图, 在平面直角坐标系中, 一条圆弧经过  $A(2,2)$ ,  $B(4,0)$ ,  $O$  三点, 那么这条圆弧所在圆的圆心为图中的（      ）

A. 点 D              B. 点 E              C. 点 F              D. 点 G



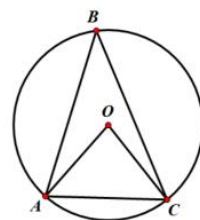
4. 将二次函数  $y = 2x^2$  的图象向右平移 1 个单位, 再向下平移 5 个单位, 得到的函数图象的表达式是（      ）

A.  $y = 2(x-1)^2 - 5$               B.  $y = 2(x-1)^2 + 5$

C.  $y = 2(x+1)^2 - 5$               D.  $y = 2(x+1)^2 + 5$

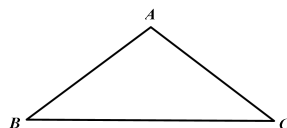
5. 如图, 点  $A, B, C$  均在  $\odot O$  上, 当  $\angle OAC=50^\circ$  时,  $\angle B$  的度数是 ( )

- A.  $25^\circ$     B.  $30^\circ$     C.  $40^\circ$     D.  $50^\circ$

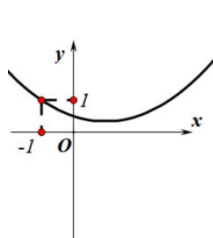


6. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=AC=5$ ,  $BC=8$ , 以  $A$  为圆心作一个半径为 3 的圆, 下列结论中正确的是 ( )

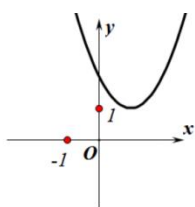
- A. 点  $B$  在  $\odot A$  内    B. 点  $C$  在  $\odot A$  上  
C. 直线  $BC$  与  $\odot A$  相切    D. 直线  $BC$  与  $\odot A$  相离



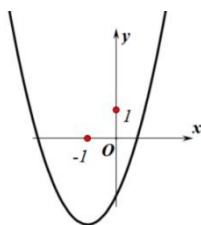
7. 二次函数  $y = x^2 + bx + b$  的图象可能是 ( )



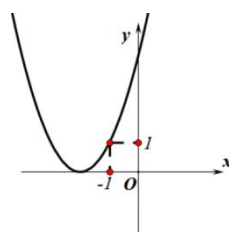
A.



B.



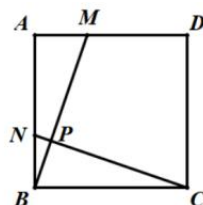
C.



D.

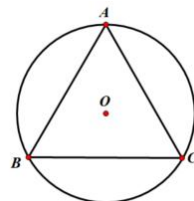
8. 如图, 在边长为 2 的正方形  $ABCD$  中, 点  $M$  在  $AD$  边上自  $A$  至  $D$  运动, 点  $N$  在  $BA$  边上自  $B$  至  $A$  运动,  $M, N$  速度相同, 当  $N$  运动至  $A$  时, 运动停止, 连接  $CN, BM$  交于点  $P$ , 则  $AP$  的最小值为 ( )

- A. 1    B. 2    C.  $\sqrt{5}-1$     D.  $\sqrt{2}$



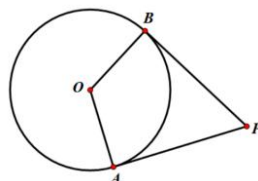
二、 填空题 (本题共 8 小题, 每小题 2 分, 共 16 分)

9. 如图,  $\widehat{AB}=\widehat{AC}$ ,  $\angle C=60^\circ$ , 则  $\angle A=$ \_\_\_\_\_.

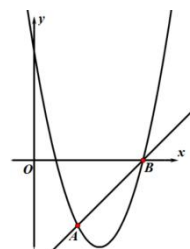


10. 请写出一个过坐标原点, 对称轴为直线  $x=1$  的抛物线的解析式\_\_\_\_\_.

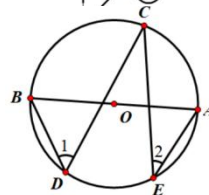
11. 如图,  $PA, PB$  是  $\odot O$  的切线,  $A, B$  为切点,  $\angle APB=60^\circ$ , 当  $OA=3$  时,  $AP$  的长为\_\_\_\_\_.



12. 如图, 直线  $y = mx + n$  与抛物线  $y = x^2 + bx + c$  交于  $A, B$  两点, 其中点  $A(2, -3)$ , 点  $B(5, 0)$ , 不等式  $x^2 + bx + c < mx + n$  的解集为\_\_\_\_\_.



13. 如图,  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $C, D, E$  都是  $\odot O$  上的点, 则  $\angle 1 + \angle 2 =$ \_\_\_\_\_.



14. 若  $x, y$  满足  $(2x + 4y - 1)(x + 2y + 2) = 0$ , 则  $x + 2y =$ \_\_\_\_\_.

15. 超市销售的某商品进价 10 元/件. 在销售过程中发现, 该商品每天的销售量  $y$  (件) 与售价  $x$  (元/件) 之间满足函数关系式  $y = -5x + 150$  ( $10 \leq x \leq 30$ ), 则利润  $w$  和售价  $x$  之间的函数关系为\_\_\_\_\_, 该商品售价定为\_\_\_\_\_元/件时, 每天销售该商品获利最大.

16. 已知某函数的图象过  $A(2, -1)$ ,  $B(4, 1)$  两点, 下面有四个推断:

- ①若此函数的图象为直线, 则此函数的图象经过  $(0, -3)$ ;
- ②若此函数的图象为抛物线, 且经过  $(3, -0.5)$ , 则该抛物线开口向下;
- ③若此函数的解析式为  $y = a(x - h)^2 + k$  ( $a \neq 0$ ), 且经过  $(6, 0)$ , 则  $4 < h < 5$ ;
- ④若此函数的解析式为  $y = a(x - h)^2 + k$  ( $a \neq 0$ ), 开口向下, 且  $2 < h < 4$ , 则  $a$  的范围是  $a < -\frac{1}{2}$ .

所有合理推断的序号是\_\_\_\_\_.

三、解答题(本题共 12 小题, 第 17, 18 题每题 4 分, 第 19 题 8 分, 第 20, 22, 25 题 5 分, 第 21, 23, 24, 26, 27 题 6 分, 第 28 题 7 分, 共 68 分)

17.  $x^2 = 5x$

18.  $x^2 + 6x + 7 = 0$

19. 已知二次函数  $y = -x^2 + bx + c$  图象经过点  $A(0, 3)$ ,  $B(2, 3)$

(1) 求此二次函数的解析式;

(2) 补全表格, 并根据表格中的数据用描点法画出该二次函数的图象;

$x$	...		0		2		...
$y$	...	0	3		3	0	...

(3) 当  $-1 < x < 2$  时, 直接写出  $y$  的取值范围.

20. 已知关于  $x$  的一元二次方程

$$x^2 - 3x + m - 2 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$mx^2 + (k+3)x + m - 5 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

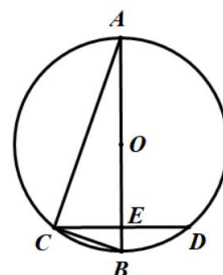
(1) 方程①有实数解, 求  $m$  的取值范围.

(2)  $m$  为满足 (1) 中条件的最大整数, 方程②有两个不等根, 求证: 方程②两根异号.

21. 如图, 已知  $AB$  为  $\odot O$  直径,  $CD$  是弦, 且  $AB \perp CD$  于点  $E$ , 连接  $AC$ 、 $BC$ .

(1) 求证:  $\angle CAB = \angle BCD$ ;

(2) 若  $BE=1$ ,  $CD=6$ , 求  $\odot O$  的半径.



22. 在《阿基米德全集》中的《引理集》中记录了古希腊数学家阿基米德提出的有关圆的一个引理. 如图, 已知  $\widehat{AB}$ ,  $C$  是弦  $AB$  上一点

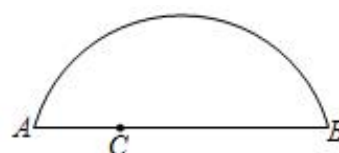
(1) 尺规作图 (保留作图痕迹, 不写作法);

①作线段  $AC$  的垂直平分线  $DE$ , 分别交  $\widehat{AB}$  于点  $D$ , 垂足为  $E$ ;

②以点  $D$  为圆心,  $DA$  长为半径作弧, 交  $\widehat{AB}$  于点  $F$

( $F, A$  两点不重合), 连接  $BF$ .

(2) 引理的结论为:  $BC=BF$ .



证明：连接  $DA, DC, DF, DB$

$\because DE$  为  $AC$  的垂直平分线

$\therefore DA=DC$

$\therefore \angle DAC=\angle DCA$

又  $\because$  四边形  $ABFD$  为圆的内接四边形

$\therefore \angle DAC+\angle \underline{\hspace{1cm}}=180^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$

又  $\because \angle DCA+\angle DCB=180^\circ$

$\therefore \angle \underline{\hspace{1cm}}=\angle \underline{\hspace{1cm}} \quad \cdots \textcircled{2}$

又  $\because AD=FD$

$\therefore \underline{\hspace{1cm}}=\underline{\hspace{1cm}} \quad \cdots \textcircled{3}$

$\therefore \angle ABD=\angle DBF$

$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BFD \text{ (AAS)}$

$\therefore BC=BF.$

23. 已知二次函数的解析式为  $y = x^2 - 2kx + k^2 - 2$ .

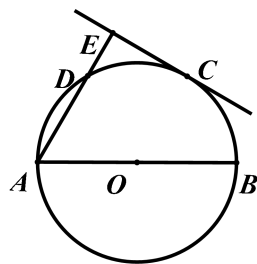
(1) 求该二次函数的顶点坐标 (用含  $k$  的式子表示) ;

(2) 若已知  $A(-1, -1)$ ,  $B(3, 0)$ , 该二次函数的图象和线段  $AB$  有两个交点, 结合函数图象, 求  $k$  的取值范围.

24. 如图, 已知  $AB$  为  $\odot O$  的直径,  $D$  是  $\odot O$  上的一点, 且点  $C$  是  $\widehat{DB}$  的中点, 过点  $C$  作  $CE \perp$  直线  $AD$  于点  $E$ .

(1) 求证: 直线  $CE$  是  $\odot O$  的切线;

(2) 连接  $AC$ , 过点  $O$  作  $OF \perp AC$  于  $F$ , 延长  $FO$  交  $\odot O$  于  $M$ , 若  $B$  为  $\widehat{CM}$  的中点, 半径为 4, 求  $OF$  的长



25. 如图 1，斜坡与水平面夹角 $\alpha=30^\circ$ ．为了对这个斜坡上的绿地进行喷灌，在斜坡底端安装了一个喷头 $A$ ，喷头 $A$ 喷出的水柱在空中走过的曲线可以看作抛物线的一部分．如图 2，当水柱与 $A$ 水平距离为 4 米时，达到最高点 $D$ ， $D$ 与水平线 $AC$ 的距离为 4 米．

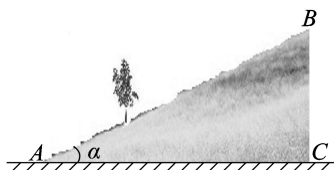


图 1

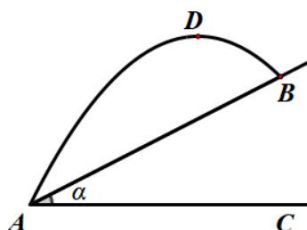


图 2

- (1) 在图 2 中建立平面直角坐标系，求水柱所在的抛物线的解析式（不需要写出自变量取值范围）；
- (2) 若斜坡上有一棵高 2.5 米的树，它与喷头 $A$ 的水平距离为 2 米，通过计算判断从 $A$ 喷出的水柱能否越过这棵树．

26. 已知点 $P(3,1)$ ,  $Q(0,b)$ 是抛物线 $C: y = mx^2 - (4m - 1)x + 3m - 2$  与直线 $l: y = kx + b$ 的公共点，

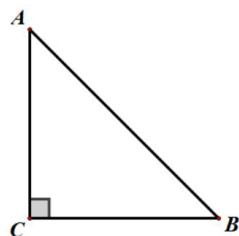
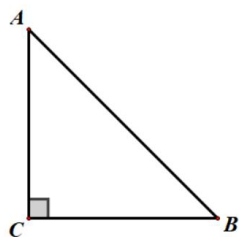
- (1) 当抛物线 $C$ 的对称轴为直线 $x = 1$  时，求 $b$ 的值；
- (2) 已知 $k < 0$ ，抛物线上两点的坐标分别为 $M(\frac{1}{2}, y_1)$ ,  $N(4, y_2)$ ，试比较 $b, y_1, y_2$ 三者之间的大小关系．

27. 如图,  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $CA = CB$ , 线段  $CA$  绕点  $C$  逆时针旋转  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ), 得到线段  $CD$ , 作  $\angle ACD$  的角平分线交  $BD$  于点  $M$ , 交  $AD$  于点  $N$ .

(1) 当  $\alpha = 60^\circ$  时, 根据题意补全图形;

(2) 当  $\alpha = 60^\circ$  时, 求  $\angle CMB$  的度数;

(3) 当  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  时, 用等式表示线段  $BM$ ,  $CN$  之间的数量关系, 并证明.



28. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中, 给定线段 $AB$ 和点 $P$ , 若满足 $PA < AB < PB$ 或者 $PB < AB < PA$ , 则称点 $P$ 为线段 $AB$ 的偏序点.

(1) 已知点 $A(2,0)$ ,

① 在点 $B_1(-1,0), B_2(1, \sqrt{3}), B_3(2,3), B_4(3, -1)$ 中, 是线段 $OA$ 的偏序点的有\_\_\_\_\_;

② 若直线 $l: y = x + b$ 上存在线段 $OA$ 的偏序点, 求 $b$ 的取值范围.

(2) 已知点 $M(-1,0), N(0, \sqrt{3})$ ,  $\odot C$ 是以 1 为半径的圆, 并且圆心 $C$ 在 $x$ 轴上运动, 若线段 $MN$ 上的点均为 $\odot C$ 的某条直径的偏序点, 直接写出点 $C$ 的横坐标 $c$ 的取值范围.

