

宝安中学初中部九年级上期末模拟试卷答案及解析

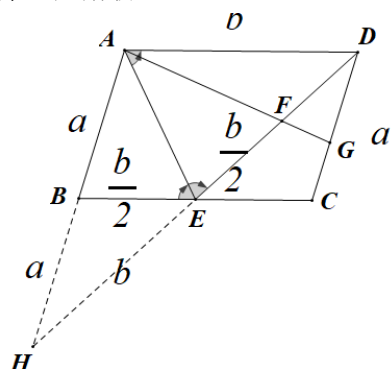
深圳市新安中学（集团）初中部 柯瑞 2022. 12. 17

班级: _____ 姓名: _____ 学号: _____ 家长签名: _____ 成绩: _____

一、选择题:(每小题 3 分, 共 30 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	C	B	A	B	B	A	A	D

第 9 题解析:



9. 延长 AB 、 DE 交于点 H ,
 $\triangle BHE \cong \triangle CDE$, 设 $AB = CD = a$
 $AD = BC = b$, 则 $BE = EF = \frac{b}{2}$,
 $BH = CD = a$, 易证 $\angle DAE = \angle AEB = \angle AED$
 $DE = AD = b = EH$, $DF = \frac{b}{2}$, $HF = \frac{3b}{2}$
 易证 $\triangle AFH \sim \triangle GFD$, $AF : FG = HF : DF = 3$

第 10 题: 策略 1: 解 $\triangle BEF$ + 勾股定理

方法 1: 如图 1, 作 $FG \perp AB$ 于 G , 则 $DF = BG = \sqrt{2}$, 设 $EG = x$, 则 $AE = 2\sqrt{2} - x = EF$,

在 $Rt\triangle EFG$ 中, $x^2 + (\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2} - x)^2$, $x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $BE = x + \sqrt{2} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$.

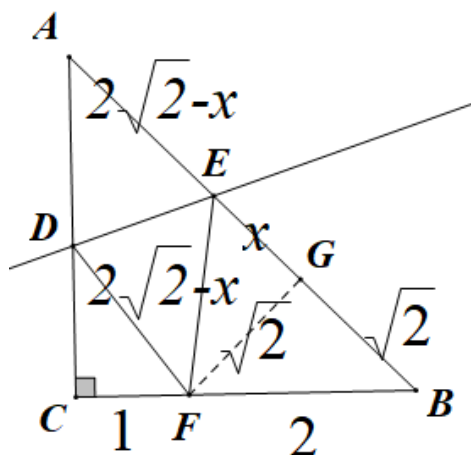


图 1

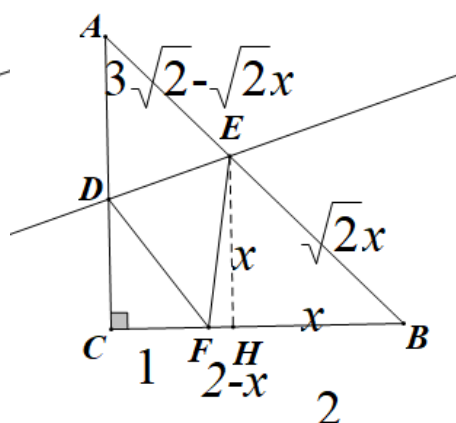


图 2

方法 2: 如图 2, 作 $EH \perp BF$ 于 H , 设 $EH = x = BH$, 则 $BE = \sqrt{2}x$, $AE = 3\sqrt{2} - x = EF$, $HF = 2 - x$

在 $Rt\triangle EFH$ 中, $x^2 + (2 - x)^2 = (3\sqrt{2} - \sqrt{2}x)^2$, $x = \frac{7}{4}$, $BE = \sqrt{2}x = \frac{7\sqrt{2}}{4}$.

策略 2: 十字架模型 + 三角函数+勾股定理

连接 AF 交 DE 于点 K, 则 AO=OF, DE⊥AF, 过 E 作 EH⊥AC 于 H, 则 $\angle DEH = \angle CAF$, $\tan \angle DEH = \tan \angle CAF = \frac{1}{3}$, 设 $DH=a$, $EH=3a=AH$, $AE=3\sqrt{2}a$, $AD=4a=DF$, $CD=3-4a$, 在

Rt△DCF 中, $1^2 + (3-4a)^2 = (4a)^2$, $a = \frac{5}{12}$, $AE = 3\sqrt{2}a = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, $BE = 3\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$

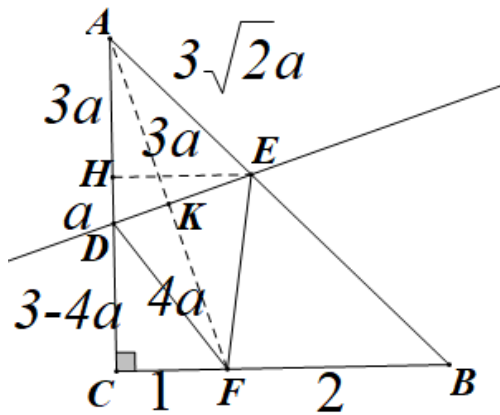


图 3

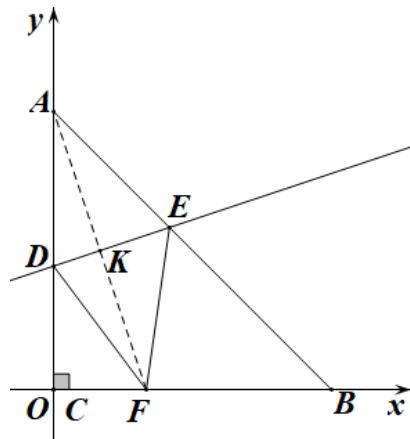


图 4

策略 3: 建立平面直角坐标系, 直线 AF、DE 均可求, E 点坐标可求, 从而求出 BE.

二、填空题

11. $\frac{5}{2}$; 12. 7.5m 13. 5; 14. 6 ; 15. 20.

15 题解析

方法 1: 三角函数+相似

如图 1, 设 $\angle ADE = \alpha$, 则 $\angle DGQ = \angle GFC = \alpha$, $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, 设 $DQ=x$, $QG=2x$, $DG=\sqrt{5}x$,

$CG=7-\sqrt{5}x$, 由 $\cos \alpha = \frac{7-\sqrt{5}x}{2x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x=\sqrt{5}$, $S=(2x)^2=20$ (或 $\triangle DQG \sim \triangle GCF$)

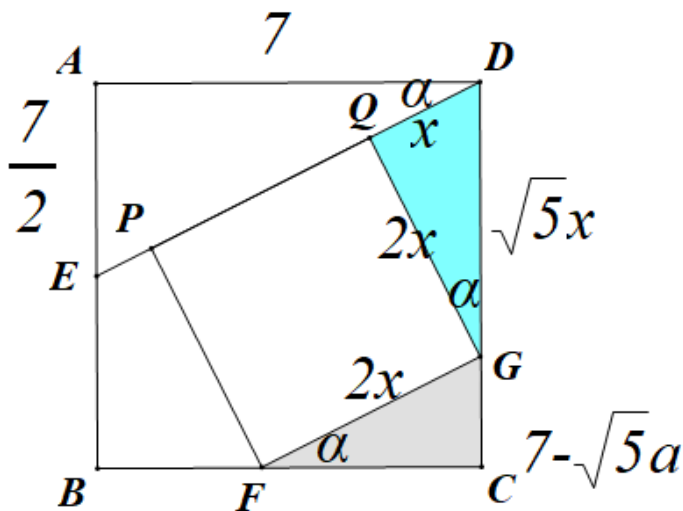
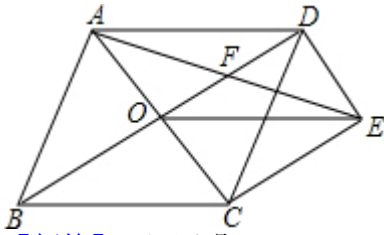


图 1



【解答】(1) 证明: $\because DE \parallel AC, DE = OC, \therefore$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形.

$\because OE = CD, \therefore$ 平行四边形 $OCED$ 是矩形,

$\therefore \angle COD = 90^\circ, \therefore AC \perp BD, \therefore \square ABCD$ 是菱形;

(2) 解: \because 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore OA = OC, CD = AB = BC = 4, AC \perp BD, \because \angle ABC = 60^\circ,$

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AC = AB = 4, \therefore OA = OC = 2,$

在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中, 由勾股定理得: $OD = \sqrt{CD^2 - OC^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3},$

由 (1) 可知, 四边形 $OCED$ 是矩形,

$\therefore CE = OD = 2\sqrt{3}, \angle OCE = 90^\circ,$

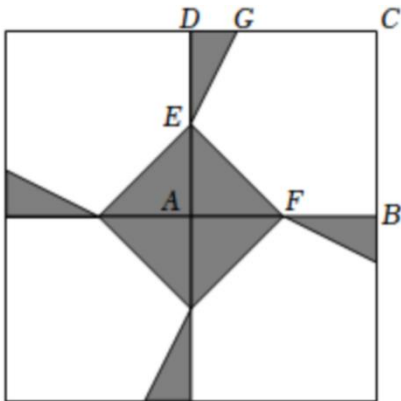
$\therefore AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7},$

20. 如图, 一个边长为 $8m$ 的正方形花坛由 4 块全等的小正方形组成. 在小正方形 $ABCD$ 中, 点 G, E, F 分别在 CD, AD, AB 上, 且 $DG = 1m, AE = AF = x$, 在 $\triangle AEF, \triangle DEG$, 五边形 $EFBCG$ 三个区域上种植不同的花卉, 每平方米的种植成本分别是 20 元、20 元、10 元.

(1) 当 $x = 2$ 时, 小正方形 $ABCD$ 种植花卉所需的费用;

(2) 试用含有 x 的代数式表示五边形 $EFBCG$ 的面积;

(3) 当 x 为何值时, 大正方形花坛种植花卉所需的总费用是 715 元?



【解答】解: (1) 若 $x = 2$, 则 $DE = 2$,

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AE \times AF = 2, S_{\triangle DFG} = \frac{1}{2} DG \times DF = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1,$$

$$\therefore S_{\text{五边形 } EFBCG} = S_{\text{正方形 } ABCD} - S_{\triangle AEF} - S_{\triangle DFG} = 16 - \frac{1}{2} \times 4 - 2 + \frac{1}{2} \times 1 = 13.$$

\therefore 所需费用为: $20 \times 2 + 20 \times 1 + 10 \times 13 = 190$ (元);

(2) 设 $AE = AF = x$ 米, 则 $DF = (4 - x)$ 米.

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AE \times AF = \frac{1}{2} x^2, S_{\triangle DFG} = \frac{1}{2} DG \times DF = \frac{1}{2} \times 1 \times (4 - x) = 2 - \frac{1}{2} x,$$

$$\therefore S_{\text{五边形 } EFBCG} = S_{\text{正方形 } ABCD} - S_{\triangle AEF} - S_{\triangle DFG} = 16 - \frac{1}{2} x^2 - 2 + \frac{1}{2} x = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + 14,$$

$$(3) \text{ 根据题意得 } 4 \times \left[20 \times \frac{1}{2} x^2 + 20 \times \left(2 - \frac{1}{2} x \right) + 10 \times \left(-\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + 14 \right) \right] = 715,$$

$$\text{整理得 } 4x^2 - 4x + 1 = 0, \text{ 解得 } x_1 = x_2 = \frac{1}{2}.$$

答: 当 $AE = AF = \frac{1}{2}$ 米时, 正方形花坛种植花卉所需的总费用是 715 元.

21. (2022•石城县模拟)【温故知新】黄金分割是一种最能引起美感的分割比例，具有严格的比例性、艺术性、和谐性，蕴藏着丰富的美学价值．我们知道：如图 1，点 C 把线段 AB 分成两部分，如果 $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$ ，那么称点 C 为线段 AB 的黄金分割点．

【问题发现】如图 1，请直接写出 AC 与 CB 的比值是 _____．

【问题探究】如图 2，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=2$ ， $BC=1$ ，在 BA 上截取 $BD=BC$ ，再在 AC 上截取 $AE=AD$ ，则 $\frac{AE}{AC}$ 的值为 _____．

【问题解决】

如图 3，用边长为 6 的正方形纸片进行如下操作：对折正方形 $ABDE$ 得折痕 MN ，连接 EN ，将 AE 折叠到 EN 上，点 A 对应点 H ，得折痕 CE ，试说明： C 是 AB 的黄金分割点．

【拓展延伸】

如图 4，正方形 $ABCD$ 中， M 为对角线 BD 上一点，点 N 在边 CD 上，且 $CN < DN$ ，当 N 为 CD 的黄金分割点时， $\angle AMB = \angle ANB$ ，连 NM ，延长 NM 交 AD 于 E ，请用相似的知识求出 $\frac{DE}{AE}$ 的值为 _____．

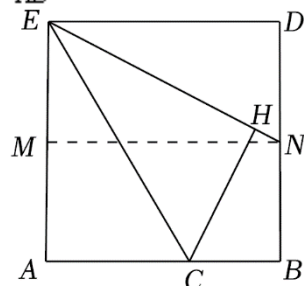


图3

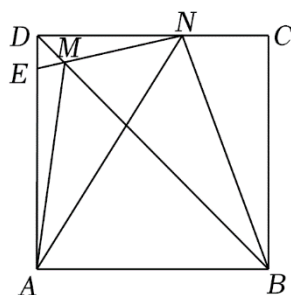


图4

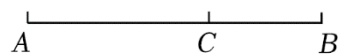


图1

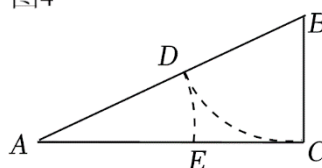


图2

【解答】【问题发现】解：∵点 C 为线段 AB 的黄金分割点，

$$\therefore \frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \therefore \frac{AC}{CB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

【问题探究】解：∵ $\angle C=90^\circ$ ， $AC=2$ ， $BC=1$ ， $\therefore AB = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$ ，

∵ $BD=BC=1$ ， $\therefore AE=AD=AB-BD=\sqrt{5}-1$ ， $\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，

【问题解决】

解法 1：如图 3，设 EC 与 MN 交于点 P ，

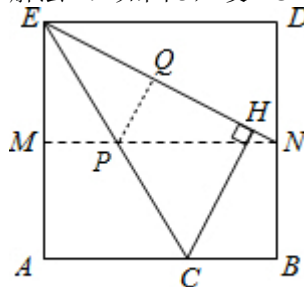


图3

∵ $MN \parallel AB$ ，且 M 为 EA 的中点，

$$\therefore \frac{NP}{AC} = \frac{EM}{EA} = \frac{1}{2},$$

过点 P 作 $PQ \perp EN$,

$\because EC$ 平分 $\angle AEN$,

$\therefore PM = PQ$,

设 $PM = PQ = \frac{1}{2}AC = x$,

$$\therefore PN = MN - PM = 6 - x,$$

$$\therefore EN = \sqrt{DE^2 + DN^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore \sin \angle ENM = \frac{PQ}{PN} = \frac{EM}{EN},$$

$$\text{即 } \frac{x}{6-x} = \frac{3}{3\sqrt{5}},$$

$$\text{解得 } x = \frac{3\sqrt{5}-3}{2},$$

经检验 $x = \frac{3\sqrt{5}-3}{2}$ 是原方程的解,

$$\therefore AC = 2x = 3\sqrt{5} - 3,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{3\sqrt{5}-3}{6} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{BC}{AC},$$

故点 C 为 AB 的黄金分割点;

解法 2. 勾股定理

连接 CN , 设 $AC = x = CH$, $EH = AE = 6$, $EN = 3\sqrt{5}$, $HN = 3\sqrt{5} - 6$, $BN = 3$, $BC = 6 - x$

$$\therefore CN^2 = CH^2 + HN^2 = BC^2 + BN^2, x^2 + (3\sqrt{5} - 6)^2 = 3^2 + (6 - x)^2, x = 3\sqrt{5} - 3$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{3\sqrt{5}-3}{6} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

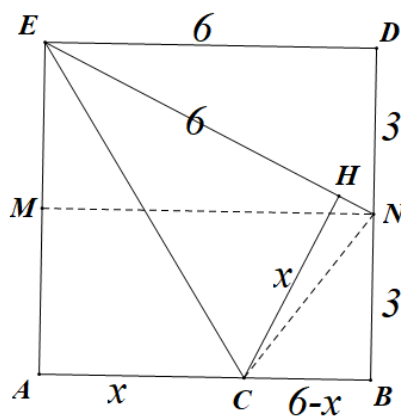


图 2

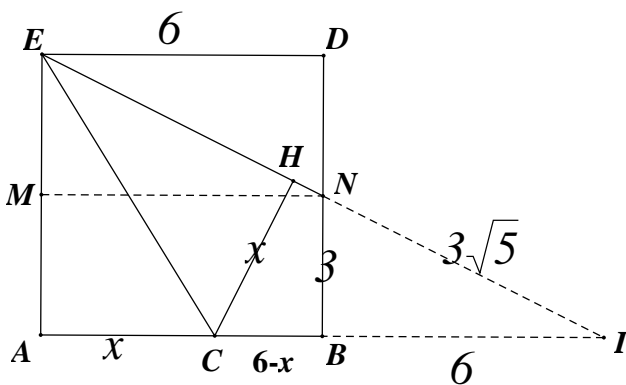


图 3

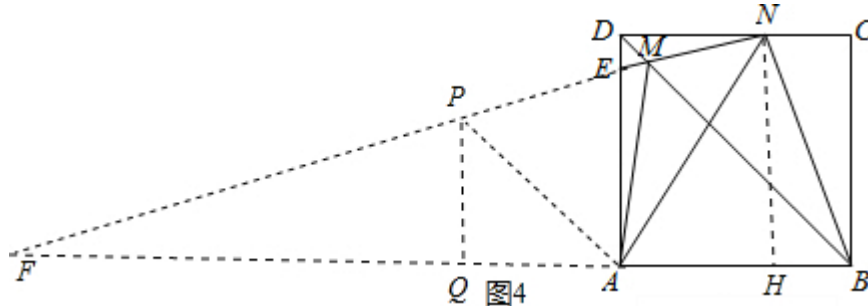
解法 3 倍长中线+反 A 相似

如图 3, 延长 EN 、 AB 交于点 I , 则 $\triangle EDN \cong \triangle IBN$

$$\text{则 } \sin I = \frac{x}{6+6-x} = \frac{3}{3\sqrt{5}}, x = 3\sqrt{5} - 3$$

(或者 $\triangle IBN \sim \triangle IHC$)

【拓展延伸】解：如图4，延长 NE 交 AB 延长线于 F ，过点 A 作 $AP \perp AN$ 于 P ，



过点 P 作 $PQ \perp FB$ 于 Q ，过 N 作 $FH \perp FB$ 于 H ，

$$\because \angle AMB = \angle ANB,$$

\therefore 点 A 、 M 、 N 、 B 四点共圆，

$$\because \angle DBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ENA = 45^\circ, \text{ (同为 } \widehat{AM} \text{ 所对的圆周角)}$$

$$\text{又} \because \angle PAN = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle PAN$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore PA = AN,$$

$$\because PQ \parallel AD,$$

$$\therefore \angle QPA = \angle PAD,$$

$$\because \angle PAD + \angle DAN = 90^\circ, \angle DAN + \angle NAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAD = \angle NAB,$$

$$\therefore \angle QPA = \angle NAB,$$

$$\text{又} \because \angle PQA = \angle AHN = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PQA \cong \triangle AHN \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AQ = NH = BC = CD, PQ = AH = DN,$$

$\therefore N$ 为 CD 的黄金分割点，

$$\therefore \text{设 } DN = \sqrt{5} - 1, \text{ 则 } CD = 2,$$

$$\text{设 } FQ = x,$$

$$\because PQ \parallel NH,$$

$$\therefore \triangle FPQ \sim \triangle FNH,$$

$$\therefore \frac{FQ}{FH} = \frac{PQ}{NH} = \frac{DN}{CD},$$

$$\text{即 } \frac{x}{x+2+\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{解得 } x = 3 + \sqrt{5},$$

经检验 $x = 3 + \sqrt{5}$ 是方程的解，

$$\therefore AF = FQ + AQ = 3 + \sqrt{5} + 2 = 5 + \sqrt{5},$$

$$\because AF \parallel DN,$$

$$\therefore \angle F = \angle DNE, \angle FAD = \angle NDA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle NDE \sim \triangle FAE,$$

$$\therefore \frac{DE}{EA} = \frac{DN}{AF} = \frac{\sqrt{5}-1}{5+\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}-5}{10},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3\sqrt{5}-5}{10}.$$

【点评】本题主要考查相似三角形的判定和性质，全等三角形的全等和性质，等腰直角三角形的性质等知识点，利用辅助线构造相似三角形得线段比例关系是解题的关键。

22. 数学小组在探究题目：矩形 $ABCD$ 中， $\frac{AB}{BC} = \frac{k}{2}$ ($k > 1$)，点 E 是边 BC 的中点，连接 AE ，过点 E 作 AE 的垂线 EF ，与矩形的外角平分线 CF 交于点 F 。如图 (1)，当 $k=2$ 时，求证： $AE=EF$ ；

【特例证明】

(1) 小明在实验操作过程中发现：如图，在 BA 上截取 $BH=BE$ ，连接 EH 。构造三角形的全等可以解决问题。请帮助小明画好辅助线完成证明过程。

【类比探究】

(2) 如图 (2)，当 $k \neq 2$ 时，求 $\frac{AE}{EF}$ 的值 (用含 k 的式子表示)；

【拓展运用】

(3) 如图 (3)，当 $k=3$ 时， P 为边 CD 上一点，连接 AP ， PF ， $\angle PAE=45^\circ$ ， $PF=\sqrt{5}$ ，求 BC 的长。

【拓展延伸】

(4) 如图 (4)，当题目变为：平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle B=60^\circ$ ， $\frac{AB}{BC} = \frac{k}{2}$ ($k > 1$)，点 E 是边 BC 的中点，连接 AE ，过点 E 作 $\angle AEF=60^\circ$ ，与平行四边形的外角平分线 CF 交于点 F 。则 $\frac{AE}{EF}$ 的值 (用含 k 的式子表示)

【点评】本题来源于 2022 年襄阳中考，也是 2022 年呼和浩特中考类似题，只有第 4 问是命题人增加的，其他完全一样，下面笔者主要解析一下第三问和第四问，第四问实际上更简单。

【解答】(1) 证明：如图，在 BA 上截取 $BH=BE$ ，连接 EH 。

$\because k=2, \therefore AB=BC$ 。 $\because \angle B=90^\circ$ ， $BH=BE$ ， $\therefore \angle 1=\angle 2=45^\circ$ ，
 $\therefore \angle AHE=180^\circ - \angle 1=135^\circ$ ， $\because CF$ 平分 $\angle DCG$ ， $\angle DCG=90^\circ$ ，
 $\therefore \angle 3=\frac{1}{2}\angle DCG=45^\circ$ ， $\therefore \angle ECF=\angle 3+\angle 4=135^\circ$ ，

$\because AE \perp EF$ ， $\therefore \angle 6+\angle AEB=90^\circ$ ， $\because \angle 5+\angle AEB=90^\circ$ ， $\therefore \angle 5=\angle 6$ ，
 $\because AB=BC$ ， $BH=BE$ ， $\therefore AH=EC$ ， $\therefore \triangle AHE \cong \triangle ECF$ (ASA)， $\therefore AE=EF$ ；

(2) 解：在 BA 上截取 $BH=BE$ ，连接 EH 。

$\because \angle B=90^\circ$ ， $BH=BE$ ， $\therefore \angle BHE=\angle BEH=45^\circ$ ， $\therefore \angle AHE=135^\circ$ ，

$\because CF$ 平分 $\angle DCG$ ， $\angle DCG=90^\circ$ ，

$\therefore \angle DCF=\frac{1}{2}\angle DCG=45^\circ$ ， $\therefore \angle ECF=135^\circ$ ，

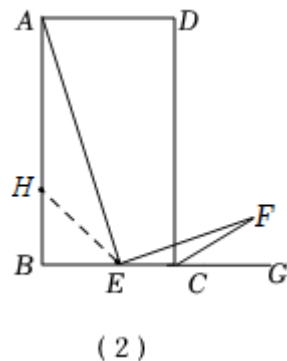
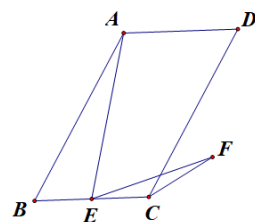
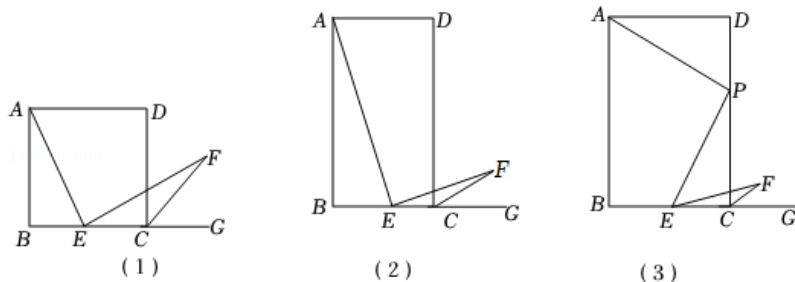
$\because AE \perp EF$ ， $\therefore \angle FEC+\angle AEB=90^\circ$ ，

$\because \angle BAE+\angle AEB=90^\circ$ ， $\therefore \angle BAE=\angle FEC$ ，

$\therefore \triangle AHE \sim \triangle ECF$ ， $\therefore \frac{AE}{EF} = \frac{AH}{CE}$ ， $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{k}{2}$ ， E 是 BC 边的中点，

$\therefore EC=HB=\frac{1}{2}BC$ ， $\therefore AH=AB-\frac{1}{2}BC=(\frac{k}{2}-\frac{1}{2})BC$ ，

$\therefore \frac{AE}{EF} = k-1$ ；



(3) 如图 (2), 引例: 在正方形 $ABCD$ 中, $EG \perp AC$,
 设 $AB=3$, $BE=1$, 则 $EC=2$,

$$\because \angle ACE=45^\circ, \therefore EG=GC=\sqrt{2}, \because AC=3\sqrt{2}, \therefore AG=2\sqrt{2},$$

$$\therefore \tan \angle EAG=\frac{1}{2}, \tan \angle BAE=\frac{1}{3},$$

以 A 为旋转中心, $\triangle ADP$ 绕 A 点旋转 90° 到 $\triangle APH$,

$$\because k=3, \therefore \frac{AB}{BC}=\frac{3}{2},$$

设 $AB=3a$, 则 $BC=2a$, 由旋转可得 $\angle P'AP=90^\circ$,
 连接 PE , HE , 延长 PH 交 CD 于点 G , 连接 EG ,

$$\because AH=AD=2a, \therefore BH=a,$$

$$\because E \text{ 是 } BC \text{ 的中点}, \therefore BE=a,$$

$$\therefore \tan \angle BAE=\frac{1}{3}, \because \angle EAP=45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE+\angle DAP=45^\circ, \therefore \tan \angle DAP=\frac{1}{2},$$

$$\therefore DP=a, \therefore PC=2a,$$

$$\therefore AP=\sqrt{5}a, PE=\sqrt{5}a, AE=\sqrt{10}a,$$

$\therefore \triangle APE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle APE=90^\circ, \therefore AE \perp EF,$$

$$\therefore \angle PEF=\angle PEA=45^\circ,$$

过点 F 作 $FQ \perp EG$ 交于 Q ,

$$\because CF \text{ 平分 } \angle PCG, \therefore \angle FCQ=45^\circ,$$

$$\because \angle FEQ+\angle AEB=90^\circ, \angle BAE+\angle AEB=90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEQ=\angle BAE,$$

$$\therefore \frac{1}{3}=\frac{FQ}{FQ+a}, \therefore FQ=\frac{1}{2}a, \therefore EQ=\frac{3}{2}a, \therefore EF=\frac{\sqrt{10}}{2}a,$$

$$\therefore \frac{PE}{AE}=\frac{EF}{PE}, \therefore \triangle PAE \sim \triangle FPE,$$

$$\therefore \angle APE=\angle PFE=90^\circ, \therefore PF=EF=\frac{1}{2}\sqrt{10}a,$$

$$\because PF=\sqrt{5}, \therefore \frac{1}{2}\sqrt{10}a=\sqrt{5}, \therefore a=\sqrt{2}, \therefore BC=2\sqrt{2}.$$

解法 2: 设 $BE=EC=a$, 则 $AE=\sqrt{10}a$,

延长 AP 、 EF 交于 Q ,

$$\because \angle PAE=45^\circ, AE \perp EF,$$

$$\therefore \triangle AEQ \text{ 是等腰直角三角形}, \therefore AE=EQ,$$

作 $QM \perp BC$ 交 N ,

$$\because \angle AEB+\angle QEM=90^\circ, \angle AEB+\angle BAE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE=\angle QEM,$$

$$\because AE=EQ,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle EMQ \text{ (AAS)},$$

$$\therefore EM=AB=3a, MC=EM-EC=2a,$$

作 $QN \perp CD$ 交 BC 延长线于 M ,

\therefore 四边形 $NCMQ$ 是矩形,

$$\therefore QN=CM=AD=2a,$$

$$\because \angle APD=\angle NPQ, \angle D=\angle PNQ,$$

$$\therefore \triangle ADP \cong \triangle QNP \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AP=PQ,$$

$$\therefore EF=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}EQ,$$

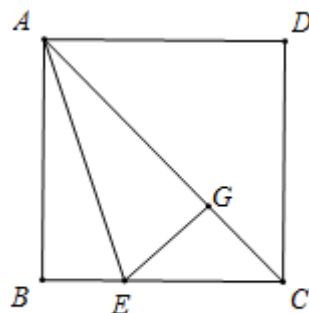
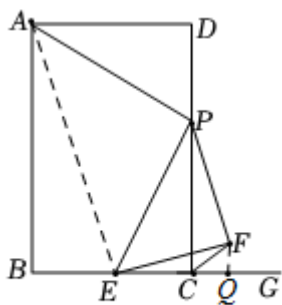


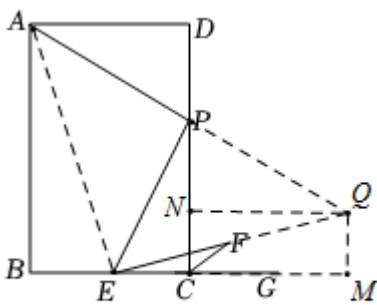
图 (2)

$$\therefore EF=FQ, PF=\frac{1}{2}AE,$$

$$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{10}a=\sqrt{5}, \therefore a=\sqrt{2}, \therefore BC=2\sqrt{2}.$$



(3)



(3)

解法 3. “12345 模型”

$k=3$ 时, 设 $BE=x=CE$, 则 $AB=3x$, $AE=\sqrt{10}x$, $PE=\frac{\sqrt{10}}{2}x$, $\tan \angle BAE=\frac{1}{3}$, $\angle PAE=45^\circ$, \tan

$\angle DAP=\frac{1}{2}$, 从而 $DP=x$, $CP=2x$, 可证 $\triangle ADP \cong \triangle PCE$, 从而 $AP=PE=\sqrt{5}x$, $\angle AEP=45^\circ$, \angle

$PEF=45^\circ$, $PF=\sqrt{5}$, 可 $\triangle PEF$ 为等腰直角三角形, $\sqrt{5}x=\frac{\sqrt{10}}{2}x$, $x=\sqrt{2}$, $BC=2x=2\sqrt{2}$