

# 2022~2023 学年度初三第一学期期末考试

## 数学试题参考答案及评分说明

**说明：**如果考生的解答与本解答不同，参照本说明酌情给分。

### 一、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. D    2. A    3. A    4. D    5. B    6. C

### 二、填空题（每小题 3 分，共 30 分）

7.  $x_1=0, x_2=2$     8.  $(4\sqrt{5}-4)$     9.  $y=-2x^2+3$     10.  $\frac{2}{5}$     11.  $4\sqrt{2}\pi$   
12.  $2\sqrt{10}$     13.  $-\frac{3}{5}$     14. 26    15.  $\frac{3}{16}$     16. 2

### 三、解答题（本大题共有 10 题，计 102 分）

17. （本题满分 12 分）：（1）解：原式  $= 3 - 1 + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$  .....3 分

$$= 3 - 1 + \frac{3}{2} \text{ .....4 分}$$

$$= \frac{7}{2} \text{ .....6 分}$$

（2）解：  $x^2 - 4x + 4 = 7$   
 $(x-2)^2 = 7$  .....2 分  
 $x - 2 = \pm\sqrt{7}$  .....4 分  
 $\therefore x_1 = 2 + \sqrt{7} \quad x_2 = 2 - \sqrt{7}$  .....6 分

18. （本题满分 8 分）

解：（1） $\because$  关于  $x$  的一元二次方程  $x^2 + 4x + k = 0$  有两个实数根  
 $\therefore \Delta = 16 - 4k \geq 0$  .....2 分  
 $\therefore k \leq 4$  .....4 分  
（2）取  $k=3$  或  $4$  .....5 分  
若  $k=3$  时  $x_1 = -1, x_2 = -3$   
或若  $k=4$  时  $x_1 = x_2 = -2$  .....8 分  
( $k=3$  或  $k=4$  写一种情况即可)

19. （本题满分 8 分）

解：（1）③ .....2 分  
（2）60 .....4 分  
（3）样本中学习时间不少于 4 小时的频数：  $24 + 50 + 16 + 36 + 6 + 10 = 142$   
频率：  $\frac{142}{200} = 0.71$  .....6 分

估计该校双休日学习时间不少于 4 小时的人数为  $1200 \times 0.71 = 852$  .....8 分

20. (本题满分 8 分)

解: (1) 用树状图列举所有等可能结果如下:

(略) .....3 分

由树状图可知等可能的结果共 6 种, 其中从左到右恰好是“二十大”的有 1

种, 所以  $P(\text{从左到右恰好是“二十大”}) = \frac{1}{6}$  .....5 分

(2)  $\frac{1}{24}$  .....8 分

21. (本题满分 10 分)

(1)  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形

$\therefore BC \parallel AD \therefore \angle GAE = \angle GCB, \angle GEA = \angle GBC$

$\therefore \triangle BGC \sim \triangle EGA$  .....4 分

(2)  $\because$  四边形  $ABCD$  是平行四边形  $\therefore BC = AD$

设  $BC = AD = 2x$

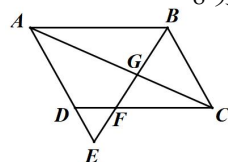
由 (1) 得  $\triangle BGC \sim \triangle EGA$

$\therefore \frac{BC}{AE} = \frac{CG}{AG} = \frac{2}{3}$  .....6 分

$\therefore AE = 3x \therefore DE = x$

同 (1) 证  $\triangle DEF \sim \triangle CBF$  .....8 分

$\therefore \frac{DF}{CF} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$  .....10 分



22. (本题满分 10 分)

解: (1)  $\textcircled{1}\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$  或  $\textcircled{1}\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{2}$  或  $\textcircled{2}\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$  .....2 分

以  $\textcircled{1}\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$  为例证明

证明: 连接  $OB$

$\because AB = BC \therefore \angle C = \angle A = 30^\circ$

$\therefore \angle AOB = 2\angle C = 60^\circ$ , .....4 分

$\therefore \angle OBA = 180^\circ - \angle A - \angle AOB = 90^\circ$

$\therefore AB$  与  $\odot O$  相切 .....6 分

(2) 作  $OH \perp BC$  于  $H$

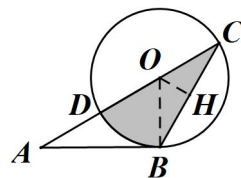
在  $Rt\triangle OAB$  中  $\because \tan A = \frac{OB}{AB}$

$\therefore OB = AB \tan A = 2\sqrt{3}$

$\therefore OC = OB = 2\sqrt{3}$

在  $Rt\triangle OCH$  中  $OH = OC \sin C = \sqrt{3} \quad CH = OC \cos C = 3$

$\therefore BC = 2CH = 6 \therefore S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} BC \times OH = 3\sqrt{3}$  .....8 分



$$\therefore S_{\text{扇形} ODB} = \frac{60}{360} \pi \times (2\sqrt{3})^2 = 2\pi \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle OBC} + S_{\text{扇形} ODB} = 3\sqrt{3} + 2\pi \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

23. (本题满分 10 分)

解: 作  $AE \perp CD$  于  $E$ , 设  $DE = xm$   $\cdots \cdots 1$  分

在  $Rt\triangle ADE$  中  $\angle DAE = 26.6^\circ$

$$\therefore \tan \angle DAE = \frac{DE}{AE}$$

$$\therefore AE = \frac{DE}{\tan \angle DAE} = 2x \cdots \cdots 3 \text{ 分}$$

在  $Rt\triangle ACE$  中  $\angle ACE = 90^\circ - \angle ABC = 37^\circ$

$$\therefore CE = \frac{AE}{\tan \angle ACE} = \frac{8}{3}x \cdots \cdots 5 \text{ 分}$$

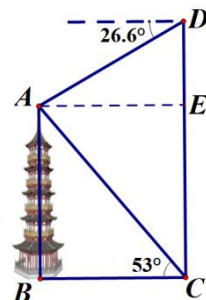
$$\therefore CD = DE + EC$$

$$\therefore x + \frac{8}{3}x = 110 \quad \text{解得} \quad x = 30 \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore AB = CE = \frac{8}{3}x = 80 \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$BC = AE = 2x = 60 \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

答: 古塔的高度为  $80m$ , 观测点到古塔的水平距离为  $60m$   $\cdots \cdots 10$  分



24. (本题满分 10 分)

$$\begin{aligned} \text{解: (1) 由题意可得, } y &= 60 - \frac{2}{0.5}(x-12) = 60 - 4(x-12) \\ &= 60 - 4x + 48 = -4x + 108 \cdots \cdots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 由题意可得, } W &= y(x-8) = (-4x+108)(x-8) \\ &= -4x^2 + 140x - 864 \cdots \cdots 6 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$W = -4x^2 + 140x - 864 = -4\left(x - \frac{35}{2}\right)^2 + 361 \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{35}{2} \text{ 时, 利润达到最大} \cdots \cdots 9 \text{ 分}$$

$$\text{答: 当 } x \text{ 为 } \frac{35}{2} \text{ 时, 利润达到最大} \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

25. (本题满分 12 分)

(1)  $\because$  由折叠可得  $AC=OC$

$\because OC=OA \quad \therefore AC=OC=OA \quad \therefore \triangle OAC$  是等边三角形

$\therefore \angle CAO=60^\circ$  .....1 分

同理:  $\angle BAO=60^\circ$  .....2 分

$\therefore \angle CAB=\angle CAO+\angle BAO=120^\circ$  .....3 分

(2) 方法合理即可, 这里提供两种作法供参考:

方法一: ①画全  $\odot O$ , 以点  $M$  为圆心,  $OM$  为半径画弧交  $\odot O$  于点  $B$ 、 $C$ , 连接  $MB$ 、 $MC$ .

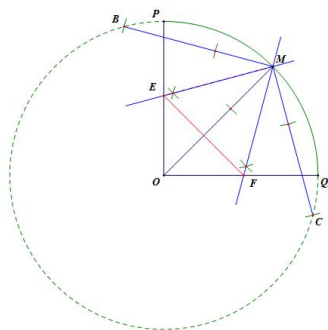
②作  $\angle BMO$ 、 $\angle CMO$  的角平分线交  $OP$ 、 $OQ$  于点  $E$ 、 $F$ .

连接  $EF$ 、 $ME$ 、 $MF$  得  $\triangle EFM$

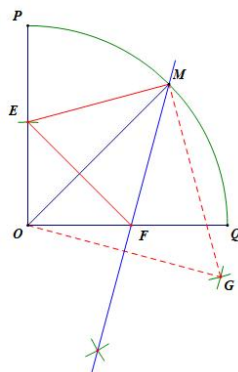
方法二: ①作等边  $\triangle OMG$ , 作  $OG$  垂直平分线交  $OQ$  于点  $F$ .

②以  $O$  为圆心  $OF$  为半径作圆交  $OP$  于点  $E$ .

连接  $EF$ 、 $ME$ 、 $MF$  得  $\triangle EFM$



作法 1



作法 2

(作图 2 分, 简要说明 1 分) .....6 分

(3)  $ON=2\sqrt{3}$  .....9 分

(4) 不变, 理由如下: .....10 分

如图, 取  $EF$  中点  $H$ , 连接  $OH$ ,  $HM$ ,  $OM$

作  $OL \perp MH$  交于点  $L$ , 设  $HN=x$ ,  $LH=y$ ,

则  $MN=2x$ ,  $EH=\sqrt{3}x$ ,  $MH=3x$

在  $Rt\triangle OEF$  中,  $\angle EOF=90^\circ$

∵  $H$  为  $FE$  的中点

$$\therefore OH = \frac{1}{2}EF = EH = \sqrt{3}x$$

在  $Rt\triangle OML$  中,  $OL^2 = OM^2 - LM^2 = 6^2 - (3x+y)^2$

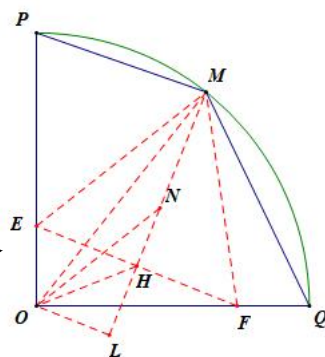
在  $Rt\triangle OHL$  中,  $OL^2 = OH^2 - LH^2 = 3x^2 - y^2$

即有  $6^2 - (3x+y)^2 = 3x^2 - y^2$  化简得  $2x^2 + xy = 6 \cdots \cdots 11$  分

在  $Rt\triangle ONL$  中,  $ON^2 = OL^2 + LN^2 = 3x^2 - y^2 + (x+y)^2$

$$= 4x^2 + 2xy = 2(2x^2 + xy) = 12$$

即  $ON = 2\sqrt{3}$ ,  $ON$  的值不变. .....12 分



26. (本题满分 14 分)

(1) ∵  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, 4)$ ,  $C$  是  $AB$  中点

$$\therefore x_c = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_c = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1 + 4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore C\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \quad \cdots \cdots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore C\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad B(2, 4), \quad D \text{ 是 } BC \text{ 中点}$$

$$\therefore x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{5}{4}, \quad y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{13}{4} \quad \therefore D\left(\frac{5}{4}, \frac{13}{4}\right) \quad \cdots \cdots 4 \text{ 分}$$

(2)  $F$  是在  $x$  轴上, 理由如下: .....5 分

$$\therefore B(2, 4), \text{ 点 } A \text{ 是 } B \text{ 关于 } y \text{ 轴的对称点} \therefore A(-2, 4)$$

$$\therefore C \text{ 是 } AB \text{ 中点}, D \text{ 是 } BC \text{ 中点} \therefore C(0, 4) \quad \therefore D(1, 4) \quad \cdots \cdots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore DE \parallel y \text{ 轴交抛物线于点 } E \therefore x_E = x_D = 1$$

$$\text{把 } x_E = 1 \text{ 代入 } y = x^2 \text{ 得, } y_E = 1 \therefore E(1, 1) \quad \cdots \cdots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore DE = 3$$

$$\therefore DE = 3EF \therefore EF = 1$$

$$\therefore DF \parallel y \text{ 轴, 且 } E(1, 1) \therefore F(1, 0)$$

$$\therefore F \text{ 是在 } x \text{ 轴上} \quad \cdots \cdots 8 \text{ 分}$$

$$(4) \because A(m, n), B(2, 4), C \text{ 是 } AB \text{ 中点} \therefore C\left(\frac{1}{2}m+1, \frac{1}{2}n+2\right)$$

$$\because D \text{ 是 } BC \text{ 中点} \therefore D\left(\frac{1}{4}m+\frac{3}{2}, \frac{1}{4}n+3\right), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\because DE \parallel y \text{ 轴交抛物线于点 } E \quad \therefore x_E = x_D = \frac{1}{4}m + \frac{3}{2}$$

$$\text{把 } x_E = \frac{1}{4}m + \frac{3}{2} \text{ 代入 } y = x^2 \text{ 得, } y_E = \left(\frac{1}{4}m + \frac{3}{2}\right)^2 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\because DE \parallel y \text{ 轴交抛物线于点 } E. \text{ 延长 } DE \text{ 至 } F, \text{ 使得 } DE = 3EF$$

$$\therefore DE = y_D - y_E, \quad EF = \frac{1}{3}DE = \frac{1}{3}y_D - \frac{1}{3}y_E$$

$$EF = y_E - y_F, \text{ 即 } y_F = y_E - EF = y_E - \frac{1}{3}y_D + \frac{1}{3}y_E = \frac{4}{3}y_E - \frac{1}{3}y_D$$

$$\because y_E = \left(\frac{1}{4}m + \frac{3}{2}\right)^2, \quad y_D = \frac{1}{4}n + 3$$

$$\therefore y_F = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}m + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}n + 3\right) = \frac{1}{12}m^2 + m - \frac{1}{12}n + 2$$

$$\because \text{点 } A(m, n) \text{ 在 } y = x^2 \text{ 上} \quad \therefore n = m^2$$

$$\therefore y_F = \frac{1}{12}m^2 + m - \frac{1}{12}n + 2 = m + 2 \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\because DF \parallel y \text{ 轴} \quad \therefore x_F = x_D = \frac{1}{4}m + \frac{3}{2}$$

$$\text{即 } b = m + 2, \quad a = \frac{1}{4}m + \frac{3}{2} \quad \therefore b - 4a = -4,$$

$$\text{综上 } b - 4a \text{ 是一个定值 } -4 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\textcircled{2} \frac{6\sqrt{17}}{17} \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$