2023年长春英俊中学中考第一次模拟·校内·数学（命题人：秋陌）

一．选择题（共8小题，满分24分，每小题3分）

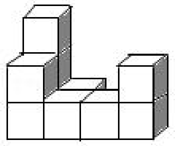
1.（3分）计算－3+（－5）的结果是（　　）

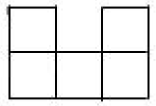
A．2　　B．8　　C．－8　　D．－2

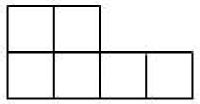
2.（3分）古代为便于纪元，乃在无穷延伸的时间中，取天地循环终始为一巡，称为元，以元作为计算时间的最大单位，1元＝129600年，其中129600用科学记数法表示为（　　）

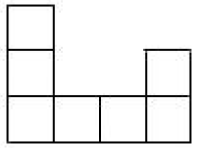
A．1.296×10^4　　B．12.96×10^4　　C．1.296×10^6　　D．1.296×10^5

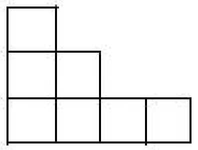
3.（3分）如图是由相同小正方体组成的立体图形，其俯视图为（　　）



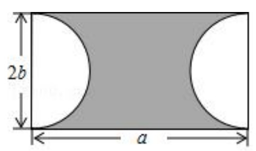
A．

B．

C．

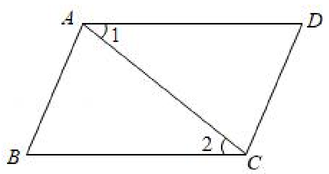
D．

4.（3分）如图，在一块长为a，宽为$2b$的长方形铁皮中，以$2b$为直径分别剪掉两个半圆，若$a=4$，$b=1$时，则剩下的铁皮的面积为（　　）（π取3）



A．5　　B．7　　C．8　　D．12

5.（3分）如图，下面推理过程正确的是（　　）



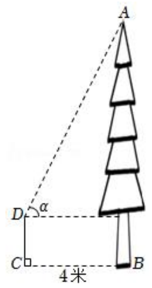
A．因为∠B＝∠BCD，所以AB∥CD

B．因为AB∥CD，所以∠1＝∠2

C．因为∠BAD+∠B＝180°，所以AD∥BC

D．因为∠1＝∠B，所以AD∥BC

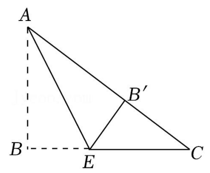
6.（3分）如图，为了测量某一垂直于地面的树高，小明站在离树4米的点C处，用测倾仪测得树顶端的仰角为α．若测倾仪离地面高CD为1.5米，则树高AB可表示为（　　）



A．（1.5+4sinα）米　　B．（$1.5+\dfrac{4}{\sin\alpha}$）米

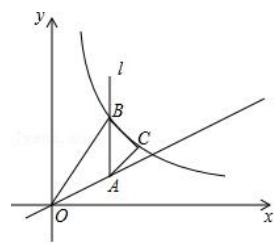
C．（1.5+4tanα）米　　D．（$1.5+\dfrac{4}{\tan\alpha}$）米

7.（3分）如图，在Rt△ABC中，∠B＝90°，AB＝3，BC＝4，将△ABC折叠，使点B恰好落在边AC上，与点B'重合，AE为折痕，则EB'的长为（　　）



A．3cm　　B．2.5cm　　C．1.5cm　　D．1cm

8.（3分）如图，已知点A是一次函数$y=\frac{1}{2}x\ (x\geqslant0)$图象上一点，过点$A$作$x$轴的垂线$l$，$B$是$l$上一点（$B$在$A$上方），在$AB$的右侧以$AB$为斜边作等腰直角三角形$ABC$，反比例函数$y=\frac{k}{x}\ (x>0)$的图象过点$B$，$C$，若△$OAB$的面积为6，则△$ABC$的面积是（　　）



A．$3\sqrt{2}$　　B．4　　C．3　　D．$2\sqrt{2}$

二．填空题（共6小题，满分18分，每小题3分）

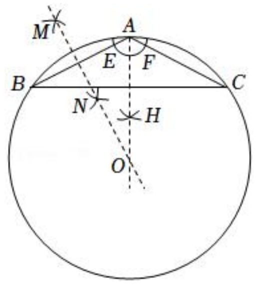
9.（3分）下列各式：①x^2+2x+1；②x^2+2x-1；③x^2-1；④x^2-6x+9．能用完全平方公式进行因式分解的是 ______．（填序号即可）

10.（3分）若关于x的不等式$ax>b$的解集是$x<\frac{2}{5}$，则关于x的不等式（$a-2b$）$x+a\geqslant0$的解集是 ______．

11.（3分）《九章算术》书中记载：今有三人共车，二车空；二人共车，九人步．问：人与车各几何？译文：若3人坐一辆车，则两辆车是空的；若2人坐一辆车，则9人需要步行，问：人与车各多少？设有x辆车，则可列关于x的方程为 ______．

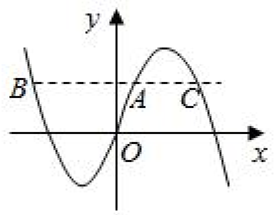
12.（3分）如图，在△ABC中，$AB=AC=\sqrt{5}$，BC＝4，按下列步骤作图：

①以点 A 为圆心，适当的长度为半径作弧，分别交 AB，AC 于点 E，F，再分别以点 E，F 为圆心，大于$\frac{1}{2}EF$的长为半径作弧相交于点 H，作射线 AH；②分别以点 A，B 为圆心，大于$\frac{1}{2}AB$的长为半径作弧相交于点 M、N，作直线 MN，交射线 AH 于点 O；③以点 O 为圆心，线段 OA 长为半径作圆．则⊙O 的半径等于 ______．



13．（3 分）在平面直角坐标系中，点 A、B 的坐标分别是 A（﹣4，2）、B（﹣1，﹣1），以原点 O 为位似中心，将△AOB 扩大到原来的 2 倍，则点 A 的对应点 A'的坐标为 ______．

14．（3 分）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+m$ 与 $y=\frac{2}{3}(x+2)^2+n$ 的一个交点为 A．已知点 A 的横坐标为 1，过点 A 作 x 轴的平行线．分别交两条抛物线于点 B、C（点 B 在点 A 左侧，点 C 在点 A 右侧），则 BC 的值为______．



三．解答题（共 10 小题，满分 78 分）

15．（6 分）已知 $x^2+5x=-2$，求代数式 $(2x+3)^2-x(x-3)$ 的值．

16．（6 分）某商场为了吸引顾客，设计了一种促销活动：在一个不透明的箱子里放有 4 个相同的小球，球上分别标有“0 元”、“10 元”、“20 元”和“30 元”的字样．规定：顾客在本商场同一日内，每消费满 200 元，就可以在箱子里先后摸出两个球（第一次摸出后不放回）．商场根据两小球所标金额的和返还相应价格的购物券，可以重新在本商场消费某顾客刚好消费 200 元．

（1）该顾客至少可得到多少元购物券，至多可得到多少元购物券；

（2）请你用画树状图或列表的方法，求出该顾客所获得购物券的金额不低于 30 元的概率．

17．（6 分）为推进垃圾分类，推动绿色发展，某工厂购进甲、乙两种型号的机器人用来进行垃圾分类，甲种机器人比乙种机器人每小时多分 $20kg$，甲种机器人分类 $900kg$ 垃圾所用的时间与乙种机器人分类 $700kg$ 垃圾所用的时间相等．

（1）甲乙两种机器人每小时各分类多少垃圾？

（2）现在两种机器人共同分类 $860kg$ 垃圾，工作 2 小时后乙种机器人因机器维修退出，求乙种机器人退出后甲种机器人还需工作多长时间才能完成？

18．（7 分）如图，在△ACB 和△ECD 中，∠ACB＝∠ECD＝90°，∠CAB＝∠CED＝30°，连接 AE 交 BD 点 M，将△CDE 绕点 C 顺时针旋转．

（1）如图 1，当点 E 在边 AC 上，点 D 在 BC 上时，请直接写出 AE 与 BD 之间的关系：

（2）如图 2，将△CDE 绕点 C 顺时针旋转至图 2 的位置，请判断$\frac{AE}{BD}$的值及∠AMB 的度数，并说明理由；

（3）在（2）的条件下，将△CDE 绕点 C 在平面内旋转，AE，BD 所在直线交于点 M．若 $CE=\sqrt{3}$，$CB=\sqrt{7}$，请直接写出当点 E 与点 M 重合时 AE 的长．

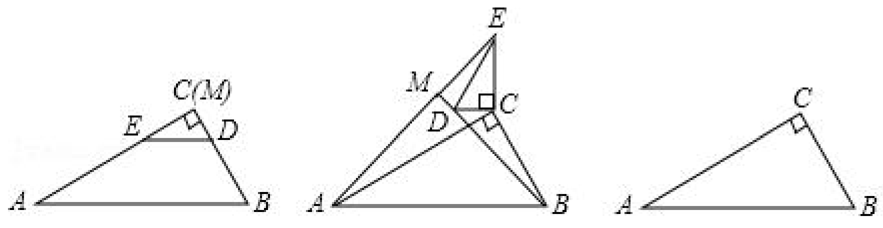


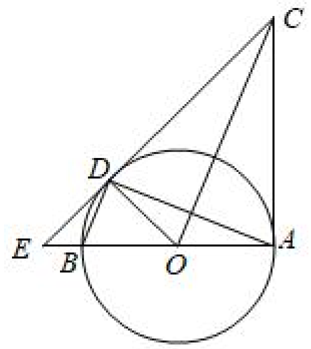
图1　　图2　　备用图

19．（7 分）如图，已知 AB 是⊙O 的直径，直线 AC 与⊙O 相切于点 A，过点 B 作 BD∥OC 交⊙O 于点 D，连接 CD 并延长交 AB 的延长线于点 E．

（1）求证：CD 是⊙O 的切线．

（2）求证：$DE^2=EB\bullet EA$；

（3）若 $BE=1$，$\tan\angle ACO=\frac{1}{2}$，求线段 AD 的长度．



20．（7 分）菲尔兹奖是国际上享有崇高荣誉的一个数学奖项，每 4 年评选一次，在国际数学家大会上颁给有卓越贡献的年龄不超过 40 岁的年轻数学家，美籍华人丘成桐 1982 年获得菲尔兹奖．为了让学生了解菲尔兹奖得主的年龄情况，我们查取了截止到 2018 年 60 名菲尔兹奖得主获奖时的年龄数据，并对数据进行整理、描述和分析．下面给出了部分信息．

a．截止到 2018 年菲尔兹奖得主获奖时的年龄数据的频数分布直方图如图 1（数据分成 5 组，各组是 $28\leq x<31$，$31\leq x<34$，$34\leq x<37$，$37\leq x<40$，$x\geq40$）：

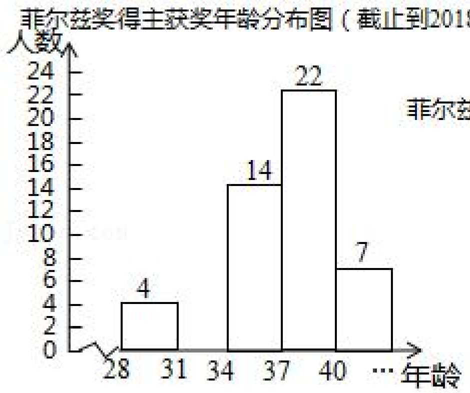


图1

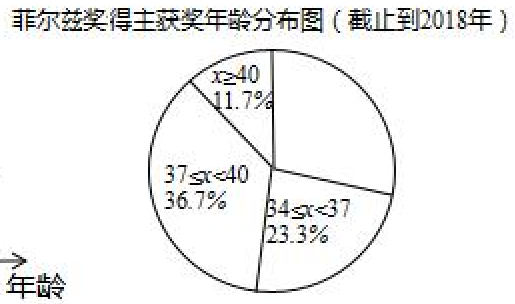


图2

b．如图2，在 a 的基础上，画出扇形统计图；

c．截止到2018年菲尔兹奖得主获奖时的年龄在 $34\leqslant x<37$ 这一组的数据是：

36	35	34	35	35	34	34	35	36	36	36	36	34	35

d．截止到2018年时菲尔兹奖得主获奖时的年龄的平均数、中位数、众数如下：

年份	平均数	中位数	众数
截止到2018	35.58	m	37，38

根据以上信息，回答下列问题：

（1）依据题意，补全频数分布直方图；

（2）$31\leqslant x<34$ 这组的圆心角度数是_______度，并补全扇形统计图；

（3）统计表中中位数 m 的值是；

（4）根据以上统计图表试描述菲尔兹奖得主获奖时的年龄分布特征．

21．（8分）某工厂的销售部门提供两种薪酬计算方式：

薪酬方式一：底薪+提成，其中底薪为3000元，每销售一件商品另外获得15元的提成；

薪酬方式二：无底薪，每销售一件商品获得30元的提成．

设销售人员一个月的销售量为 x（件），方式一的销售人员的月收入为 y_1（元），方式二的销售人员的月收入为 y_2（元）．

（1）请分别写出 y_1、y_2 与 x 之间的函数表达式；

（2）哪种薪酬计算方式更适合销售人员？

22．（9分）如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=\angle B=90°$，$AD=2$，$AB=5$，$BC=3$．

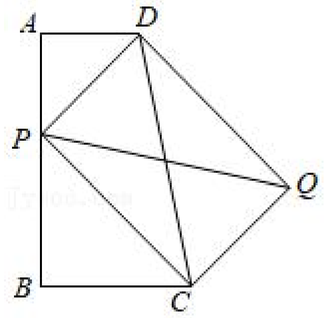
（1）如图①，P 为 AB 上的一个动点，以 PD，PC 为边作▱$PCQD$．

①请问四边形 $PCQD$ 能否成为矩形？若能，求出 AP 的长；若不能，请说明理由．

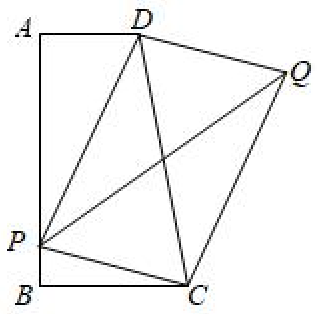
②填空：当 $AP=$_______时，四边形 $PCQD$ 为菱形；

③填空：当 $AP=$_______时，四边形 $PCQD$ 有四条对称轴．

（2）如图②，若 P 为 AB 上的一点，以 PD，PC 为边作▱$PCQD$，请问对角线 PQ 的长是否存在最小值？若存在，请求出最小值；若不存在，请说明理由．



图①



图②

23．（10分）已知等腰三角形 ABC，$\angle F=2\angle ABC$，$CD=kBD$，$\angle FGC=\alpha$．

（1）如图1，当 $k=1$ 时，

①探究 DG 与 CE 之间的数量关系；

②探究 BE，CG 与 CE 之间的关系（用含α的式子表示）．

（2）如图2，当 $k\neq1$ 时，探究 BE，CG 与 CE 之间的数量关系（用含 k，α的式子表示）．

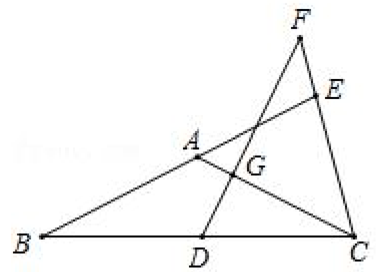


图1

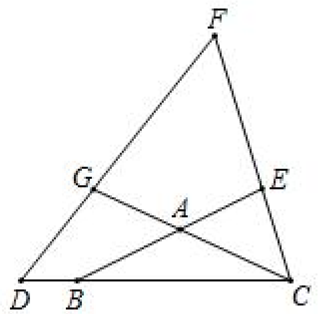


图2

24．（12分）已知一次函数 $y=x+4$ 的图象与二次函数 $y=ax(x-2)$ 的图象相交于 $A(-1,b)$ 和 B，点 P 是线段 AB 上的动点（不与 A、B 重合），过点 P 作 $PC\perp x$ 轴，与二次函数 $y=ax(x-2)$ 的图象交于点 C．

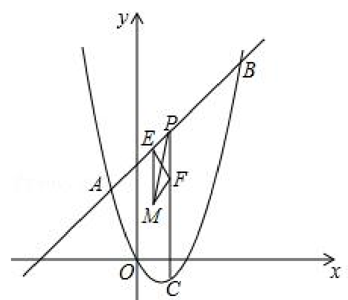
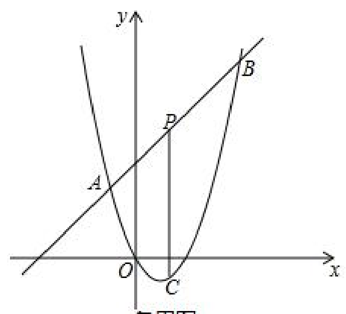


图1



备用图

（1）求 a、b 的值；

（2）如图1，M 为∠APC 内一点，且 $PM=1$，E，F 分别为边 PA 和 PC 上两个动点，求△MEF 周长的最小值；

（3）若△PAC 是直角三角形，求点 C 的坐标．

2023年长春英俊中学中考第一次模拟·校内·数学参考答案与试题解析

一．选择题（共8小题，满分24分，每小题3分）

1．【解答】解：﹣3+（﹣5）＝﹣（3+5）＝﹣8，

故选：C．

2．【解答】解：将129600用科学记数法表示应为1.296×10^{5}．

故选：D．

3．【解答】解：从上面看到的图形是4列2行，

故选：B．

4．【解答】解：根据题意，得：剩下的铁皮的面积＝长方形的面积﹣圆的面积

$=2ab-\pi b^{2}$

$=2\times4\times1-3\times1$

$=5$．

故选：A．

5．【解答】解：A．因为$\angle B=\angle BCD$，所以$AB\parallel CD$，错误；

B．因为$AB\parallel CD$，所以$\angle1=\angle2$，错误；

C．因为$\angle BAD+\angle B=180°$，所以$AD\parallel BC$，正确；

D．因为$\angle1=\angle B$，所以$AD\parallel BC$，错误．

故选：C．

6．【解答】解：由题意可知，四边形$CDMB$是矩形，

∴$CD=BM=1.5$米，$CB=DM=4$米．

在Rt△ADM中，

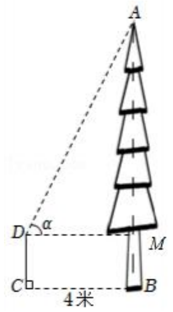
∵$\tan\alpha=\frac{AM}{DM}$,

∴$AM=\tan\alpha\cdot DM=4\tan\alpha$（米）．

∴$AB=AM+BN$

＝（$4\tan\alpha+1.5$）米．

故选：C．



7．【解答】解：根据折叠可得$BE=EB'$，$AB'=AB=3$，

设$BE=EB'=x$，则$EC=4-x$，

在Rt△ABC中，$\angle B=90°$，$AB=3$，$BC=4$，

∴$AC=\sqrt{AB^{2}+BC^{2}}=5$，

∴$B'C=AC-AB'=5-3=2$，

在Rt△$B'EC$中，由勾股定理得，$x^{2}+2^{2}=(4-x)^{2}$，

解得$x=1.5$，

故选：C．

8．【解答】解：如图，过C作$CD\perp y$轴于D，交AB于E．

∵$AB\perp x$轴，

∴$CD\perp AB$，

∵△ABC是等腰直角三角形，

∴$BE=AE=CE$，

设$AB=2a$，则$BE=AE=CE=a$，

设A（x，$\frac{1}{2}x$），则B（x，$\frac{1}{2}x+2a$），C（$x+a$，$\frac{1}{2}x+a$），

∵B，C在反比例函数的图象上，

∴$x(\frac{1}{2}x+2a)=(x+a)(\frac{1}{2}x+a)$，

解得$x=2a$，

∵$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot2a\cdot x=6$，

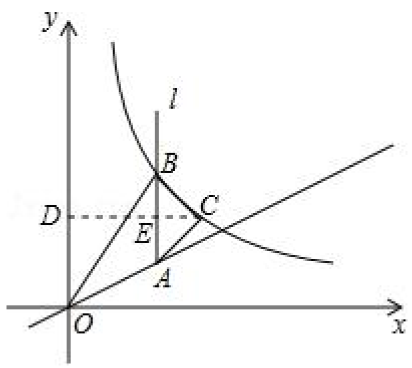
∴$ax=6$，

∴$2a^{2}=6$，

∴$a^{2}=3$，

∵$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{1}{2}\cdot2a\cdot a=a^{2}=3$．

故选：C．



二．填空题（共 6 小题，满分 18 分，每小题 3 分）

9.【解答】解：①$x^2+2x+1=(x+1)^2$；②x^2+2x-1；③x^2-1；④$x^2-6x+9=(x-3)^2$．能用完全平方公式进行因式分解的是①④，

故答案为：①④

10.【解答】解：∵关于 x 的不等式 $ax>b$ 的解集是 $x<\frac{2}{5}$，

∴$a<0$，且$\frac{b}{a}=\frac{2}{5}$，即 $b=\frac{2}{5}a$，

则不等式 $(a-2b)x+a\geqslant 0$ 可变形为$\frac{1}{5}ax+a\geqslant 0$，

移项，得：$\frac{1}{5}ax\geqslant -a$，

系数化为 1，得：$x\leqslant -5$，

故答案为：$x\leqslant -5$．

11.【解答】解：依题意得：$3(x-2)=2x+9$．

故答案为：$3(x-2)=2x+9$．

12.【解答】解：由作法得 AO 平分$\angle BAC$，MN 垂直平分 AB，

设 AO 交 BC 于 D，

∵$AB=AC$，

∴$AO\perp BC$，$BD=CD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 4=2$，

连接 OB，如图，设⊙O 的半径为 r，

在 Rt△ABD 中，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=1$，

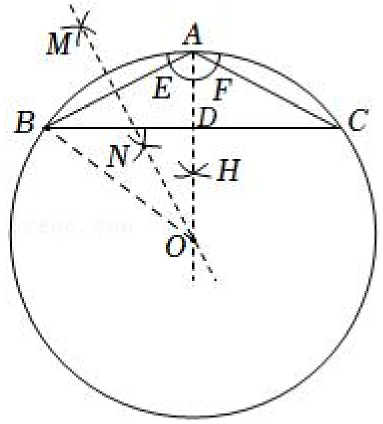
在 Rt△OBD 中，$OB=r$，$OD=r-1$，

∴$2^2+(r-1)^2=r^2$，

解得 $r=2.5$，

即⊙O 的半径为 2.5．

故答案为：2.5．



13.【解答】解：∵点 A 的坐标分别为（-4，2），以原点 O 为位似中心，把△ABO 放大为原来的 2 倍，

则 A' 的坐标是：（-8，4）或（8，-4）．

故答案为：（-8，4）或（8，-4）．

14.【解答】解：抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+m$ 与 $y=\frac{2}{3}(x+2)^2+n$ 的对称轴分别为直线 $x=3$ 与直线 $x=-2$，

∵点 A 的横坐标为 1，

∴点 C 的横坐标为 5，点 B 横坐标为 -5，

∴$BC=10$，

故答案为：10．

三．解答题（共 10 小题，满分 78 分）

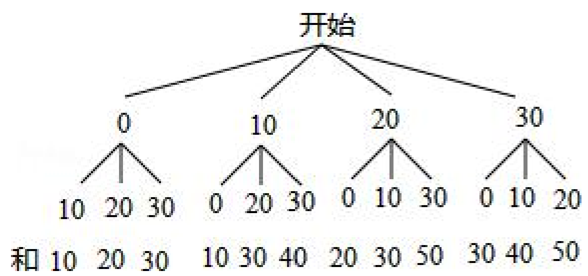
15.【解答】解：$(2x+3)^2-x(x-3)$

$=4x^2+12x+9-x^2+3x$

$=3x^2+15x+9$，

当 $x^2+5x=-2$ 时，原式$=3(x^2+5x)+9=3\times(-2)+9=3$．

16.【解答】解：（1）画树状图得：



∴该顾客至少可得到 10 元购物券，至多可得到 50 元购物券；

（2）由（1）可知，共有 12 种等可能的结果，该顾客所获得购物券的金额不低于 30 元的有 8 种情况，

∴该顾客所获得购物券的金额不低于 30 元的概率为：$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$．

17.【解答】（1）设乙型机器人每小时分类垃圾 $x$kg，则甲型机器人每小时分类垃圾（$x+20$）kg，

根据题意得：$\frac{900}{x+20}=\frac{700}{x}$，

解得 $x=70$，

经检验，$x=70$ 是原方程的解，且符合题意．

则 $x+20=90$．

答：甲型机器人每小时分类垃圾 90kg，乙型机器人每小时分类垃圾 70kg．

（2）$[860-2(70+90)]\div 90=6$（小时）．

答：乙种机器人退出后甲种机器人还需工作 6 小时才能完成．

18．【解答】解：（1）如图 1 中，结论：$AE=\sqrt{3}BD$．理由如下：

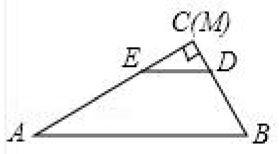


图1

∵在△ACB 和△ECD 中，$\angle ACB=\angle ECD=90°$，$\angle CAB=\angle CED=30°$，

∴$EC=\sqrt{3}CD$，$AC=\sqrt{3}BC$，

∴$AE=AC-EC=\sqrt{3}(BC-CD)=\sqrt{3}BD$．

（2）结论：如图 2 中，$\frac{AE}{BD}=\sqrt{3}$，$\angle AMB=90°$，

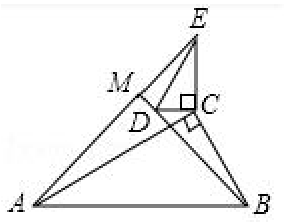


图2

理由是：

Rt△ECD 中，$\angle DEC=30°$，$\angle DCE=90°$，

∴$\frac{EC}{CD}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

同理得：$\frac{CB}{CA}=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$\frac{EC}{CD}=\frac{CB}{CA}$

∵$\angle ACB=\angle ECD=90°$，

∴$\angle ACE=\angle BCD$，

∴△ACE∽△BCD，

∴$\frac{AE}{BD}=\frac{EC}{CD}=\sqrt{3}$，$\angle EAC=\angle DBC$，

在△AMB 中，$\angle AMB=180°-(\angle MAB+\angle ABM)=180°-(\angle CAB+\angle ABM+\angle DBC)=90°$．

（3）①点 E 与点 M 重合时，如图 3，同理得：△ACE∽△BCD，

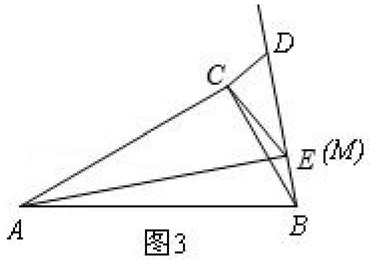


图3

∴$\angle AMB=90°$，$\frac{AE}{BD}=\sqrt{3}$，

设 $BD=x$，则 $AE=\sqrt{3}x$，

Rt△ECD 中，$\angle CED=30°$，$CE=\sqrt{3}$，

∴$CD=1$，$DE=2$，$BE=x-2$，

Rt△ACB 中，$\angle CAB=30°$，$CB=\sqrt{7}$，

∴$AB=2CB=2\sqrt{7}$，

在 Rt△AMB 中，由勾股定理得：$AE^2+BE^2=AB^2$，

$(\sqrt{3}x)2+(x-2)2=(2\sqrt{7})2$，

$x^2-x-6=0$，

$(x-3)(x+2)=0$，

$x_1=3$，$x_2=-2$，

∴$AE=3\sqrt{3}$；

②点 E 与点 M 重合时，如图 4，同理得：$\angle AMB=90°$，

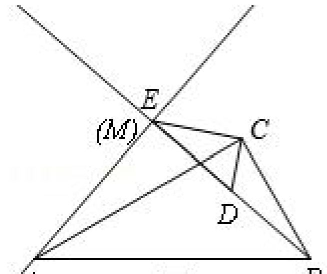


图4

$\frac{AE}{BD}=\sqrt{3}$，设 $BD=x$，则 $AE=\sqrt{3}x$，

在 Rt△AMB 中，由勾股定理得：$AE^2+BE^2=AB^2$，

$(\sqrt{3}x)2+(x+2)^2=(2\sqrt{7})2$

$x^2+x-6=0$，

（$x+3$）（$x-2$）$=0$，

$x_1=-3$，$x_2=2$，

∴$AE=2\sqrt{3}$；

综上所述，AE 的长为 $3\sqrt{3}$或 $2\sqrt{3}$．

19.【解答】解：（1）∵$BD/\!/OC$，

∴$\angle DBO=\angle COA$，$\angle ODB=\angle COD$，

∵$OB=OD$，

∴$\angle DBO=\angle ODB$，

∴$\angle COA=\angle COD$，

在△COA 和△COD 中，

$$\begin{cases}CO=CO\\ \angle COA=\angle COD,\\ OA=OD\end{cases}$$

∴△COA≌△COD（SAS），

∴$\angle CAO=\angle CDO$，

∵AC 是⊙O 的切线，

∴$\angle CAO=90°=\angle CDO$，

即 $OD\perp EC$，

∵OD 是⊙O 的半径，

∴EC 是⊙O 的切线；

（2）∵EC 是⊙O 的切线，

∴$\angle ODE=90°$，

即$\angle EDB+\angle ODB=90°$，

又∴AB 是⊙O 的直径，

∴$\angle ADB=90°$，

∴$\angle ABD+\angle BAD=90°$，

又∵$\angle ODB=\angle OBD$，

∴$\angle EDB=\angle EAD$，

又∵$\angle E=\angle E$，

∴△EBD∽△EDA，

∴$\frac{BE}{DE}=\frac{DE}{AE}$，

即 $DE^2=AE\cdot BE$；

（3）∵$\angle ACO+\angle COA=90°$，

$\angle BAD+\angle OBD=90°$，

而$\angle OBD=\angle ODB=\angle COD=\angle COA$，

∴$\angle ABD+\angle BAD=90°$，

∴$\angle BAD=\angle ACO$，

由△EBD∽△EDA，

∴$\frac{BE}{DE}=\frac{BD}{AD}=\tan\angle BAD=\frac{1}{2}$，

∵$BE=1$，

∴$DE=2$，

由 $DE^2=AE\cdot BE$ 得，

$2^2=1\times AE$，

∴$AE=4$，

∴$AB=4-1=3$，

设 $BD=a$，则 $AD=2a$，由勾股定理得，

$BD^2+AD^2=AB^2$，

即 $a^2+(2a)^2=3^2$，

解得 $a=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，

∴$AD=2a=\frac{6\sqrt{5}}{5}$．

20.【解答】解：（1）频数分布直方图如图所示：

（2）$31\leqslant x<34$ 这组的圆心角度数$=360°\times21.7\%\approx78°$．

扇形统计图如图所示．

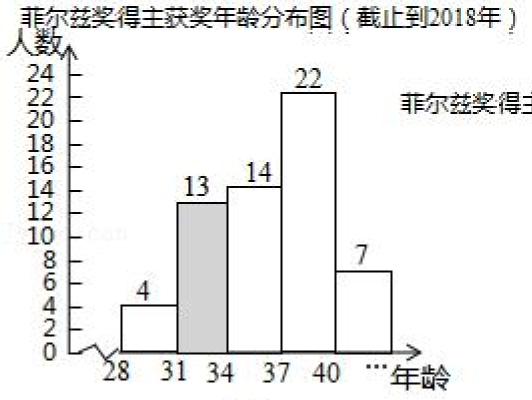


图1

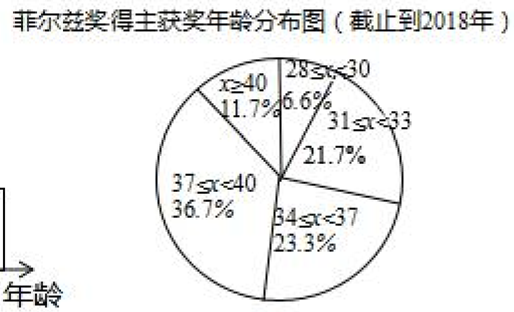


图2

（3）统计表中中位数 m 的值是 36.

（4）答案不唯一，如：菲尔兹奖得主获奖时年龄集中在 37 岁至 40 岁.

21.【解答】解：（1）根据题意得：

y_1 与 x 之间的函数表达式为 $y_1=3000+15x$，

y_2 与 x 之间的函数表达式为 $y_2=30x$；

（2）由 $3000+15x=30x$，解得：$x=200$，

∴当 $x=200$ 时，选择两种薪酬计算方式对销售人员一样，

当 $3000+15x<30x$ 时，解得 $x>200$，

∴当 $x>200$ 时，薪酬方式二计算方式更适合销售人员.

当 $3000+15x>30x$ 时，解得 $x<200$，

∴当 $x<200$ 时薪酬方式一计算方式更适合销售人员，

综上所述，当 $x<200$ 时薪酬方式一计算方式更适合销售人员，当 $x=200$ 时，选择两种薪酬计算方式对销售人员一样，当 $x>200$ 时，薪酬方式二计算方式更适合销售人员.

22.【解答】解：（1）①四边形 $PCQD$ 能成为矩形，AP 的长为 2 或 3，理由如下：

∵四边形 $PCQD$ 是平行四边形，假设四边形 $PCQD$ 是矩形，

则 $\angle DPC=90°$，

∴$\angle APD+\angle BPC=90°$，

在 $\triangle ADP$ 中，$\angle A=90°$，

∴$\angle APD+\angle ADP=90°$，

∴$\angle ADP=\angle BPC$，

∵$\angle A=\angle B$，

∴$\triangle APD\backsim\triangle BCP$，

∴$\frac{AD}{BP}=\frac{AP}{BC}$，

∵$AD=2$，$AB=5$，$BC=3$，

设 $AP=x$，则 $BP=5-x$，

∴$\frac{2}{5-x}=\frac{x}{3}$，

解得：$x_1=2$，$x_2=3$，

∴当 AP 的长为 2 或 3 时，四边形 $PCQD$ 是矩形；

②四边形 $PCQD$ 为菱形时，$DP=CP$，

∵$\angle A=\angle B=90°$，

∴$AD^2+AP^2=BC^2+BP^2$，

即 $2^2+AP^2=3^2+(5-AP)^2$，

解得：$AP=3$，

故答案为：3；

③当四边形 $PCQD$ 为正方形时，有四条对称轴，

∵同时满足①②的四边形 $PCQD$ 为正方形，

∴$AP=3$，

故答案为：3；

（2）存在，理由如下：

过 Q 作 $QH\perp BC$，交 BC 的延长线于 H，如图②所示：

∵$\angle B=90°$，

∴$AB\parallel QH$，

∴$\angle APQ=\angle HQP$，

∴$\angle APD+\angle DPQ=\angle PQC+\angle CQH$，

∵四边形 $PCQD$ 是平行四边形，

∴$PD\parallel QC$，$PD=QC$，

∴$\angle DPQ=\angle CQP$，

∴$\angle APD=\angle CQH$，

在 $\triangle ADP$ 和 $\triangle HCQ$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle H\\ \angle APD=\angle HQC,\\ PD=QC\end{cases}$$

∴$\triangle ADP\cong\triangle HCQ$（$AAS$），

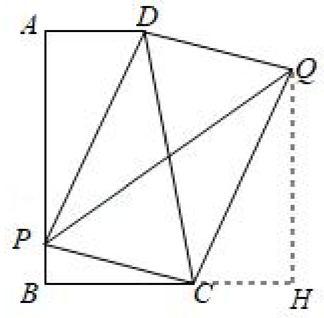
∴$AD=CH=2$，

$\therefore BH=BC+CH=3+2=5$，

∴当 $PQ\perp AB$ 时，PQ 的长最小，

此时，$PQ=BH=5$，

∴PQ 的长存在最小值，为 5．



图②

23．【解答】解：（1）①作 $DH=DG$ 交 AC 于 H，

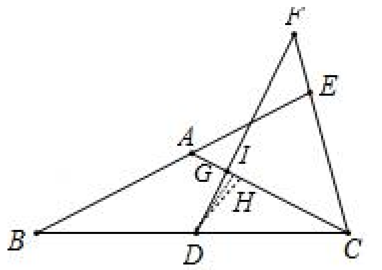


图1

$\therefore \angle DHG=\angle DGH=\angle AGF$，

$\therefore AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$，

$\therefore \angle EAC=\angle ABC+\angle ACB=2\angle ABC$，

$\because \angle F=2\angle ABC$，

$\therefore \angle F=\angle EAC$，

∴点 A、G、E、F 共圆，

$\therefore \angle AGF=\angle AEF$，

$\therefore \angle DHG=\angle AEF$，

$\because \angle CEB=180^\circ-\angle AEF$，

$\angle DHC=180^\circ-\angle DHG$，

$\therefore \angle DHC=\angle CEB$，

又 $\angle DCG=\angle B$，

$\therefore \triangle CHD\backsim\triangle BEC$，

$\therefore \frac{DH}{CE}=\frac{CH}{BE}=\frac{CD}{BC}=\frac{1}{2}$，

$\therefore DG=DH=\frac{1}{2}CE$；

②由上得，

$CH=\frac{1}{2}BE$，$DG=\frac{1}{2}CE$，

$\therefore CG-GH=\frac{1}{2}BE$，

作 $DI\perp GH$ 于 I，

$\because DG=DH$，

$\therefore GI=\frac{1}{2}GH$，

$\therefore GI=DG\cdot\cos\angle DHG$，

$\therefore \frac{1}{2}GH=DG\cdot\cos\angle DHG=\frac{1}{2}CE\cdot\cos\angle DHG$，

$\therefore GH=CE\cdot\cos\angle DHG$，

$\therefore CG-CE\cdot\cos(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{2}BE$；

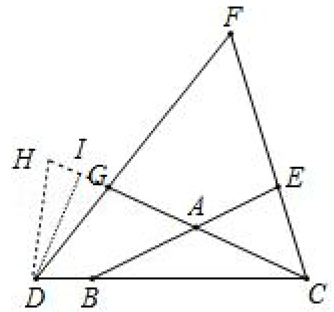


图2

（2）作 $DH=DG$ 交 CG 的延长线于 H，作 $DI\perp GH$ 于 I，

由（1）得，$\angle F=\angle CAE=2\angle ABC=2\angle BAC$，

∴点 A、G、F、E 四点共圆，

$\therefore \angle H=\angle DGH=\angle AGF=\angle BCE$，

$\therefore \triangle CHD\backsim\triangle BEC$，

$\therefore \frac{CH}{BE}=\frac{DH}{CE}=\frac{CD}{BC}=\frac{k}{k-1}$，

$\therefore CH=\frac{k}{k-1}\cdot BE$，

$DH=\frac{k}{k-1}\cdot CE$，

$\therefore CG+2GI=\frac{k}{k-1}\cdot BE$，

在 Rt△DIG 中，$GI=DG\cdot\cos\angle DGI=DH\cdot\cos\alpha$

$=\frac{k}{k-1}\cdot CE\cdot\cos\alpha$，

$\therefore CG+\frac{2k\cdot\cos\alpha}{k-1}\cdot CE=\frac{k}{k-1}\cdot BE$，

$\therefore (k-1)\cdot CG+2k\cdot\cos\alpha\cdot CE=k\cdot BE$.

24.【解答】解：（1）将 $A(-1, b)$ 代入 $y=x+4$，

$\therefore b=3$，

$\therefore A(-1, 3)$，

将 $A(-1, 3)$ 代入 $y=ax(x-2)$，

$\therefore a=1$；

（2）作 M 关于直线 AB 和 PC 的对称点 M'，M''，连接 $M'M''$、PM'、PM''，

则△MEF 周长的最小值为 $M'M''$ 的长，

$\because PM=1$，

$\therefore M$ 点在以 P 为圆心，1 为半径的圆上，

$\because$ 直线 AB 的解析式为 $y=x+4$，

$\therefore \angle APC=45°$，

由对称轴性可知，$\angle APM=\angle M'PA$，$\angle MPF=\angle FPM''$，

$\therefore \angle M'PM''=90°$，

$\because M'P=1$，$M''P=1$，

$\therefore M'M''=\sqrt{2}$，

$\therefore$ △MEF 周长的最小值为$\sqrt{2}$；

（3）联立 $x+4=x^2-2x$，

$\therefore x=-1$ 或 $x=4$，

$\therefore B(4, 8)$，

设 $P(m, m+4)$，则 $C(m, m^2-2m)$，

$\because \angle APC=45°$，

分两种情况：

①当$\angle PAC=90°$ 时，即 $AP=AC$ 时，

$\therefore 2(m+1)^2=(m+1)^2+(m^2-2m-3)^2$，

解得 $m=-1$（舍去）或 $m=2$ 或 $m=4$（舍去），

$\therefore C(2, 0)$；

②当$\angle ACP=90°$ 时，即 $AC=PC$ 时，

$(m^2-3m-4)^2=(m+1)^2+(m^2-2m-3)^2$，

解得 $m=-1$（舍去）或 $m=3$，

$\therefore C(3, 3)$，

综上所述：C 点坐标为（2，0）或（3，3）.