

数 学 试 题

亲爱的同学,请你在答题之前,一定要仔细阅读以下说明:

1. 试题由选择题与非选择题两部分组成,共 6 页,选择题 36 分,非选择题 84 分,共 120 分,考试时间 120 分钟。

2. 将姓名、考场号、考号、座号填写在试题和答题卡指定的位置。

3. 试题答案全部写在答题卡上,完全按照答题卡中的“注意事项”答题。考试结束,答题卡和试题一并交回。

4. 不允许使用计算器。

愿你放松心情,认真审题缜密思考细心演算,交一份满意的答卷。

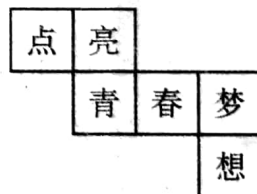
第 I 卷(选择题,共 36 分)

一、选择题(本题共 12 个小题,每小题 3 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求)

1. 正数 2 的平方根可以表示为()

- A. 2^2 B. $\pm\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $-\sqrt{2}$

2. 某正方体的每个面上都有一个汉字,如图是它的一种展开图,那么在原正方体中,与“亮”字所在面相对的面上的汉字是()

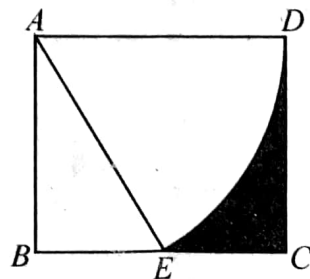


- A. 青 B. 春
C. 梦 D. 想

3. 下列计算正确的是()

- A. $3a^2 - a^2 = 3$ B. $(-3a + b)(3a + b) = 9a^2 - b^2$
C. $(a + 1)(a - 2) = a^2 + a - 2$ D. $(-2a^2)^3 = -8a^6$

4. 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 4$,以点 A 为圆心, AD 长为半径画弧交 BC 于点 E ,连接 AE ,则阴影部分的面积为()



- A. $6\sqrt{3} - \frac{8\pi}{3}$ B. $4\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$
C. $6\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$ D. $6\sqrt{6} - \frac{8\pi}{3}$



5. 据国家统计局公布,我国第七次全国人口普查结果约为 14.12 亿人,14.12 亿用科学记数法表示为()

- A. 14.12×10^9 B. 0.1412×10^{10} C. 1.412×10^9 D. 1.412×10^8

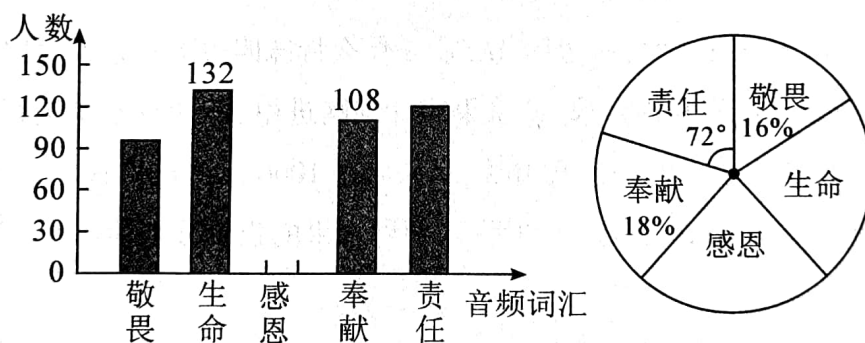
6. 若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 2x - y = 5k + 6 \\ 4x + 7y = k \end{cases}$ 的解满足 $x + y = 2023$, 则 k 的值为()

- A. 2020 B. 2021 C. 2022 D. 2023

7. 用配方法解一元二次方程 $-3x^2 + 12x - 2 = 0$ 时,将它化为 $(x + a)^2 = b$ 的形式,则 b 的值为()

- A. $\frac{14}{3}$ B. $\frac{10}{3}$ C. 2 D. $\frac{4}{3}$

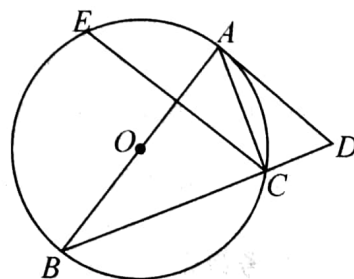
8. 为了调查疫情对青少年人生观、价值观产生的影响,某学校团委对初二级部学生进行了问卷调查,其中一项是:疫情期间出现的哪一个高频词汇最触动你的内心? 针对该项调查结果制作的两个统计图(不完整)如下,由图中信息可知,下列结论错误的是()



- A. 本次调查的样本容量是 600
B. 选“责任”的有 120 人
C. 扇形统计图中“生命”所对应的扇形圆心角度数为 64.8°
D. 选“感恩”的人数最多

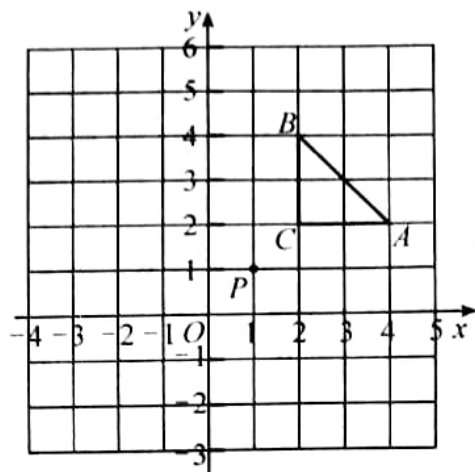
9. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 E, C 在 $\odot O$ 上, 点 A 是 \widehat{EC} 的中点, 过点 A 画 $\odot O$ 的切线, 交 BC 的延长线于点 D , 连接 EC . 若 $\angle ADB = 58.5^\circ$, 则 $\angle ACE$ 的度数为()

- A. 29.5° B. 31.5°
C. 58.5° D. 63°



10. 如图, 将 $\triangle ABC$ 先向上平移 1 个单位, 再绕点 P 按逆时针方向旋转 90° , 得到 $\triangle A'B'C'$, 则点 A 的对应点 A' 的坐标是()





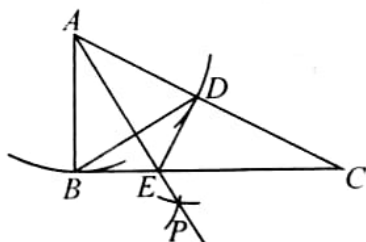
A. (0, 4)

B. (2, -2)

C. (3, -2)

D. (-1, 4)

11. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$, 以点 A 为圆心, 以 AB 的长为半径作弧交 AC 于点 D , 连接 BD , 再分别以点 B, D 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径作弧, 两弧交于点 P , 作射线 AP 交 BC 于点 E , 连接 DE , 则下列结论中不正确的是()



A. $BE = DE$

B. DE 垂直平分线段 AC

C. $\frac{S_{\triangle EDC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $BD^2 = BC \cdot BE$

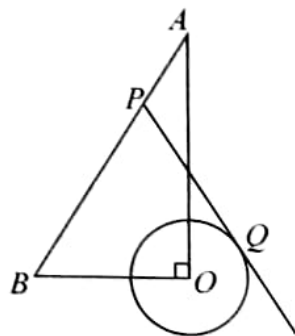
12. 如图,在 $Rt\triangle AOB$ 中, $OB = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$, $\odot O$ 的半径为 1, 点 P 是 AB 边上的动点, 过点 P 作 $\odot O$ 的一条切线 PQ (其中点 Q 为切点), 则线段 PQ 长度的最小值为().

A. $2\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{3}$

D. 4



第 II 卷(非选择题,共 84 分)

二、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,共 15 分.只要求填写最后结果)

13. 计算: $\sqrt{9} + (-3)^2 + 3^{-2} - |-\frac{1}{9}| =$ _____.

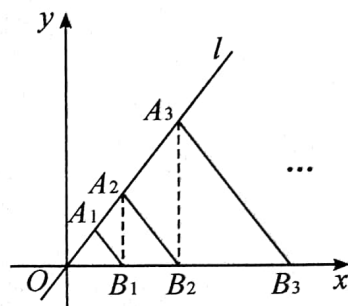
14. 从 $-1, 2, -3, 4$ 这四个数中任取两个不同的数分别作为 a, b 的值, 得到反比例函数 $y = \frac{ab}{x}$, 则这些反比例函数中, 其图象在二、四象限的概率是_____.



15. 若一个圆锥的底面半径为 2, 母线长为 6, 则该圆锥侧面展开图圆心角的度数为_____.

16. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{2}x - a > 0 \\ 4 - 2x \geq 0 \end{cases}$ 无解, 则 a 的取值范围为_____.

17. 如图, 在第一象限内的直线 $l: y = \sqrt{3}x$ 上取点 A_1 , 使 $OA_1 = 1$, 以 OA_1 为边作等边 $\triangle OA_1B_1$, 交 x 轴于点 B_1 ; 过点 B_1 作 x 轴的垂线交直线 l 于点 A_2 , 以 OA_2 为边作等边 $\triangle OA_2B_2$, 交 x 轴于点 B_2 ; 过点 B_2 作 x 轴的垂线交直线 l 于点 A_3 , 以 OA_3 为边作等边 $\triangle OA_3B_3$, 交 x 轴于点 B_3 ; …… 依次类推, 则点 A_{2022} 的横坐标为_____.

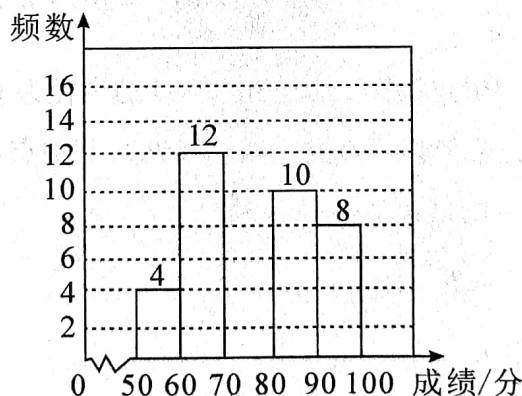


三、解答题(本题共 8 个小题, 共 69 分. 解答题应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

18. (7 分) 先化简, 再求值: $\left(a + 1 - \frac{3}{a-1}\right) \div \frac{a^2 + 4a + 4}{a-1}$, 其中 $a = \tan 45^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \pi^0$.

19. (8 分) 我校举办喜迎二十大为主题的知识竞赛, 从七年级和八年级各随机抽取了 50 名学生的竞赛成绩进行整理、描述和分析, 部分信息如下:

a : 七年级抽取成绩的频数分布直方图如图. (数据分成 5 组, $50 \leq x < 60$, $60 \leq x < 70$, $70 \leq x < 80$, $80 \leq x < 90$, $90 \leq x \leq 100$)



b : 七年级抽取成绩在 $70 \leq x < 80$ 这一组的是: 70, 72, 73, 73, 75, 75, 75, 76, 77, 77, 78, 78, 79, 79, 79, 79.

c : 七、八年级抽取成绩的平均数、中位数如下:

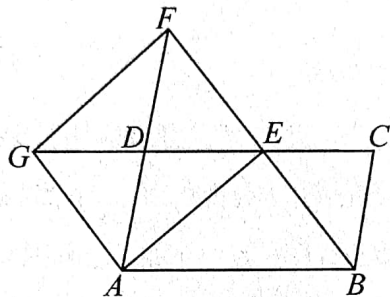
年级	平均数	中位数
七年级	76.5	m
八年级	78.2	79



请结合以上信息完成下列问题:

- (1) 七年级抽取成绩在 $60 \leq x < 90$ 的人数是_____,并补全频数分布直方图;
- (2) 表中 m 的值为_____;
- (3) 七年级学生甲和八年级学生乙的竞赛成绩都是 78,则_____ (填“甲”或“乙”)的成绩在本年级抽取成绩中排名更靠前;
- (4) 七年级的学生共有 400 人,请你估计七年级竞赛成绩 90 分及以上的学生人数.

20. (8分) 如图,在 $\square ABCD$ 中, E 为 CD 边的中点,连接 BE 并延长,交 AD 的延长线于点 F ,延长 ED 至点 G ,使 $DG = DE$,分别连接 AE, AG, FG .



(1) 求证: $\triangle BCE \cong \triangle FDE$;

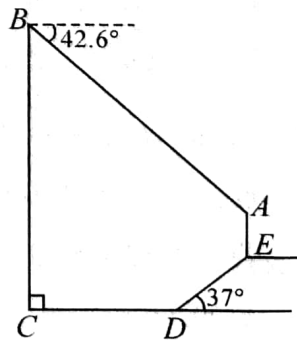
(2) 当 BF 平分 $\angle ABC$ 时,四边形 $AEFG$ 是什么特殊四边形? 请说明理由.

21. (8分) 为满足顾客的购物需求,某水果店计划购进甲、乙两种水果进行销售.经了解,甲水果的进价比乙水果的进价低 20%,水果店用 1000 元购进甲种水果比用 1200 元购进乙种水果的重量多 10 千克,已知甲、乙两种水果的售价分别为 6 元/千克和 8 元/千克.

(1) 求甲、乙两种水果的进价分别是多少?

(2) 若水果店购进这两种水果共 150 千克,其中甲种水果的重量不低于乙种水果重量的 2 倍,则水果店应如何进货才能获得最大利润,最大利润是多少?

22. (8分) 某校数学社团开展“探索生活中的数学”研学活动,准备测量一栋大楼 BC 的高度.如图所示,其中观景平台斜坡 DE 的长是 20 米,坡角为 37° ,斜坡 DE 底部 D 与大楼底端 C 的距离 CD 为 74 米,与地面 CD 垂直的路灯 AE 的高度是 3 米,从楼顶 B 测得路灯 AE 顶端 A 处的俯角是 42.6° .试求大楼 BC 的高度.



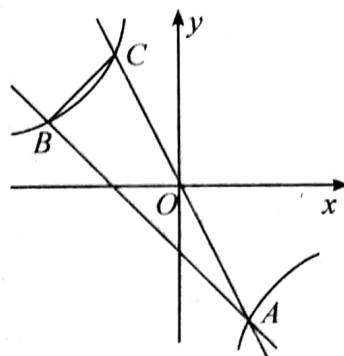
(参考数据: $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\cos 37^\circ \approx \frac{4}{5}$, $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$,

$\sin 42.6^\circ \approx \frac{17}{25}$, $\cos 42.6^\circ \approx \frac{34}{45}$, $\tan 42.6^\circ \approx \frac{9}{10}$)



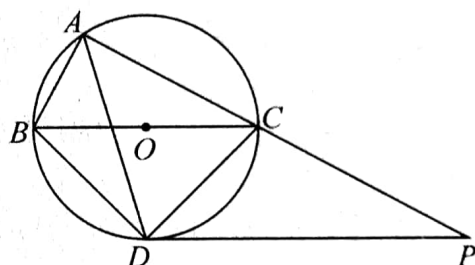
23. (8分) 如图,在平面直角坐标系 xOy 中,一次函数 $y = ax + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象都经过 $A(2, -4)$ 、 $B(-4, m)$ 两点.

- (1) 求反比例函数和一次函数的表达式;
- (2) 过 O 、 A 两点的直线与反比例函数图象交于另一点 C ,连接 BC ,求 $\triangle ABC$ 的面积.



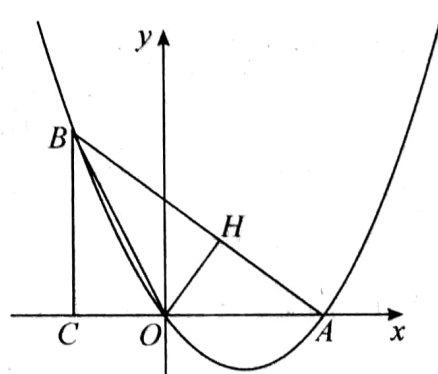
24. (10分) 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,点 O 在 BC 边上, $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D ,连接 BD , CD , 过点 D 作 $\odot O$ 的切线与 AC 的延长线交于点 P .

- (1) 求证: $DP \parallel BC$;
- (2) 求证: $\triangle ABD \sim \triangle DCP$;
- (3) 当 $AB = 5\text{cm}$, $AC = 12\text{cm}$ 时,求线段 PC 的长.



25. (12分) 已知:如图,在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = 3$, $CA = 4$, 将 $\angle ABC$ 对折,使点 C 的对应点 H 恰好落在直线 AB 上,折痕交 AC 于点 O ,以点 O 为坐标原点, AC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系.

- (1) 求过 A, B, O 三点的抛物线解析式;
- (2) 若在线段 AB 上有一动点 P ,过点 P 作 x 轴的垂线,交抛物线于 M ,连接 MB, MA ,求 $\triangle MAB$ 的面积的最大值;
- (3) 若点 E 在抛物线上,点 F 在对称轴上,且以 O, A, E, F 为顶点的四边形为平行四边形,请直接写出点 E 的坐标.



数学参考答案

一、选择题(本大题共 12 个小题,每小题 3 分,满分 36 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	B	D	A	C	C	B	C	B	D	C	A

二、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,共 15 分.只要求填写最后结果)

13. -6. 14. $\frac{7}{12}$ 15. 120° 16. $a \geq 1$ 17. 2^{2020}

三、解答题(本题共 8 个小题,共 69 分.解答题应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

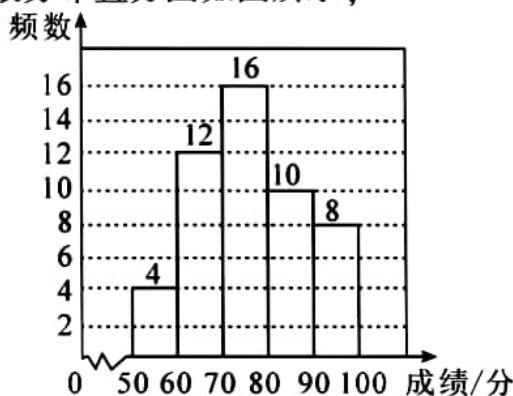
18. (7 分) 解: $\left(a + 1 - \frac{3}{a-1}\right) \div \frac{a^2 + 4a + 4}{a-1}$
 $= \left(\frac{a^2 - 1}{a-1} - \frac{3}{a-1}\right) \div \frac{(a+2)^2}{a-1}$
 $= \frac{a^2 - 4}{a-1} \div \frac{(a+2)^2}{a-1}$
 $= \frac{(a+2)(a-2)}{a-1} \cdot \frac{a-1}{(a+2)^2}$
 $= \frac{a-2}{a+2};$

$$\because a = \tan 45^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \pi^0 = 1 + 2 - 1 = 2,$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{a-2}{a+2} = \frac{2-2}{2+2} = 0.$$

19. (8 分)

(1) 解:由题意可得: $70 \leq x < 80$ 这组的数据有 16 人,
 \therefore 七年级抽取成绩在 $60 \leq x < 90$ 的人数是: $12 + 16 + 10 = 38$ 人,
 故答案为:38;补全频数分布直方图如图所示;



(2) 解: $\because 4 + 12 = 16 < 25, 4 + 12 + 16 > 25,$
 \therefore 七年级中位数在 $70 \leq x < 80$ 这组数据中,
 \therefore 第 25、26 的数据分别为 77, 77,

$$\therefore m = \frac{77 + 77}{2} = 77,$$

故答案为:77;



(3) 解: \because 七年级学生的中位数为 $77 < 78$, 八年级学生的中位数为 $79 > 78$,
 \therefore 甲的成绩在本年级抽取成绩中排名更靠前,
故答案为: 甲;

(4) 解: $400 \times \frac{8}{50} = 64$ (人)

答: 七年级竞赛成绩 90 分及以上人数约为 64 人.

20. (8 分)

(1) 证明: \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AD \parallel BC, \therefore \angle DFE = \angle CBE$
又 $\because E$ 为 CD 边的中点,
 $\therefore DE = CE$
 $\because \angle FED = \angle BEC, \angle DFE = \angle CBE, DE = CE$,
 $\therefore \triangle BCE \cong \triangle FDE$

(2) 答: 四边形 AE 是矩形, 理由如下:
 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AD = BC$,
 $\because \triangle FDE \cong \triangle BCE$,
 $\therefore BC = FD, FE = EB$,
 $\therefore FD = AD$,
 $\because GD = DE$,
 \therefore 四边形 $AEFG$ 是平行四边形.
 $\because BF$ 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore \angle CBF = \angle ABF$.
又 $\because \angle AFB = \angle FBC$,
 $\therefore \angle ABF = \angle AFB$,
 $\therefore AB = AF$
又 $\because FE = EB$,
 $\therefore AE \perp FE$,
 $\therefore \angle AEF = 90^\circ$,
 \therefore 四边形 $AEFG$ 是矩形

21. (8 分)

(1) 解: 设乙种水果的进价是 x 元 / 千克,

由题意得: $\frac{1000}{(1 - 20\%)x} = \frac{1200}{x} + 10$,

解得: $x = 5$,

经检验, $x = 5$ 是分式方程的解且符合题意,

则 $(1 - 20\%)x = 0.8 \times 5 = 4$,

答: 甲种水果的进价是 4 元 / 千克, 乙种水果的进价是 5 元 / 千克;

(2) 解: 设水果店购进甲种水果 a 千克, 获得的利润为 y 元, 则购进乙种水果 $(150 - a)$ 千克,

由题意得: $y = (6 - 4)a + (8 - 5)(150 - a) = -a + 450$,

$\because -1 < 0$,

$\therefore y$ 随 a 的增大而减小,

\because 甲种水果的重量不低于乙种水果重量的 2 倍,

$\therefore a \geq 2(150 - a)$,



解得: $a \geq 100$,

\therefore 当 $a = 100$ 时, y 取最大值, 此时 $y = -100 + 450 = 350$, $150 - a = 50$,

答: 水果店购进甲种水果 100 千克, 乙种水果 50 千克时获得最大利润, 最大利润是 350 元.

22. (8 分) 延长 AE 交 CD 于点 M ,

过点 A 作 $AN \perp BC$, 交 BC 于点 N ,

由题意得, $\angle AMC = \angle NCM = \angle ANC = 90^\circ$,

\therefore 四边形 $AMCN$ 为矩形,

$\therefore NC = AM, NA = CM$.

在 $Rt\triangle EMD$ 中, $\angle EMD = 90^\circ$,

$$\therefore \sin \angle EDM = \frac{EM}{ED}, \cos \angle EDM = \frac{DM}{ED},$$

$$\therefore \sin 37^\circ = \frac{EM}{20}, \cos 37^\circ = \frac{DM}{20},$$

$$\therefore EM = 20 \cdot \sin 37^\circ \approx 20 \times \frac{3}{5} = 12,$$

$$\therefore DM = 20 \cdot \cos 37^\circ \approx 20 \times \frac{4}{5} = 16.$$

在 $Rt\triangle BNA$ 中, $\angle BNA = 90^\circ$,

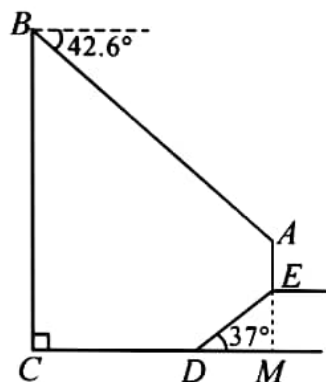
$$\therefore \tan \angle BAN = \frac{BN}{AN},$$

$$\therefore \tan 42.6^\circ = \frac{BN}{74 + 16},$$

$$\therefore BN = 90 \tan 42.6^\circ \approx 90 \times \frac{9}{10} = 81,$$

$$\therefore BC = BN + AE + EM = 81 + 3 + 12 = 96.$$

答: 大楼 BC 的高度约为 96 米.



23. (8 分)

(1) 将 $A(2, -4)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得到 $-4 = \frac{k}{2}$, 即: $k = -8$.

\therefore 反比例函数的表达式为: $y = -\frac{8}{x}$.

将 $B(-4, m)$ 代入 $y = -\frac{8}{x}$, 得: $m = -\frac{8}{-4} = 2$,

$\therefore B(-4, 2)$,

将 A, B 代入 $y = ax + b$, 得:

$$\begin{cases} 2a + b = -4 \\ -4a + b = 2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

\therefore 一次函数的表达式为: $y = -x - 2$.

(2) 设 AB 交 x 轴于点 D , 连接 CD , 过点 A 作 $AE \perp CD$ 交 CD 延长线于点 E , 作 $BF \perp CD$ 交 CD 于点 F .

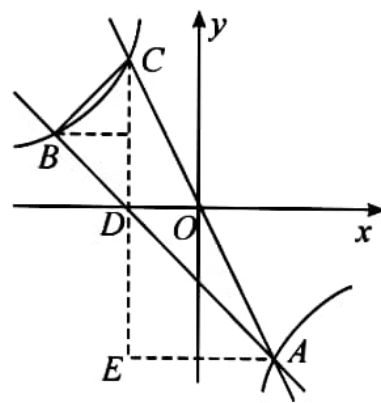
令 $y = -x - 2 = 0$, 则 $x = -2$,

\therefore 点 D 的坐标为 $(-2, 0)$,

\therefore 过 O, A 两点的直线与反比例函数图象交于另一点 C ,



$$\begin{aligned}
&\therefore A(2, -4) \text{ 关于原点的对称点 } C \text{ 坐标: } (-2, 4), \\
&\therefore \text{点 } C、\text{点 } D \text{ 横坐标相同,} \\
&\therefore CD \parallel y \text{ 轴,} \\
&\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} \\
&\quad = \frac{1}{2}CD \cdot AE + \frac{1}{2}CD \cdot BF \\
&\quad = \frac{1}{2}CD \cdot (AE + BF) \\
&\quad = \frac{1}{2}CD \cdot |x_A - x_B| \\
&\quad = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \\
&\quad = 12.
\end{aligned}$$



24. (10 分)

证明: (1) 如图, 连接 OD ,

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 45^\circ$,

由圆周角定理得: $\angle COD = 2 \angle CAD = 90^\circ$,

$\therefore OD \perp BC$,

$\because DP$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OD \perp DP$,

$\therefore DP \parallel BC$;

(2) 由圆周角定理得: $\angle ADB = \angle ACB$,

$\because DP \parallel BC$,

$\therefore \angle ACB = \angle P$,

$\therefore \angle ADB = \angle P$,

由圆内接四边形的性质得: $\angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$,

$\because \angle DCP + \angle ACD = 180^\circ$,

$\therefore \angle ABD = \angle DCP$,

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCP$ 中, $\begin{cases} \angle ADB = \angle P \\ \angle ABD = \angle DCP \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCP$;

(3) $\because \angle BAC = 90^\circ, AB = 5\text{cm}, AC = 12\text{cm}$,

$\therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 13\text{cm}$,

$\therefore OC = OD = \frac{1}{2}BC = \frac{13}{2}\text{cm}$,

在 $Rt\triangle COD$ 中, $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} = \frac{13}{2}\sqrt{2}\text{cm}$,

由圆周角定理得: $\angle CBD = \angle CAD = 45^\circ, \angle BCD = \angle BAD = 45^\circ$,

$\therefore \angle CBD = \angle BCD$,



$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{15}{8} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{8},$$

$$\therefore \text{可设 } P(x, -\frac{3}{4}x + \frac{15}{8}), \text{ 则 } M(x, \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x),$$

$$\therefore PM = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{8} - (\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{8},$$

$$\therefore S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2}PM(x_A - x_B)$$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{15}{8}) \times 4$$

$$= -x^2 + x + \frac{15}{4}$$

$$= -(x - \frac{1}{2})^2 + 4,$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } \triangle MAB \text{ 的面积取最大值 } 4;$$

$$(3) \text{ 点 } E \text{ 的坐标为 } (\frac{15}{4}, \frac{75}{32}) \text{ 或 } (-\frac{5}{4}, \frac{75}{32}) \text{ 或 } (\frac{5}{4}, -\frac{25}{32}).$$

