

2023 年衡阳市初中学业水平考试试卷

数 学

考生注意：1. 本学科为闭卷考试。

2. 本学科试卷共三道大题，满分 120 分，考试时量 120 分钟。

3. 本试卷的作答一律答在答题卡上，选择题用 2B 铅笔按涂写要求将你认为正确的选项涂黑；非选择题用黑色墨水签字笔作答，作答不能超出黑色矩形边框。直接在试题卷上作答无效。

一、选择题（本大题共 12 个小题，每小题 3 分，满分 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

1. 中国是最早采用正负数表示相反意义的量、并进行负数运算的国家，若收入 500 元记作 +500 元，则支出 237 元记作

A. +237 元 B. -237 元 C. 0 元 D. -474 元

2. 下列长度的各组线段能组成一个三角形的是

A. 1cm, 2cm, 3cm B. 3cm, 8cm, 5cm C. 4cm, 5cm, 10cm D. 4cm, 5cm, 6cm

3. 下面四种化学仪器的示意图是轴对称图形的是



4. 作为中国非物质文化遗产之一的紫砂壶，成型工艺特别，造型式样丰富，陶器色泽古朴典雅，从一个方面鲜明地反映了中华民族造型审美意识。右图是一把做工精湛的紫砂壶“景舟石瓢”，其左视图的大致形状是



5. 计算 $(\frac{1}{2}x^3)^2$ 的结果正确的是

A. x^6 B. $\frac{1}{4}x^6$ C. $\frac{1}{4}x^5$ D. x^9

6. 据共青团中央 2023 年 5 月 3 日发布的中国共青团团内统计公报，截至 2022 年 12 月底，全国共有共青团员 7358 万。数据 7358 万用科学记数法表示为

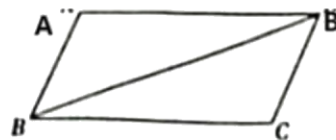
A. 7.358×10^7 B. 7.358×10^3 C. 7.358×10^4 D. 7.358×10^6

7. 对于二次根式的乘法运算，一般地，有 $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 。该运算法则成立的条件是

A. $a > 0, b > 0$ B. $a < 0, b < 0$ C. $a \leq 0, b \leq 0$ D. $a \geq 0, b \geq 0$

8. 如图，在四边形 ABCD 中，已知 $AD \parallel BC$ 。添加下列条件不能判定四边形 ABCD 是平行四边形的是

A. $AD = BC$ B. $AB \parallel DC$
C. $AB = DC$ D. $\angle A = \angle C$



9. 《孙子算经》中有“鸡兔同笼”问题：“今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔各几何。”

设有 x 只鸡， y 只兔，依题意，可列方程组为

A. $\begin{cases} x+y=35 \\ 4x+2y=94 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y=94 \\ 4x+2y=35 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+y=94 \\ 2x+4y=35 \end{cases}$

10. 某射击运动队进行了五次射击测试，甲、乙两名选手的测试成绩如下表. 甲、乙两名选手成绩的方差分别记为 $S^2_{\text{甲}}$ 和 $S^2_{\text{乙}}$. 则 $S^2_{\text{甲}}$ 和 $S^2_{\text{乙}}$ 的大小关系是

测试次数	1	2	3	4	5
甲	5	10	9	3	8
乙	8	6	8	6	7

A. $S^2_{\text{甲}} > S^2_{\text{乙}}$ B. $S^2_{\text{甲}} < S^2_{\text{乙}}$ C. $S^2_{\text{甲}} = S^2_{\text{乙}}$ D. 无法确定

11. 我们可以用以下推理来证明“在一个三角形中，至少有一个内角小于或等于 60° ”. 假设三角形没有一个内角小于或等于 60° ，即三个内角都大于 60° 。”. 则三角形的三个内角的和大于 180° . 这与“三角形的内角和等于 180° ”这个定理矛盾. 所以在一个三角形中，至少有一个内角小于或等于 60° . 上述推理使用的证明方法是

A. 反证法 B. 比较法 C. 综合法 D. 分析法

12. 已知 $m > n > 0$ ，若关于 x 的方程 $x^2 + 2x - 3 - m = 0$ 的解为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ，关于 x 的方程 $x^2 + 2x - 3 - n = 0$

的解为 $x_3, x_4 (x_3 < x_4)$. 则下列结论正确的是

A. $x_3 < x_1 < x_2 < x_4$ B. $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ C. $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ D. $x_3 < x_4 < x_1 < x_2$

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，满分 18 分.）

13. 在平面直角坐标系中，点 $P(-3, -2)$ 所在象限是第_____象限.

14. 一个布袋中放着 3 个红球和 9 个黑球，这两种球除了颜色以外没有任何其他区别. 布袋中的球已经搅匀，从布袋中任取 1 个球，取出红球的概率是_____

15. 已知 $x=5$ ，则代数式 $\frac{3}{x-4} - \frac{24}{x^2-16}$ 的值为_____

16. 已知关于 x 的方程 $x^2 + mx - 20 = 0$ 的一个根是 -4 ，则它的另一个根是_____

17. 如图，在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC=8$ ， $BC=6$. 以点 C 为圆心， r 为半径作圆，当所作的圆与斜边 AB 所在的直线相切时， r 的值为_____

18. 如图，用若干个全等的正五边形排成圆环状，图中所示的是其中 3 个正五边形的位置. 要完成这一圆环排列，共需要正五边形的个数是_____



(第 17 题图)



(第 18 题图)

三、解答题（本大题共 8 个小题，19~20 题每题 6 分，21~24 题每题 8 分，25 题 10 分，26 题 12 分，满分 66 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

19. （本小题满分 6 分）

计算： $|-3|+\sqrt{4}+(-2)\times 1$

20. （本小题满分 6 分）

解不等式组：
$$\begin{cases} x-4\leq 0 & \text{①} \\ 2(x+1)<3x & \text{②} \end{cases}$$

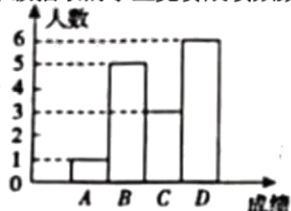
21. （本小题满分 8 分）

2023 年 3 月 27 日是第 28 个全国中小学生安全教育日，为提高学生安全防范意识和自我防护能力，某学校举行了校园安全知识竞赛活动．现从八、九年级中各随机抽取 15 名学生的竞赛成绩（百分制）进行整理、描述和分析（成绩得分用 x 表示，80 分及以上为优秀，共分成四组，A：60≤ x <70；B：70≤ x <80；C：80≤ x <90；D：90≤ x ≤100），并给出下面部分信息：

八年级抽取的学生竞赛成绩在 C 组中的数据为：84，84，88

九年级抽取的学生竞赛成绩为：68，77，75，100，80，100，82，86，95，91，100，86，84，94，87.

八年级抽取的学生竞赛成绩频数分布直方图



八、九年级抽取的学生竞赛成绩统计表

年级	平均数	中位数	众数	优秀率
八	87	a	98	60%
九	87	86	b	c

根据以上信息，解答下列问题：

(1) 填空： $a=$ _____, $b=$ _____

(2) 该校八、九年级共 500 人参加了此次竞赛活动，请你估计该校八、九年级参加此次竞赛活动成绩达到 90 分及以上的学生人数.

22. （本小题满分 8 分）

如图，正比例函数 $y=\frac{4}{3}x$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{12}{x}(x>0)$ 的图象相交于点 A.

(1) 求点 A 的坐标.

(2) 分别以点 O、A 为圆心，大于 OA 一半的长为半径作圆弧，两弧相交于点 B 和点 C，作直线 BC，交 x 轴于点 D. 求线段 OD 的长.

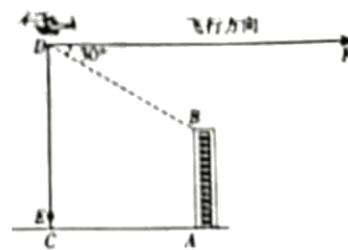


（第 22 题图）

23. （本小题满分 8 分）

随着科技的发展，无人机已广泛应用于生产生活，如代替人们在高空测量距离和高度，圆圆要测量教学楼 AB 的高度，借助无人机设计了如下测量方案：如图，圆圆在离教学楼底部 $24\sqrt{3}$ 米的 C 处，遥控无人机旋停在点 C 的正上方的点 D 处，测得教学楼 AB 的顶部 B 处的俯角为 30° ，CD 长为 49.6 米．已知目高 CE 为 1.6 米．

(1) 求教学楼 AB 的高度.



（第 23 题图）

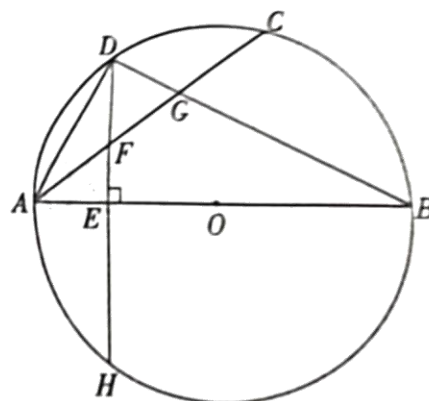
(2) 若无人机保持现有高度沿平行于 CA 的方向，以 $4\sqrt{3}$ 米 / 秒的速度继续向前匀速飞行．求经过多少秒时，无人机刚好离开圆圆的视线 EB.

24. (本小题满分 8 分)

如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是一条弦, D 是弧 AC 的中点, $DE \perp AB$ 于点 E, 交 AC 于点 F, 交圆 O 于点 H, DB 交 AC 于点 G.

(1) 求证: $AF=DF$.

(2) 若 $AF=\frac{5}{2}$, $\sin \angle ABD=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 求圆 O 的半径.



25. (本小题满分 10 分)

[问题探究]

(1) 如图 1, 在正方形 ABCD 中, 对角线 AC、BD 相交于点 O. 在线段 AO 上任取一点 P (端点除外), 连接 PD、PB

①求证: $PD=PB$

②将线段 DP 绕点 P 逆时针旋转, 使点 D 落在 BA 的延长线上的点 Q 处. 当点 P 在线段 AO 上的位置发生变化时, $\angle DPQ$ 的大小是否发生变化? 请说明理由;

③探究 AQ 与 OP 的数量关系, 并说明理由.

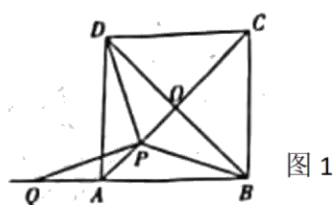


图 1

[迁移探究]

(2) 如图 2, 将正方形 ABCD 换成菱形 ABCD, 且 $\angle ABC=60^\circ$, 其他条件不变. 试探究 AQ 与 CP 的数量关系, 并说明理由.

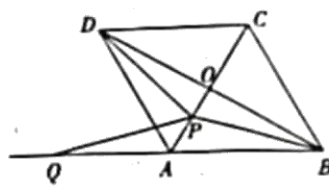


图 2

26. (本小题满分 12 分)

如图, 已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax + 3$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 C , 连接 AC , 过 B 、 C 两点作直线.

(1) 求 a 的值.

(2) 将直线 BC 向下平移 $m(m > 0)$ 个单位长度, 交抛物线于 B' 、 C' 两点. 在直线 $B'C'$ 上方的抛物线上是否存在定点 D , 无论 m 取何值时, 都是点 D 到直线 $B'C'$ 的距离最大. 若存在, 请求出点 D 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

(3) 抛物线上是否存在点 P , 使 $\angle PBC + \angle ACO = 45^\circ$, 若存在, 请求出直线 BP 的解析式; 若不存在, 请说明理由.

