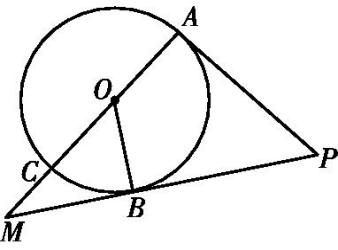
**《第二十九章　直线与圆的位置关系》专项拓展训练（二）**

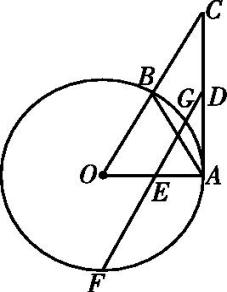
**专项一 与切线有关的证明与计算**

**类型1　见半径,证垂直**

1. 如图,*AC*是☉*O*的直径,*OB*是☉*O*的半径,*PA*切☉*O*于点*A*,*PB*与*AC*的延长线交于点*M*,∠*COB*=∠*APB*.求证:*PB*是☉*O*的切线.



2. [2021四川南充中考]如图,*A*,*B*是☉*O*上两点,且*AB*=*OA*,连接*OB*并延长到点*C*,使*BC*=*OB*,连接*AC*.

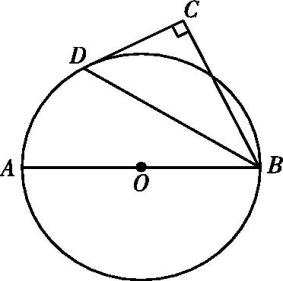


(1)求证:*AC*是☉*O*的切线.

(2)点*D*,*E*分别是*AC*,*OA*的中点,*DE*所在直线交☉*O*于点*F*,*G*,*OA*=4,求*GF*的长.

**类型2　连半径,证垂直**

3. 如图,*AB*为☉*O*的直径,点*C*在☉*O*外,∠*ABC*的平分线与☉*O*交于点*D*,∠*C*=90°.

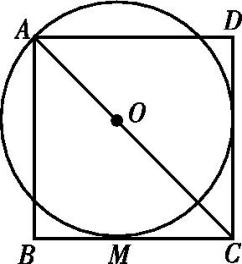


(1)*CD*与☉*O*有怎样的位置关系?请说明理由.

(2)若∠*CDB*=60°,*AB*=6,求的长.

**类型3　作垂直,证半径**

4. [2021河北秦皇岛模拟]如图,*O*为正方形*ABCD*对角线上一点,*BC*与以*O*为圆心、*OA*长为半径的☉*O*相切于点*M*.



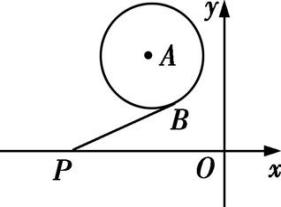
(1)求证:*CD*与☉*O*相切.

(2)若正方形*ABCD*的边长为1,求☉*O*的半径.

**专项二 与圆有关的动态问题**

**类型1　动点、动圆问题**

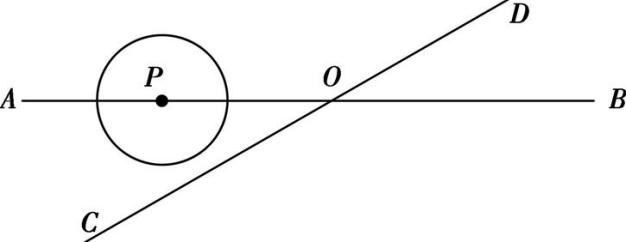
1. 如图,在平面直角坐标系中,*A*点坐标为(-3,4),☉*A*的半径为2,*P*为*x*轴上一动点,*PB*切☉*A*于点*B*,则当*PB*最小时,*P*点的坐标为 ()



A.(-3,0) B.(-1,0)

C.(-5,0) D.(-4,0)或(-2,0)

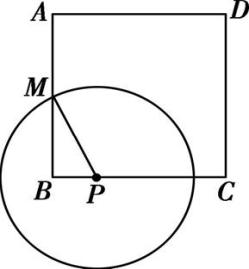
2. 如图,直线*AB*,*CD*相交于点*O*,∠*AOC*=30°,半径为2 cm的☉*P*的圆心*P*在直线*AB*上,且与点*O*的距离为6 cm,如果☉*P*以1 cm/s的速度沿直线*AB*向右移动,那么☉*P*与直线*CD*相切时,☉*P*运动的时间是 ()



A.3 s或10 s B.3 s或8 s

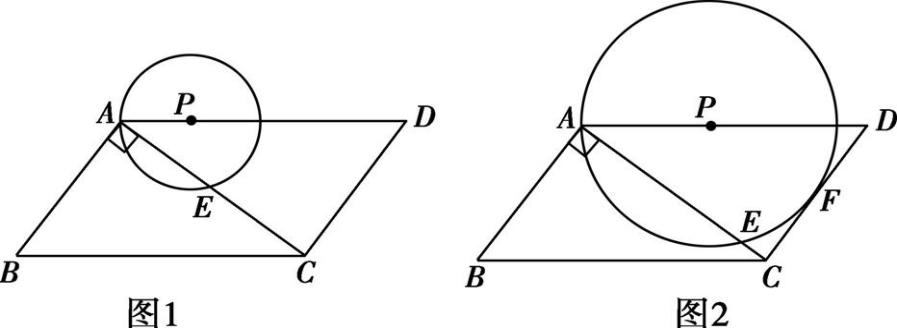
C.2 s或8 s D.2 s或10 s

3. [2021江苏南通月考]如图,正方形*ABCD*的边长为8,*M*是*AB*的中点,*P*是*BC*边上的动点,连接*PM*,以点*P*为圆心,*PM*长为半径作☉*P*.当☉*P*与正方形*ABCD*的边相切时,*BP*的长为 ()



A.3 B.4 C.3或4 D.不确定

4. 如图1,平行四边形*ABCD*中,*AB*⊥*AC*,*AB*=6,*AD*=10,点*P*在边*AD*上运动,以*P*为圆心,*PA*为半径的☉*P*与对角线*AC*交于*A*,*E*两点.

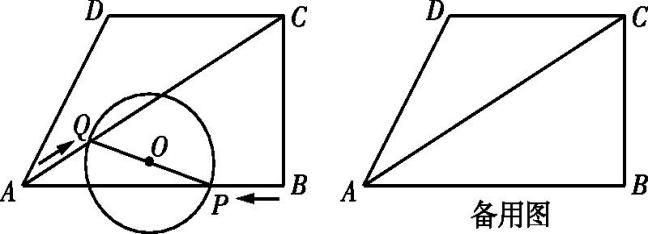


(1)如图2,当☉*P*与边*CD*相切于点*F*时,求*AP*的长;

(2)不难发现,当☉*P*与边*CD*相切时,☉*P*与平行四边形*ABCD*的边有三个公共点,随着*AP*的变化,☉*P*与平行四边形*ABCD*的边的公共点的个数也在变化,若公共点的个数为4,直接写出相对应的*AP*的值或取值范围:.

5. [2021河北石家庄四十二中模拟]如图,在四边形*ABCD*中,*AB*∥*DC*,∠*B*=90°,∠*BAD*=

60°,*BC*=4 cm,对角线*AC*平分∠*BAD*.点*P*是*BA*边上一动点,它从点*B*出发,向点*A*移动,移动速度为1 cm/s;点*Q*是*AC*上一动点,它从点*A*出发,向点*C*移动,移动速度为1 cm/s.设点*P*,*Q*同时出发,移动时间为*t* s(0≤*t*≤6).连接*PQ*,以*PQ*为直径作☉*O*.



(1)求*DC*的长.

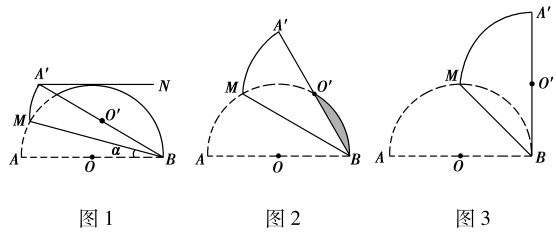
(2)当*t*为何值时,☉*O*与*AC*相切?

(3)当*t*为何值时,线段*AC*被☉*O*截得的线段长恰好等于☉*O*的半径?

(4)当*t*为时,圆心*O*到直线*DC*的距离最短,最短距离为.(直接写出结果)

**类型2　折叠问题**

6. 如图,点*M*是以*AB*为直径的半圆*O*上的一点(不与点*A*,*B*重合),*AB*=4.沿着*BM*折叠半圆*O*,点*A*,*O*的对应点分别是点*A'*,*O'*,设∠*ABM*=*α*.



(1)如图1,过点*A'*作*A'N*∥*AB*,当*A'N*与半圆*O*相切时,求*α*的值;

(2)如图2,当点*O'*落在上时,求阴影部分的面积;

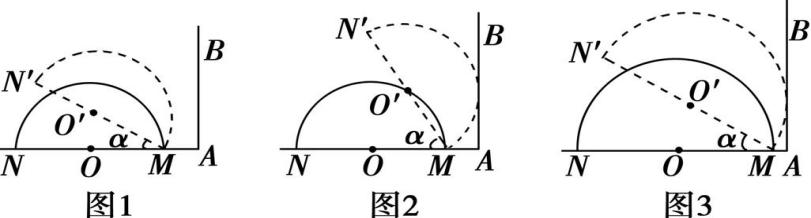
(3)如图3,当*BA'*与☉*O*相切时,求折痕*BM*的长.

**类型3　 旋转问题**

7. 如图,点*A*为半圆*O*的直径*MN*所在直线上一点,射线*AB*垂直于*MN*,垂足为点*A*,半圆绕点*M*顺时针转动,转过的角度记作*α*.设半圆*O*的半径为*R*,*AM*的长度为*m*,回答下列问题.

探究:

(1)若*R*=2,*m*=1,如图1,当旋转30°时,圆心*O'*到射线*AB*的距离是;如图2,当*α*=°时,半圆*O'*与射线*AB*相切.



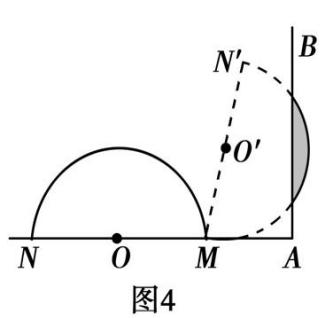
(2)如图3,在(1)的条件下,为了使得半圆*O*转动30°即能与射线*AB*相切,在保持线段*AM*长度不变的条件下,调整半径*R*的大小,请你求出满足要求的*R*,并说明理由.

发现:

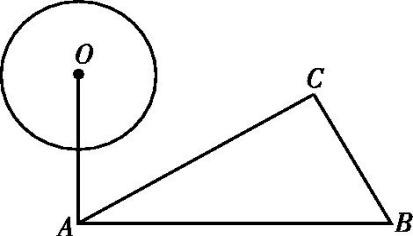
(3)当0°<*α*<90°时,为了对任意旋转角都保证半圆*O*与射线*AB*能够相切,小明探究了cos *α*与*R*,*m*两个量的关系,请你帮助他直接写出这个关系:cos *α*=.(用含有*R*,*m*的代数式表示)

拓展:

(4)如图4,若*R*=*m*,当半圆弧线与射线*AB*有两个公共点时,*α*的取值范围是,并求出在这个变化过程中阴影部分(弓形)面积的最大值(用*m*表示).



8**.** 如图,在△*ABC*中,*BC*=2,∠*C*=90°,∠*CAB*=30°,*OA*=2,且*OA*⊥*AB*,以点*O*为圆心、1为半径画圆,将线段*OA*和☉*O*一起绕点*A*按顺时针方向旋转.



(1)当点*O*第一次落在*AC*上时,旋转角为°,此时点*C*在☉*O*(填写“内”“上”或“外”);

(2)在运动过程中,点*O*到直线*BC*的距离最短为;

(3)当☉*O*与△*ABC*的边相切时,设切点为*P*,求*BP*的长度.

**参考答案**

**专项一 与切线有关的证明与计算**

1.∵*PA*切☉*O*于点*A*,∴∠*PAO*=90°.

∵∠*BOC*+∠*AOB*=180°,且∠*BOC*=∠*APB*,

∴∠*APB*+∠*AOB*=180°,

∴在四边形*AOBP*中,∠*OBP*=360°-90°-180°=90°,

∴*OB*⊥*PB*.

∵*OB*是☉*O*的半径,∴*PB*是☉*O*的切线.

2.(1)∵*AB*=*OA*=*OB*,∴△*OAB*是等边三角形.

∴∠*AOB*=∠*OBA*=∠*OAB*=60°.

∵*BC*=*OB*,∴*BC*=*AB*,∴∠*BAC*=∠*C*.

∵∠*OBA*=∠*BAC*+∠*C*=60°,∴∠*BAC*=∠*C*=30°,

∴∠*OAC*=∠*OAB*+∠*BAC*=90°,∴*OA*⊥*AC*.

∵*OA*是☉*O*的半径,

∴*AC*是☉*O*的切线.

(2)如图,连接*OF*,过点*O*作*OH*⊥*GF*于点*H*,

∴*GF*=2*HF*,∠*OHE*=∠*OHF*=90°.

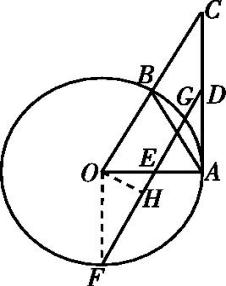
∵点*D*,*E*分别是*AC*,*OA*的中点,

∴*OE*=*AE*=*OA*=×4=2,*DE*∥*OC*,

∴∠*OEH*=∠*AOB*=60°,∴*OH*=*OE*sin∠*OEH*=,

∴*HF*=.

∴*GF*=2*HF*=2.



3.(1)*CD*与☉*O*相切.理由如下:

如图,连接*OD*,

∵*BD*是∠*ABC*的平分线,∴∠*CBD*=∠*ABD*.

∵*OD*=*OB*,∴∠*ODB*=∠*ABD*,

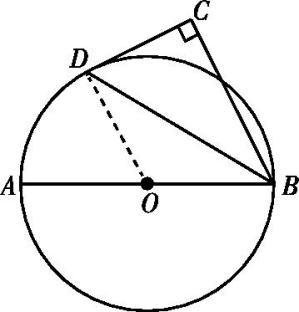
∴∠*ODB*=∠*CBD*,∴*OD*∥*CB*,

∴∠*ODC*=180°-∠*C*=90°,∴*OD*⊥*CD*,∴*CD*与☉*O*相切.

(2)∵∠*CDB*=60°,∴∠*ODB*=30°,

又∵*OB*=*OD*,∴∠*OBD*=∠*ODB*=30°,∴∠*AOD*=60°.

∵*AB*=6,∴*AO*=3,∴的长为=π.



4.(1)如图,连接*OM*,过点*O*作*ON*⊥*CD*于点*N*.

∵*BC*与☉*O*相切于点*M*,∴*OM*⊥*BC*.

∵四边形*ABCD*是正方形,∴*CA*平分∠*BCD*,∴*OM*=*ON*.

∵*OM*是☉*O*的半径,∴*ON*是☉*O*的半径,

∴*CD*与☉*O*相切.

(2)∵四边形*ABCD*为正方形,

∴*AB*=*BC*=1,∠*B*=90°,∠*ACB*=45°,

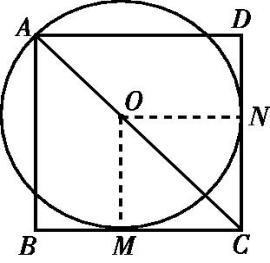
∴*AC*=,∠*MOC*=∠*MCO*=45°,

∴*MC*=*OM*=*OA*,

∴*OC*=*OM*=*OA*.

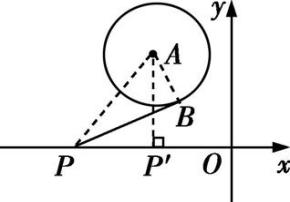
∵*AC*=*OA*+*OC*,∴*OA*+*OA*=,∴*OA*=2-,

即☉*O*的半径为2-.

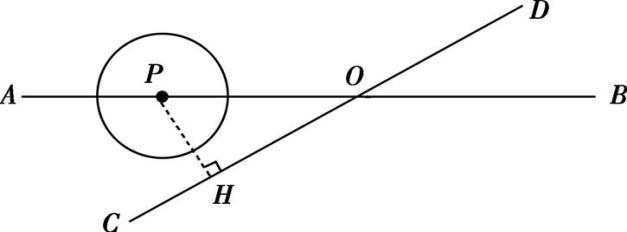


**专项二 与圆有关的动态问题**

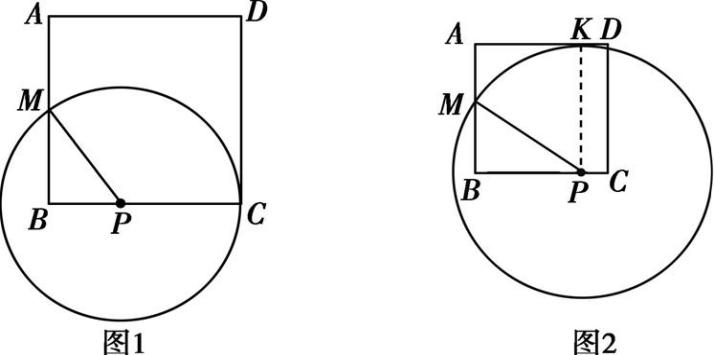
1.A【解析】如图,连接*AB*,*AP*.根据切线的性质定理,得*AB*⊥*PB*.要使*PB*最小,只需*AP*最小.作*AP'*⊥*x*轴于*P'*,根据垂线段最短,知点*P'*为所求.此时*P'*点的坐标是(-3,0).



2.D【解析】如图,过点*P*作*PH*⊥*CD*于点*H*.在Rt△*OPH*中,∠*POH*=30°,∴*OP*=2*PH*.分两种情况:①当点*P*在射线*OA*上,☉*P*与直线*CD*相切时,*PH*=2 cm,则*OP*=2*PH*=4 cm,∴☉*P*运动的距离为6-4=2(cm),∴☉*P*运动的时间是2 s;②当点*P*在射线*OB*上,☉*P*与直线*CD*相切时,*PH*=2 cm,则*OP*=2*PH*=4 cm,∴☉*P*运动的距离为6+4=10(cm),∴☉*P*运动的时间是10 s.综上,☉*P*运动的时间是2 s或10 s.



3.C【解析】当☉*P*与*CD*边相切时,如图1,∵四边形*ABCD*是正方形,∴∠*BCD*=90°,∴点*C*为切点.设*PC*=*PM*=*x*.在Rt△*PBM*中,*PM*2=*BM*2+*PB*2,∴*x*2=42+(8-*x*)2,∴*x*=5,∴*PC*=5,*BP*=*BC*-*PC*=8-5=3.当☉*P*与*AD*边相切时,如图2,设切点为*K*,连接*PK*,则*PK*⊥*AD*,∴四边形*PKDC*是矩形,∴*PM*=*PK*=*CD*=8.在Rt△*PBM*中,*PB*==4.综上所述,*BP*的长为3或4.



4.(1)如图1,连接*PF*.在Rt△*ABC*中,由勾股定理得*AC*==8.

设*AP*=*x*,则*DP*=10-*x*,*PF*=*x*.

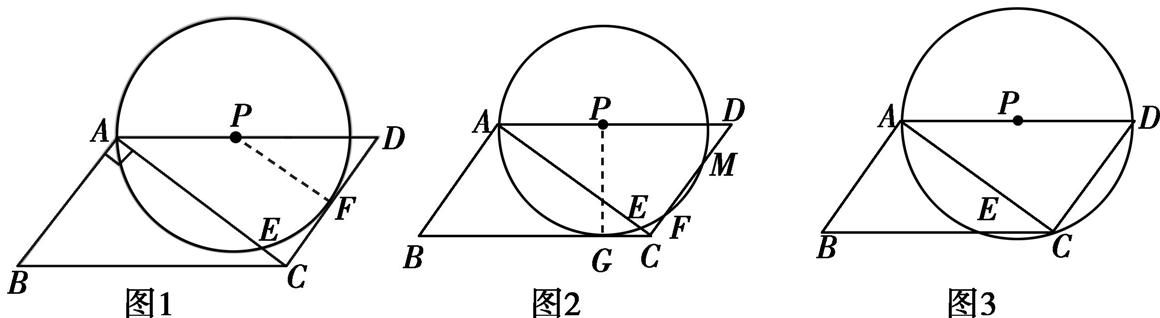
∵☉*P*与边*CD*相切于点*F*,∴*PF*⊥*CD*.

∵四边形*ABCD*是平行四边形,∴*AB*∥*CD*,

又∵*AB*⊥*AC*,∴*AC*⊥*CD*,∴*PF*∥*AC*,

∴△*DPF*∽△*DAC*,∴,即.

解得*x*=,即*AP*=.



(2)<*AP*<或*AP*=5

当☉*P*与*BC*相切时,设切点为*G*,如图2,连接*PG*,则*PG*⊥*BC*.

∵*S*▱*ABCD*=×6×8×2=10*PG*,∴*PG*=.

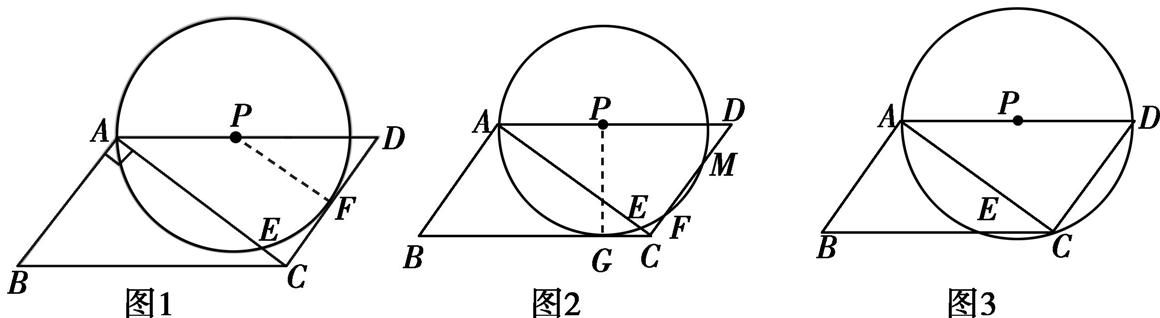
①☉*P*与边*AD*,*CD*分别有两个公共点时,<*AP*<,

即此时☉*P*与平行四边形*ABCD*的边的公共点的个数为4;

②☉*P*过点*A*,*C*,*D*三点,如图3,

☉*P*与平行四边形*ABCD*的边的公共点的个数为4,此时*AP*=5.

综上所述,<*AP*<或*AP*=5.



5.(1)如图1,过点*D*作*DM*⊥*AB*于点*M*.

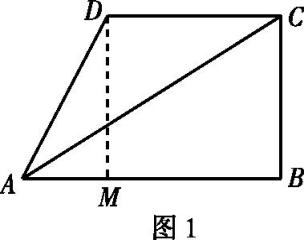
∵*AB*∥*DC*,∠*B*=90°,∴∠*DMB*=∠*DCB*=∠*B*=90°,

∴四边形*DMBC*是矩形,∴*DM*=*BC*=4 cm,

又∵∠*BAD*=60°,∴*AD*=(cm).

∵*AC*平分∠*BAD*,*AB*∥*DC*,∴∠*CAD*=∠*CAB*=∠*ACD*,

∴*DC*=*AD*= cm.



(2)如图2,当☉*O*与*AC*相切时,*QP*⊥*AC*.

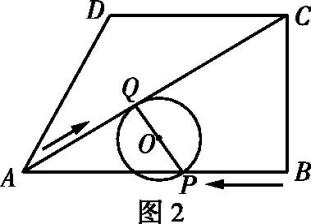
由题意得*AQ*=*BP*=*t* cm.

在Rt△*ABC*中,∠*BAC*=∠*BAD*=30°,*BC*=4 cm,

∴*AC*=8 cm,*AB*=4 cm,∴*AP*=(4-*t*)cm.

∵*AQ*= *AP*,∴*t*= (4-*t*),解得*t*=24-12,

∴当*t*=24-12时,☉*O*与*AC*相切.

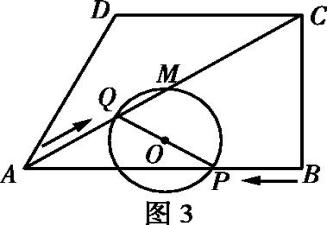


(3)第一种情况:如图3,当∠*OQM*=60°时满足条件.

在△*AQP*中,∠*AQP*=120°,

结合∠*QAP*=30°,易得*AP*=*t*,

∴4-*t*=*t*,解得*t*=6-2.

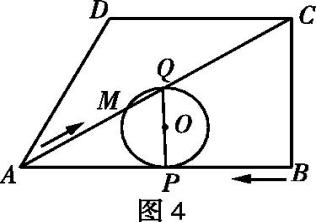


第二种情况:如图4,当∠*OQM*=60°时满足条件.

在△*AQP*中,∠*AQP*=60°,∠*QAP*=30°,∴*AP*=*t*,

∴4-*t*=*t*,解得*t*=16-24.

综上,当*t*=6-2或*t*=16-24时,线段*AC*被☉*O*截得的线段长恰好等于☉*O*的半径.



(4)6 cm

如图5,过圆心*O*作*OH*⊥*DC*于点*H*,则*OH*的长为*O*到*DC*的距离,延长*HO*交*AB*于点*K*,过点*Q*作*QR*⊥*AB*于点*R*,

则四边形*HCBK*是矩形,*QR*=*AQ*=*t* cm,

∴*HK*=*BC*=4 cm.

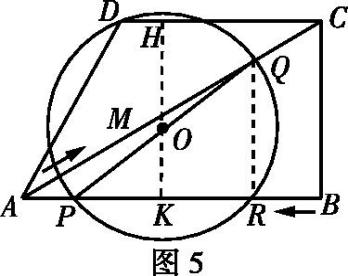
∵点*O*是*PQ*的中点,*OK*⊥*AB*,*QR*⊥*AB*,

∴线段*OK*是△*PQR*的中位线,∴*OK*=*QR*=*t* cm,

∴*OH*=(4-*t*)cm.

∵-<0,0≤*t*≤6,

∴当*t*=6时,*OH*有最小值,最小值为4-×6=(cm).



6.(1)由折叠易知,∠*A'BA*=2∠*ABM*=2*α*,*A'B*=*AB*=4.

如图1,设*A'N*与半圆*O*相切于点*D*,连接*OD*,则*OD*⊥*A'N*,*OD*=*AB*=2.过点*A'*作*A'C*⊥*AB*于点*C*,

∵*A'N*∥*AB*,∴*A'C*=*OD*=2,

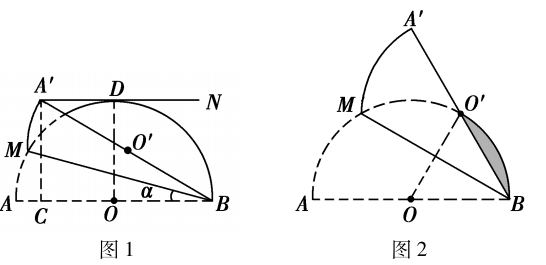
∴sin∠*A'BA*=,∴∠*A'BA*=30°,故*α*=15°.

(2)如图2,连接*OO'*.由折叠的性质可知,*BO'*=*OB*=2.

∵*OO'*=*OB*,∴△*OO'B*为等边三角形,

∴∠*O'OB*=60°,

∴*S*阴影=*S*扇形*OO'B*-*S*△*OO'B*=*OB*2×sin 60°=.



(3)如图3,连接*AM*,则∠*AMB*=90°.

当*BA'*与☉*O*相切时,∠*ABA'*=90°,

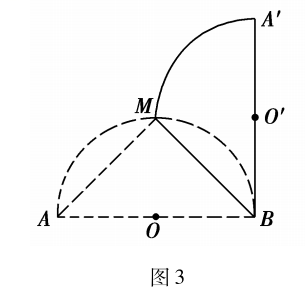
∴∠*ABM*=45°,

∴*AM*=*MB*.

又∵*AB*=4,

∴*BM*=*AB*=2,

即折痕*BM*的长为2.



7.(1)1+60

(2)*R*=4+2.理由如下:

设切点为*P*,连接*O'P*,则*O'P*⊥*AB*.

过点*M*作*MQ*⊥*O'P*于点*Q*,在Rt△*O'QM*中,*O'Q*=*O'M*·cos 30°=*R*cos 30°.

在四边形*APQM*中,∠*A*=∠*QPA*=∠*PQM*=90°,

所以四边形*APQM*是矩形,所以*PQ*=*AM*=1,

所以*O'P*=*R*cos 30°+1,即*R*=*R*cos 30°+1,

解得*R*=4+2.

(3)

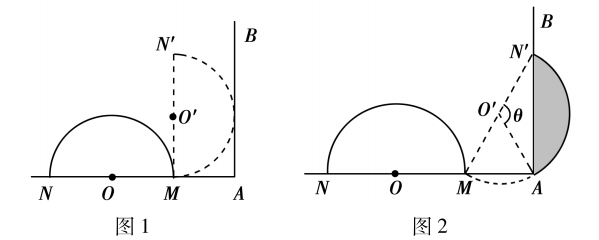
(4)90°<*α*≤120°

解法提示:如图1,因为*R*=*m*,所以当*α*=90°时,半圆与射线相切.如图2,当点*N*落在射线*AB*上时,为半圆与*AB*有两个公共点的最后时刻,*MN'*=2*AM*,∠*N'MA*=60°,*α*=120°.综上,当半圆弧线与射线*AB*有两个公共点时,*α*的取值范围是90°<*α*≤120°.

易知当点*N*落在射线*AB*上时,阴影部分的面积最大,*θ*=2∠*N'MA*=120°,

所以*S*弓形=*S*扇形*AO'N'*-*S*△*AO'N'*=π*m*2-*m*×*m*=*m*2-*m*2=*m*2,

所以阴影部分面积的最大值为*m*2.



8.(1)60外

(2)2-2

分析可知,当*OA*⊥*BC*时,点*O*到直线*BC*的距离最短,最短距离为*AC*-*OA*=2-2.

(3)由(2)可知,点*O*到直线*BC*的距离最短为2-2>1,

∴直线*BC*与☉*O*相离,即☉*O*不可能与*BC*边相切,

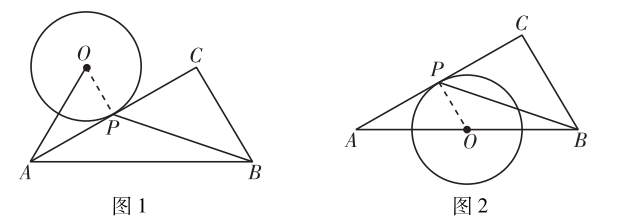
故分以下两种情况讨论:

①如图1,图2,当☉*O*与*AC*边相切于点*P*时,连接*OP*,

则*OP*⊥*AC*,∴*AP*=,

∴*CP*=*AC*-*AP*=2,

∴*BP*=.



②如图3,图4,当☉*O*与*AB*边相切于点*P*时,连接*OP*,

则*OP*⊥*AB*,∴*AP*=.

又∵*AB*=2*BC*=4,∴*BP*=*AB*-*AP*=4-.

综上可知,*BP*=或4-.

