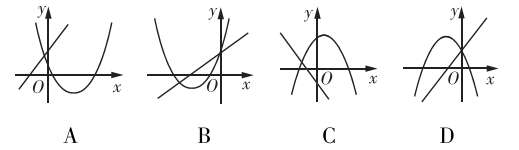
**《第三十章　直线与圆的位置关系》专项拓展训练（三）**

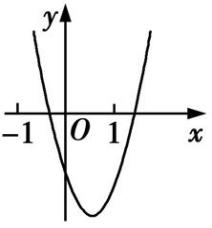
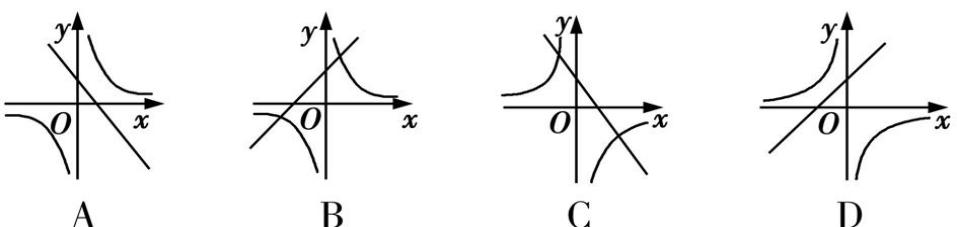
**专项一 函数图像信息题**

**类型1　函数图像共存问题**

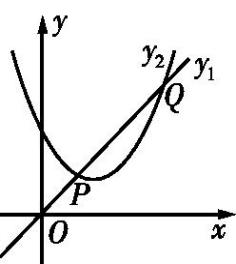
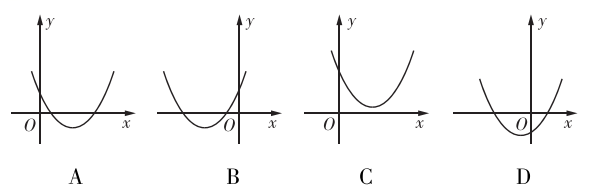
1. [2021河北保定二中一模]一次函数*y*=*acx*+*b*与二次函数*y*=*ax*2+*bx*+*c*在同一平面直角坐标系中的图像可能是 ()



2. [2022广东深圳实验学校期中]二次函数*y*=*ax*2+*bx*+*c*的大致图像如图所示,则一次函数*y*=-*bx*+*b*2-4*ac*与反比例函数*y*=在同一直角坐标系内的图像大致为 ()

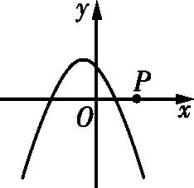
 

3. 如图,一次函数*y*1=*x*与二次函数*y*2=*ax*2+*bx*+*c*的图像相交于*P*,*Q*两点,则函数*y*=*ax*2+(*b*-1)*x*+*c*的图像可能为 ()

**类型2　二次函数的图像与字母系数之间的关系**

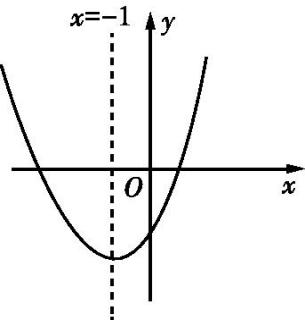
4. [2021湖南株洲中考]二次函数*y*=*ax*2+*bx*+*c*(*a*≠0)的图像如图所示,点*P*在*x*轴的正半轴上,且*OP*=1,设*M*=*ac*(*a*+*b*+*c*),则*M*的取值范围为 ()



A.*M*<-1 B.-1<*M*<0

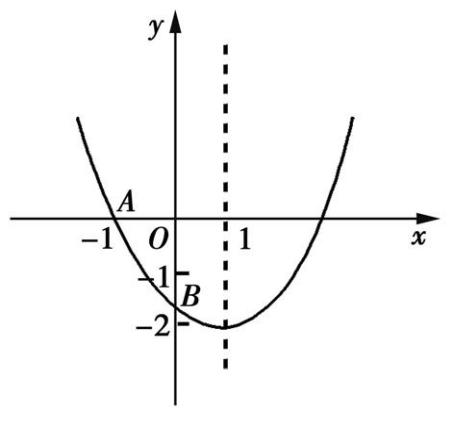
C.*M*<0 D.*M*>0

5. 已知二次函数*y*=*ax*2+*bx*+*c*的图像如图所示,其对称轴为直线*x*=-1,则下列结论正确的是 ()



A.*a*<0 B.*c*>0 C.2*a*=-*b*  D.*b*>*a*

6. [2021湖北恩施州期末]如图,已知二次函数*y*=*ax*2+*bx*+*c*(*a*≠0)的图像与*x*轴交于点*A*(-1,0),与*y*轴的交点*B*在(0,-2)和(0,-1)之间(不包括这两点),图像的对称轴为直线*x*=1.给出下列结论:①*abc*>0;②4*a*+2*b*+*c*>0;③4*ac*-*b*2<8*a*;④<*a*<;⑤*b*>*c*.其中含所有正确结论的选项是()



A.①③ B.①③④

C.②④⑤ D.①③④⑤

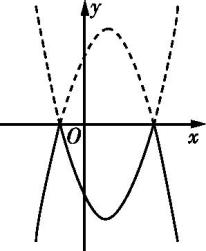
**专项二 二次函数的交点问题**

**类型1　直线与抛物线的交点问题**

1. 将二次函数*y*=*x*2-4*x*+*a*的图像向左平移1个单位长度,再向上平移1个单位长度.若得到的函数图像与直线*y*=2有两个交点,则*a*的取值范围是 ()

A.*a*>3 B.*a*<3 C.*a*>5 D.*a*<5

2. 将二次函数*y*=-*x*2+2*x*+3的图像在*x*轴上方的部分沿*x*轴翻折后,所得新函数的图像如图所示.当直线*y*=*x*+*b*与新函数的图像恰有3个公共点时,*b*的值为 ()



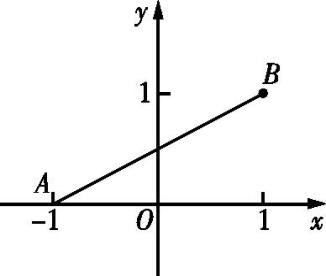
A.-或-3 B.-或-3

C.或-3 D.或-3

3. [2021四川成都中考]在平面直角坐标系*xOy*中,若抛物线*y*=*x*2+2*x*+*k*与*x*轴只有一个交点,则*k*=.

**类型2　线段与抛物线的交点问题**

4. 在平面直角坐标系内,已知点*A*(-1,0)、点*B*(1,1)都在直线*y*=*x*+上,若抛物线*y*=*ax*2-*x*+1(*a*≠0)与线段*AB*有两个不同的交点,则*a*的取值范围是 ()



A.*a*≤-2 B.*a*<

C.1≤*a*<或*a*≤-2 D.-2≤*a*<

5. [2021河北石家庄四十二中模拟]对于题目:在平面直角坐标系中,直线*y*=-*x*+4分别与*x*轴、*y*轴交于点*A*,*B*,过点*A*且平行于*y*轴的直线与过点*B*且平行于*x*轴的直线相交于点*C*,若抛物线*y*=*ax*2-2*ax*-3*a*(*a*≠0)与线段*BC*有唯一公共点,求*a*的取值范围.甲的计算结果是*a*≥,乙的计算结果是*a*<-,则 ()

A.甲的结果正确

B.乙的结果正确

C.甲与乙的结果合在一起正确

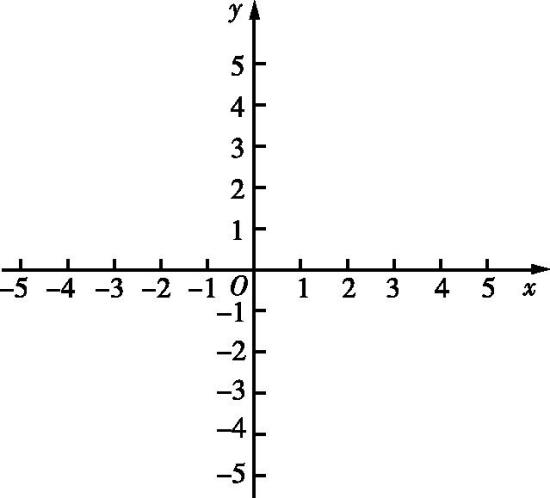
D.甲与乙的结果合在一起也不正确

6. [2021河北石家庄四十二中模拟]在平面直角坐标系*xOy*中,二次函数*y*=*x*2-2*mx*+1的图像与*y*轴的交点为*A*,将点*A*向右平移4个单位长度得到点*B*.

(1)直接写出点*A*与点*B*的坐标;

(2)求出抛物线的对称轴(用含*m*的式子表示);

(3)若函数*y*=*x*2-2*mx*+1的图像与线段*AB*恰有一个公共点,求*m*的取值范围.



**类型3　整点问题**

7. 如图,在平面直角坐标系中,点*P*从原点*O*出发,沿*x*轴向右以每秒1个单位长度的速度运动*t*(*t*>0)秒,抛物线*y*=*x*2+*bx*+*c*经过点*O*和点*P*.已知矩形*ABCD*的三个顶点为*A*(1,0),*B*(1,-5),*D*(4,0).

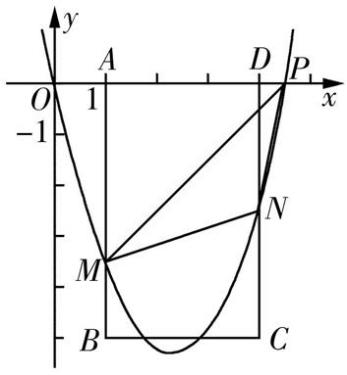
(1)求*c*,*b*的值(用含*t*的代数式表示).

(2)当4<*t*<5时,设抛物线分别与线段*AB*,*CD*交于点*M*,*N*,连接*MP*,*NP*,*MN*.

①在点*P*的运动过程中,你认为∠*AMP*的大小是否会变化?若变化,说明理由;若不变,求出∠*AMP*的值.

②求△*MPN*的面积*S*与*t*的函数关系式,并求出当*t*为何值时,*S*=.

(3)在矩形*ABCD*的内部(不含边界),横、纵坐标都是整数的点称为“好点”.若抛物线将这些“好点”分成数量相等的两部分,请直接写出*t*的取值范围.



**参考答案**

**专项一 函数图像信息题**

1.B【解析】逐项分析如下.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 选项 | 分析 | 结果 |
| A | 由二次函数的图像可知,*a*>0,*c*>0,->0,所以*b*<0,观察一次函数的图像可知*b*>0,矛盾. | 不符合题意 |
| B | 由二次函数的图像可知,*a*>0,*c*>0,-<0,所以*b*>0,观察一次函数的图像可知,*ac*>0,*b*>0. | 符合题意 |
| C | 由二次函数的图像可知,*a*<0,*c*>0,->0,所以*b*>0,观察一次函数的图像可知*b*<0,矛盾. | 不符合题意 |
| D | 由二次函数的图像可知,*a*<0,*c*>0,-<0,所以*b*<0,观察一次函数的图像可知*b*>0,矛盾. | 不符合题意 |

2.B【解析】由题图可知抛物线*y*=*ax*2+*bx*+*c*的开口向上,∴*a*>0.抛物线的对称轴在*y*轴的右侧,∴*a*,*b*异号,∴*b*<0,∴-*b*>0.∵抛物线的顶点在第四象限,∴<0,∴*b*2-4*ac*>0,∴直线*y*=-*bx*+*b*2-4*ac*经过第一、二、三象限.由二次函数图像知,当*x*=-1时,

*y*>0,即*a*-*b*+*c*>0,∴双曲线*y*=经过第一、三象限.综上所述,符合条件的图像是B选项.

3.A【解析】解法一∵一次函数*y*1=*x*与二次函数*y*2=*ax*2+*bx*+*c*的图像有两个交点,∴一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=*x*,即*ax*2+(*b*-1)*x*+*c*=0有两个不相等的实数根,∴函数*y*=*ax*2+(*b*-1)*x*+*c*的图像与*x*轴有两个交点.∵一次函数*y*1=*x*与二次函数*y*2=*ax*2+*bx*+*c*的图像的两个交点*P*,*Q*的横坐标都大于0,∴函数*y*=*ax*2+(*b*-1)*x*+*c*的图像与*x*轴的两个交点的横坐标也都大于0.

解法二∵一次函数*y*1=*x*与二次函数*y*2=*ax*2+*bx*+*c*的图像有两个交点,∴一元二次方程*ax*2+*bx*+*c*=*x*,即*ax*2+(*b*-1)*x*+*c*=0有两个不相等的实数根,∴函数*y*=*ax*2+(*b*-1)*x*+*c*的图像与*x*轴有两个交点,排除选项C.∵函数*y*2=*ax*2+*bx*+*c*的图像与*y*轴的交点在原点的上方,∴*c*>0,∴函数*y*=*ax*2+(*b*-1)*x*+*c*的图像与*y*轴的交点也在原点的上方,排除选项D.∵函数*y*2=*ax*2+*bx*+*c*的图像的对称轴*x*=->0,*a*>0,∴*b*<0,∴*b*-1<0,∴->0,∴函数*y*=*ax*2+(*b*-1)*x*+*c*的图像的对称轴在*y*轴的右边,排除选项B.

4.D　【解析】解法一因为抛物线开口向下,所以*a*<0,因为抛物线与*y*轴的交点在正半轴,所以*c*>0,观察图像可知,当*x*=1时,函数值为负,即*a*+*b*+*c*<0 ,所以*M*=*ac*(*a*+*b*+*c*)

>0.

解法二因为*OP*=1,点*P*不在抛物线上,所以当*x*=1时, *y*=*a*+*b*+*c*<0,因为抛物线开口向下,所以*a*<0,当*y*=0时,得*ax*2+*bx*+*c*=0,由图像知*x*1*x*2=<0,所以*c*>0,所以*ac*<0,所以*ac*(*a*+*b*+*c*)>0,即*M*>0.

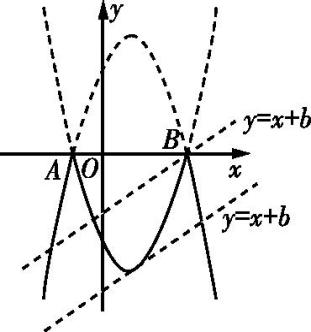
5.D【解析】因为抛物线开口向上,所以*a*>0,故A错误;因为抛物线与*y*轴交于负半轴,所以*c*<0,故B错误;因为抛物线的对称轴为直线*x*=-1,所以-=-1,所以*b*=2*a*,故C错误;由*b*=2*a*且*a*>0,知*b*>*a*,故D正确.

6.D【解析】①∵函数图像开口向上,∴*a*>0.∵图像的对称轴在*y*轴右侧,∴*a*,*b*异号,即*b*<0.∵抛物线与*y*轴交于负半轴,∴*c*<0,∴*abc*>0,故①正确.②∵图像与*x*轴交于点*A*(-1,0),对称轴为直线*x*=1,∴图像与*x*轴的另一个交点坐标为(3,0),∴当*x*=2时,*y*<0,即4*a*+2*b*+*c*<0,故②错误.③∵图像与*x*轴交于点*A*(-1,0),∴当*x*=-1时,*y*=(-1)2×*a*+*b*×(-1)+*c*=0,∴*a*-*b*+*c*=0,即*a*=*b*-*c*,*c*=*b*-*a*.∵图像的对称轴为直线*x*=1,∴-=1,即*b*=-2*a*,∴*c*=*b*-*a*=-2*a*-*a*=-3*a*,∴4*ac*-*b*2=4·*a*·(-3*a*)-(-2*a*)2=-16*a*2<0.∵8*a*>0,∴4*ac*-*b*2<8*a*,故③正确.④∵图像与*y*轴的交点*B*在(0,-2)和(0,-1)之间,∴-2<*c*<-1,∴-2<-3*a*<-1,∴<*a*<,故④正确.⑤∵*a*>0,∴*b*-*c*>0,即*b*>*c*,故⑤正确.

**专项二 二次函数的交点问题**

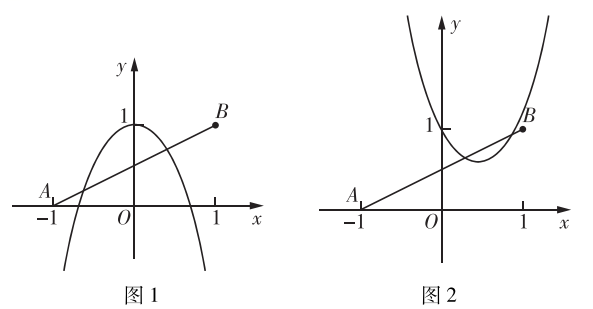
1.D【解析】∵*y*=*x*2-4*x*+*a*=(*x*-2)2-4+*a*,∴将二次函数*y*=*x*2-4*x*+*a*的图像向左平移1个单位长度,再向上平移1个单位长度,得到的函数图像的表达式为*y*=(*x*-2+1)2-4+*a*+1,即*y*=*x*2-2*x*+*a*-2.∵得到的函数图像与直线*y*=2有两个交点,∴关于*x*的一元二次方程2=*x*2-2*x*+*a*-2,即*x*2-2*x*+*a*-4=0有两个不相等的实数根,∴4-4(*a*-4)>0,解得*a*<5.

2.A【解析】二次函数的表达式为*y*=-*x*2+2*x*+3=-(*x*-1)2+4,∴抛物线*y*=-*x*2+2*x*+3的顶点坐标为(1,4).当*y*=0时,*x*2-2*x*-3=0,解得*x*1=-1,*x*2=3,如图,则抛物线*y*=-*x*2+2*x*+3与*x*轴的交点为*A*(-1,0),*B*(3,0).把抛物线*y*=-*x*2+2*x*+3在*x*轴上方的部分沿*x*轴翻折到*x*轴下方,则翻折部分的抛物线的表达式为*y*=(*x*-1)2-4(-1≤*x*≤3),顶点坐标为(1,-4).当直线*y*=*x*+*b*过点*B*时,直线*y*=*x*+*b*与该新图像恰好有3个公共点,∴3+*b*=0,解得*b*=-3.当直线*y*=*x*+*b*与抛物线*y*=(*x*-1)2-4(-1≤*x*≤3)相切时,直线*y*=*x*+*b*与该新图像恰好有3个公共点,即(*x*-1)2-4=*x*+*b*有两个相等的实数解,整理得*x*2-3*x*-*b*-3=0,∴32-4(-*b*-3)=0,解得*b*=-.综上所述,*b*的值为-3或-.

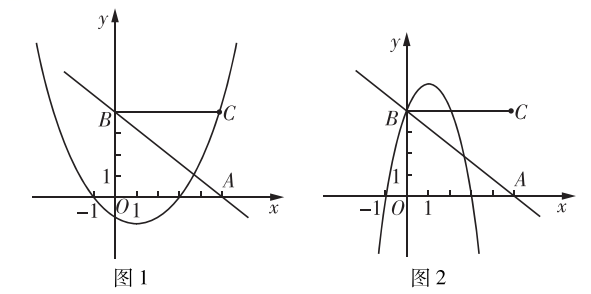
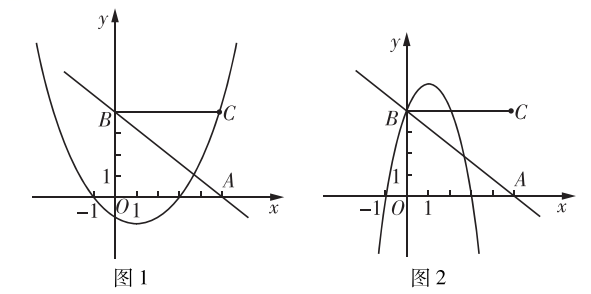


3.1【解析】由题意得*b*2-4*ac*=4-4*k*=0,解得*k*=1.

4.C【解析】 ∵抛物线*y*=*ax*2-*x*+1(*a*≠0)与线段*AB*有两个不同的交点,∴令*x*+=*ax*2-*x*+1,则2*ax*2-3*x*+1=0,∴9-8*a*>0,∴*a*<.①如图1,当*a*<0时,结合图像可得解得*a*≤-2.②如图2,当*a*>0时,结合图像可得解得*a*≥1,∴1≤*a*<.综上所述,*a*的取值范围是1≤*a*<或*a*≤-2.



5.D【解析】 对于*y*=*ax*2-2*ax*-3*a*,令*y*=0,则*x*=-1或3,令*x*=0,则*y*=-3*a*,所以抛物线与*x*轴的交点坐标分别为(-1,0),(3,0),与*y*轴的交点坐标为(0,-3*a*).抛物线*y*=*ax*2-2*ax*-3*a*的对称轴为*x*=1,顶点坐标为(1,-4*a*),因为直线*y*=-*x*+4分别与*x*轴、*y*轴交于点*A*,*B*,所以点*A*,*B*的坐标分别为(5,0),(0,4), 所以点*C*的坐标为(5,4).(1)若*a*>0,如图1,当抛物线过点*C*时,抛物线与线段*BC*有一个公共点,将点*C*的坐标代入抛物线的表达式,得4=25*a*-10*a*-3*a*,解得*a*=,结合图像可知,当抛物线与线段*BC*有唯一公共点时,*a*≥.(2)若*a*<0,当抛物线的顶点在线段*BC*上时,此时抛物线与*BC*有唯一公共点,即-4*a*=4,解得*a*=-1;如图2,当抛物线过点*B*时,抛物线与*BC*有两个交点,将点*B*的坐标代入抛物线的表达式,得-3*a*=4,解得*a*=-,结合图像可知,当抛物线与线段*BC*有唯一公共点时,*a*<-,故当*a*<0时,满足题意的*a*的取值范围为*a*<-或*a*=-1.综上,*a*的取值范围为*a*≥或*a*<-或*a*=-1.

6.【解析】(1)点*A*的坐标为(0,1),点*B*的坐标为(4,1).

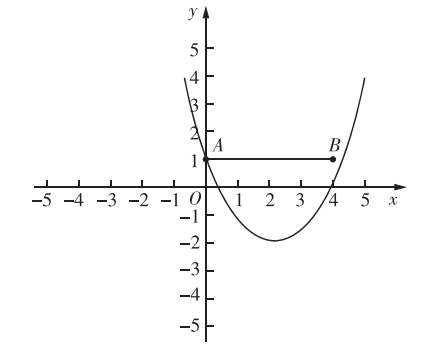
(2)抛物线的对称轴为直线*x*=-=*m*.

(3)当*m*=0时,抛物线的表达式为*y*=*x*2+1,此时抛物线与线段*AB*恰有一个公共点;

当*m*<0时,抛物线的对称轴在*y*轴左侧,易知此时抛物线与线段*AB*恰有一个公共点;

当*m*>0时,如图,结合图像可知,要使抛物线*y*=*x*2-2*mx*+1与线段*AB*恰有一个公共点,则当*x*=4时,*y*<1,即16-8*m*+1<1,解得*m*>2.

综上可知,*m*的取值范围为*m*≤0或*m*>2.



7.【解析】(1)把*x*=0,*y*=0代入*y*=*x*2+*bx*+*c*中,得*c*=0.

把*x*=*t*,*y*=0代入*y*=*x*2+*bx*中,得*t*2+*bt*=0.

∵*t*>0,∴*b*=-*t*.

(2)①不变.

当*x*=1时,*y*=1-*t*,故点*M*的坐标为(1,1-*t*).

由*M*(1,1-*t*),*P*(*t*,0)可得,*AM*=*t*-1,*AP*=*t*-1.

∴*AM*=*AP*,∴∠*AMP*=45°.

②*S*=*S*四边形*AMNP*-*S*△*PAM*=*S*△*DPN*+*S*梯形*NDAM*-*S*△*PAM*=(*t*-4)(4*t*-16)+[(4*t*-16)+(*t*-1)]×3-(*t*-1)(*t*-1)=*t*2-*t*+6.

当*S*=*t*2-*t*+6=时,解得*t*1=,*t*2=.

∵4<*t*<5,∴*t*1=不合题意,舍去.

∴当*t*=时,*S*=.

(3)<*t*<.

提示:下面是第(3)问的思考方法,图示仅供参考.

当*y*=*x*2-*tx*经过点(2,-3)时,“好点”(2,-2)和(2,-1)在抛物线上方,此时-3=22-2*t*,∴*t*=.当*x*=3时,*y*=-,在-1和-2之间,说明“好点”(3,-1)也在抛物线上方.因此,抛物线要将矩形*ABCD*内部的“好点”分成数量相等的两部分,必须使*t*>.当*y*=*x*2-*tx*经过点(3,-2)时,“好点”(3,-1)在抛物线上方,此时-2=32-3*t*,∴*t*=.当*x*=2时,*y*=-,在-3和-4之间,说明“好点”(2,-3),(2,-2)和(2,-1)也在抛物线上方.因此,抛物线要将矩形*ABCD*内部的“好点”分成数量相等的两部分，必须使t＜，t的取值范围是<*t*<.

