**《第三十章　直线与圆的位置关系》专项拓展训练（二）**

**专项一 二次函数的最值**

**类型1　限定自变量的取值范围求最值**

1. 已知-1≤*x*≤,则函数*y*=*x*2+*x*+1 ()

A.有最小值,但无最大值

B.有最小值,有最大值

C.有最小值1,有最大值

D.无最小值,也无最大值

2. [2021浙江嘉兴中考]已知二次函数*y*=-*x*2+6*x*-5.

(1)求二次函数图像的顶点坐标;

(2)当1≤*x*≤4时,函数的最大值和最小值分别为多少?

(3)当*t*≤*x*≤*t*+3时,函数的最大值为*m*,最小值为*n*,若*m*-*n*=3,求*t*的值.

**类型2　已知函数的最值,求待定系数的值**

3. 已知二次函数*y*=*ax*2+4*x*+*a*-1的最大值为2,则*a*的值为 ()

A.3 B.-1 C.4 D.4或-1

4. [2022浙江杭州拱墅区二模]已知二次函数*y*=(*x*-*h*)2+1(*h*为常数),当1≤*x*≤3时,*y*的最小值为5,则*h*的值为 ()

A.1或-5 B.-1或5

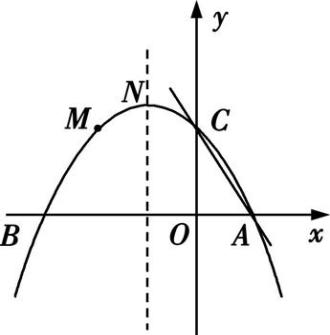
C.1或-3 D.1或3

**类型3　周长或面积的最值问题**

5. 如图,抛物线*y*=*ax*2+*bx*+*c*(*a*≠0)过点*M*(-2,),顶点*N*的坐标为(-1,),且与*x*轴交于*A*,*B*两点,与*y*轴交于点*C*.

(1)求抛物线的表达式;

(2)在直线*AC*上是否存在一点*Q*,使△*QBM*的周长最小?若存在,求出点*Q*的坐标;若不存在,请说明理由.



6. 如图1,已知抛物线*y*=*ax*2+*bx*+*c*(*a*≠0)经过*A*(-3,0),*B*(1,0),*C*(0,3)三点,其顶点为*D*,对称轴是直线*l*,且*l*与*x*轴交于点*H*.

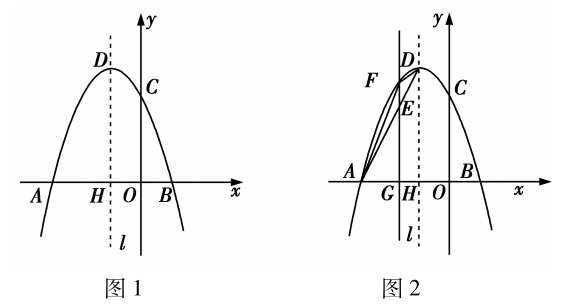
(1)求该抛物线的表达式;

(2)若点*P*是该抛物线的对称轴*l*上一个动点,求△*PBC*周长的最小值;

(3)如图2,若*E*是线段*AD*上的一个动点(*E*与*A*,*D*不重合),过点*E*作平行于*y*轴的直线交抛物线于点*F*,交*x*轴于点*G*,设点*E*的横坐标为*m*,△*ADF*的面积为*S*.

①求*S*与*m*之间的函数关系式;

②*S*是否存在最大值?若存在,求出最大值及此时点*E*的坐标;若不存在,请说明理由.



**专项二 二次函数与一元二次方程的关系**

1. [2021河北唐山路南区期末]小明在解二次函数*y*=*ax*2+*bx*+*c*时,只抄对了*a*=1,*b*=4,求得图像过点(-1,0),他核对时,发现所抄的*c*比原来的*c*值大2,则原抛物线与*x*轴交点的情况是 ()

A.只有一个交点 B.有两个交点

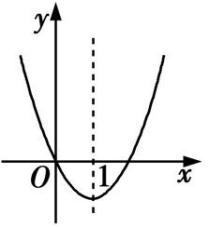
C.没有交点 D.不确定

2. 若二次函数*y*=*ax*2-1的图像经过点(-2,0),则关于*x*的方程*a*(*x*-2)2-1=0的实数根为 ()

A.*x*1=0,*x*2=4 B.*x*1=-2,*x*2=6

C.*x*1=,*x*2= D.*x*1=-4,*x*2=0

3. 二次函数*y*=*x*2+*bx*的图像如图所示,对称轴为直线*x*=1,若关于*x*的一元二次方程*x*2+*bx*-*t*=0(*t*为实数)在-1<*x*<4的范围内有解,则*t*的取值范围是 ()



A.*t*≥-1 B.-1≤*t*<3

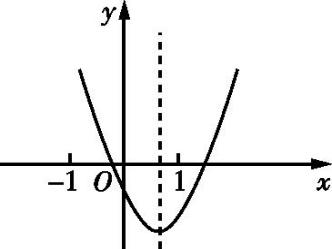
C.-1≤*t*<8 D.3<*t*<8

4. [2021安徽合肥三十八中段测]若*m*,*n*(*m*<*n*)是关于*x*的方程1-(*x*-*a*)(*x*-*b*)=0的两个根,且*a*<*b*,则*a*,*b*,*m*,*n*的大小关系是()

A.*m*<*a*<*b*<*n* B.*a*<*m*<*n*<*b*

C.*a*<*m*<*b*<*n* D.*m*<*a*<*n*<*b*

5. [2021河北邯郸永年区期末]已知二次函数*y*=*ax*2+*bx*+*c*(*a*≠0)的图像如图所示,给出下列结论:①*abc*>0;②2*a*+*b*>0;③*b*2-4*ac*>0;④*a*-*b*+*c*>0.其中正确的有.(只填写序号)



6. 已知抛物线*y*=(*x*-*m*)2-(*x*-*m*),其中*m*是常数.

(1)求证:不论*m*为何值,该抛物线与*x*轴一定有两个交点.

(2)若该抛物线的对称轴为直线*x*=.

①求该抛物线的表达式.

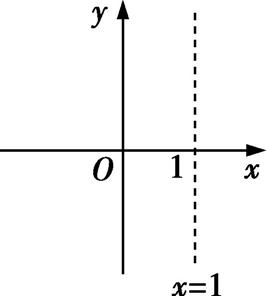
②将该抛物线沿*y*轴向上平移多少个单位长度后,得到的抛物线与*x*轴只有一个交点?

7. 在平面直角坐标系中,抛物线*y*=*x*2-2*x*+*c*(*c*为常数)的对称轴如图所示.

(1)当*c*=-3时,点(*x*1,*y*1)在抛物线*y*=*x*2-2*x*+*c*上,求*y*1的最小值;

(2)若抛物线与*x*轴有两个交点,自左向右分别为点*A*,*B*,且*OA*=*OB*,求抛物线的表达式;

(3)当-1<*x*<0时,抛物线与*x*轴有且只有一个交点,求*c*的取值范围.



**参考答案**

**专项一 二次函数的最值**

1.B【解析】*y*=*x*2+*x*+1=(*x*+)2+,所以该函数图像的对称轴是直线*x*=-,所以当-1≤*x*≤-时,*y*随*x*的增大而减小,当-<*x*≤时,*y*随*x*的增大而增大,所以当*x*=-时,*y*取得最小值,当*x*=时,*y*取得最大值.

2.【解析】(1)∵*y*=-*x*2+6*x*-5=-(*x*-3)2+4,

∴顶点坐标为(3,4).

(2)∵*a*=-1<0,∴图像开口向下.

∵顶点坐标为(3,4),∴当*x*=3时,*y*最大=4.

∵当1≤*x*≤3时,*y*随着*x*的增大而增大,∴当*x*=1时,*y*最小=0.

∵当3<*x*≤4时,*y*随着*x*的增大而减小,∴当*x*=4时,*y*最小=3,

∴当1≤*x*≤4时,函数的最大值为4,最小值为0.

(3)①当*t*+3<3,即*t*<0时,*y*随着*x*的增大而增大,

当*x*=*t*+3时,*m*=-(*t*+3)2+6(*t*+3)-5=-*t*2+4,

当*x*=*t*时,*n*=-*t*2+6*t*-5,

∴*m*-*n*=-*t*2+4-(-*t*2+6*t*-5)=-6*t*+9,

∴-6*t*+9=3,解得*t*=1(不合题意,舍去).

②当0≤*t*<3时,顶点的横坐标在取值范围内,∴*m*=4.

i.当0≤*t*≤时,在*x*=*t*时,*n*=-*t*2+6*t*-5,

∴*m*-*n*=4-(-*t*2+6*t*-5)=*t*2-6*t*+9,

∴*t*2-6*t*+9=3,解得*t*1=3-,*t*2=3+(不合题意,舍去).

ii.当<*t*<3时,在*x*=*t*+3时,*n*=-*t*2+4,

∴*m*-*n*=4-(-*t*2+4)=*t*2,

∴*t*2=3,解得*t*1=,*t*2=-(不合题意,舍去).

③当*t*≥3时,*y*随着*x*的增大而减小,

当*x*=*t*时,*m*=-*t*2+6*t*-5,

当*x*=*t*+3时,*n*=-*t*2+4,

∴*m*-*n*=-*t*2+6*t*-5-(-*t*2+4)=6*t*-9,

∴6*t*-9=3,解得*t*=2(不合题意,舍去).

综上所述,*t*=3-或.

3.B【解析】因为二次函数*y*=*ax*2+4*x*+*a*-1有最大值2,所以*a*<0,*y*最大==2,整理得*a*2-3*a*-4=0,解得*a*=-1或*a*=4,因为*a*<0,所以*a*=-1.

4.B【解析】∵当*x*>*h*时,*y*随*x*的增大而增大,当*x*<*h*时,*y*随*x*的增大而减小,∴①若*h*<1,则*x*=1时,*y*取得最小值5,可得(1-*h*)2+1=5,解得*h*=-1或*h*=3(舍去);②若*h*>3,则*x*=3时,*y*取得最小值5,可得(3-*h*)2+1=5,解得*h*=5或*h*=1(舍去);③若1≤*h*≤3,则当*x*=*h*时,*y*取得最小值为1,不符合题意,舍去.综上,*h*的值为-1或5.

5.【解析】(1)∵抛物线的顶点*N*的坐标为(-1,),

∴可设其表达式为*y*=*a*(*x*+1)2+,

将*M*(-2,)代入,得*a*=-,

故抛物线的表达式为*y*=-*x*2-*x*+.

(2)存在.

如图,连接*BC*,由(1)知*y*=-*x*2-*x*+,

令*x*=0,得*y*=,∴*C*(0,).

令*y*=0,得*x*=1或*x*=-3,∴*A*(1,0),*B*(-3,0).

∴*OA*=1,*OB*=3,*OC*=,

∴*AC*==2,*BC*==2,*AB*=4,

∴*BC*2+*AC*2=*AB*2,∴*BC*⊥*AC*.

延长*BC*至*B'*,使*B'C*=*BC*,连接*B'M*,交直线*AC*于点*Q*,连接*BQ*,*BM*,则*B*,*B'*关于直线*AC*对称,∴*QB*=*QB'*,

∴*QB*+*QM*=*QB'*+*QM*=*MB'*,∴此时△*QBM*的周长最小.

由*B*(-3,0),*C*(0,),易得*B'*(3,2).

设直线*MB'*的表达式为*y*=*kx*+*n*,将*M*(-2,),*B'*(3,2)代入,

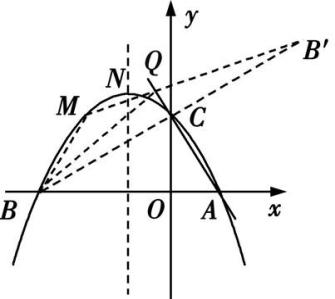
得解得

∴直线*MB'*的表达式为*y*=*x*+.

同理可求得直线*AC*的表达式为*y*=-*x*+.

由解得∴*Q*(-,).

∴在直线*AC*上存在一点*Q*(-,),使△*QBM*的周长最小.



6.【解析】(1)由题意可知解得

∴该抛物线的表达式为*y*=-*x*2-2*x*+3.

(2)△*PBC*的周长为*PB*+*PC*+*BC*,

∵*BC*是定值,∴当*PB*+*PC*最小时,△*PBC*的周长最小.

∵点*A*、点*B*关于抛物线的对称轴*l*对称,

∴连接*AC*,交*l*于点*P*,点*P*即所求的点.

∵*AP*=*BP*,∴*PB*+*PC*+*BC*=*AC*+*BC*.

∵*A*(-3,0),*B*(1,0),*C*(0,3),∴*AC*=3,*BC*=,

∴△*PBC*周长的最小值是3.

(3)①∵抛物线*y*=-*x*2-2*x*+3的顶点*D*的坐标为(-1,4),

*A*(-3,0),∴直线*AD*的表达式为*y*=2*x*+6.

∵点*E*的横坐标为*m*,∴*E*(*m*,2*m*+6),*F*(*m*,-*m*2-2*m*+3),

∴*EF*=-*m*2-2*m*+3-(2*m*+6)=-*m*2-4*m*-3,

∴*S*=*S*△*DEF*+*S*△*AEF*=*EF*·*GH*+*EF*·*AG*=*EF*·*AH*=(-*m*2-4*m*-3)×2=-*m*2-4*m*-3,

即*S*=-*m*2-4*m*-3(-3<*m*<-1).

②存在.

∵*S*=-*m*2-4*m*-3=-(*m*+2)2+1(-3<*m*<-1),

∴当*m*=-2时,*S*最大,且*S*最大=1.

此时,点*E*的坐标为(-2,2).

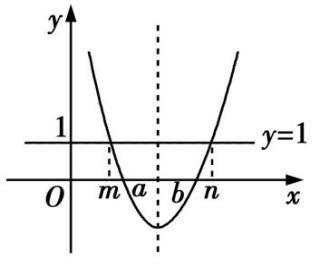
**专项二 二次函数与一元二次方程的关系**

1.B【解析】根据题意得*a*=1,*b*=4,*a*-*b*+*c*=0,所以*c*=3,因为所抄的*c*比原来的*c*值大2,所以原来的*c*值为1,所以原抛物线的表达式为*y*=*x*2+4*x*+1,则42-4×1=12>0,所以原抛物线与*x*轴有两个交点.

2.A　【解析】将二次函数*y*=*ax*2-1的图像向右平移2个单位长度,得二次函数*y*=*a*(*x*-2)2-1的图像,因为二次函数*y*=*ax*2-1的图像经过点(-2,0),所以二次函数*y*=*a*(*x*-2)2-1的图像经过点(0,0),又因为二次函数*y*=*a*(*x*-2)2-1的图像的对称轴为直线*x*=2,所以其图像必过点(4,0),即二次函数*y*=*a*(*x*-2)2-1的图像与*x*轴的交点为(0,0),(4,0),所以方程*a*(*x*-2)2-1=0的实数根为*x*1=0,*x*2=4.

3.C【解析】由题意可得-=1,解得*b*=-2,∴二次函数的表达式为*y*=*x*2-2*x*=(*x*-1)2-1,其图像的顶点坐标为(1,-1).当*x*=-1时,*y*=1+2=3,当*x*=4时,*y*=16-2×4=8.∵*x*2+*bx*-*t*=0的解即抛物线*y*=*x*2+*bx*与直线*y*=*t*的交点的横坐标,∴结合图像可知,当-1≤*t*<8时,*x*2+*bx*-*t*=0在-1<*x*<4的范围内有解.

4.A【解析】根据题意,画出函数*y*=(*x*-*a*)(*x*-*b*)的大致图像,如图所示.抛物线*y*=(*x*-*a*)(*x*-*b*)与*x*轴交于点(*a*,0),(*b*,0).方程1-(*x*-*a*)(*x*-*b*)=0转化为(*x*-*a*)(*x*-*b*)=1,即方程的两个根是抛物线*y*=(*x*-*a*)(*x*-*b*)与直线*y*=1的两个交点的横坐标.由图像可知,*m*<*a*<*b*<*n*.



5.①②③④ 【解析】 ∵抛物线开口向上,∴*a*>0,∵抛物线的对称轴为*x*=->0,∴*b*<0,由抛物线交*y*轴于负半轴,得*c*<0,∴*abc*>0,故①正确.∵-<1,*a*>0,∴-*b*<2*a*,∴2*a*+*b*>0,故②正确.∵抛物线与*x*轴有两个交点,∴方程*ax*2+*bx*+*c*=0有两个不相等的实数根,∴*b*2-4*ac*>0,故③正确.由图像知,当*x*=-1时,*y*>0,即*a*-*b*+*c*>0,故④正确.

6.【解析】(1)*y*=(*x*-*m*)2-(*x*-*m*)=*x*2-(2*m*+1)*x*+*m*2+*m*,∵*b*2-4*ac*=(2*m*+1)2-4(*m*2+*m*)=1>0,

∴不论*m*为何值,该抛物线与*x*轴一定有两个交点.

(2)①∵*x*=-,

∴*m*=2,∴该抛物线的表达式为*y*=*x*2-5*x*+6.

②设将该抛物线沿*y*轴向上平移*k*(*k*>0)个单位长度后,得到的抛物线与*x*轴只有一个交点,则平移后的抛物线的表达式为*y*=*x*2-5*x*+6+*k*,

∵抛物线*y*=*x*2-5*x*+6+*k*与*x*轴只有一个交点,

∴*x*2-5*x*+6+*k*=0的根的判别式*b*2-4*ac*=52-4(6+*k*)=0,

∴*k*=,即将该抛物线沿*y*轴向上平移个单位长度后,得到的抛物线与*x*轴只有一个交点.

7.【解析】(1)当*c*=-3时,抛物线的表达式为*y*=*x*2-2*x*-3,

∴抛物线开口向上,二次函数*y*=*x*2-2*x*-3有最小值,

∴*y*最小==-4,

∴*y*1的最小值为-4.

(2)抛物线与*x*轴有两个交点,

①当点*A*,*B*都在原点的右侧时,如图1所示.

设*A*(*m*,0),∵*OA*=*OB*,∴*B*(2*m*,0),

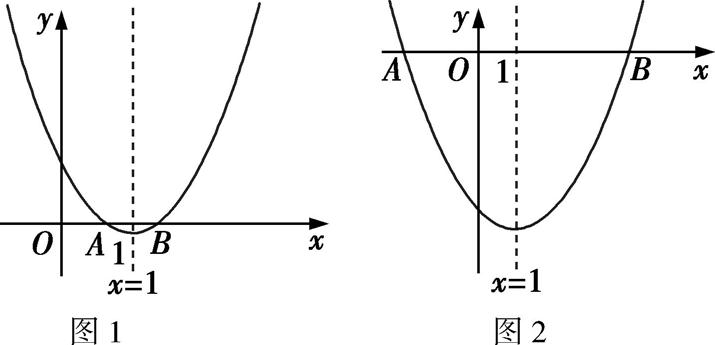
∵抛物线*y*=*x*2-2*x*+*c*的对称轴为直线*x*=1,

由抛物线的对称性得1-*m*=2*m*-1,解得*m*=,∴*A*(,0).

∵点*A*在抛物线*y*=*x*2-2*x*+*c*上,

∴0=+*c*,解得*c*=,

此时抛物线的表达式为*y*=*x*2-2*x*+.



②当点*A*在原点的左侧,点*B*在原点的右侧时,如图2所示.

设*A*(-*n*,0),∵*OA*=*OB*,且点*A*,*B*在原点的两侧,∴*B*(2*n*,0),

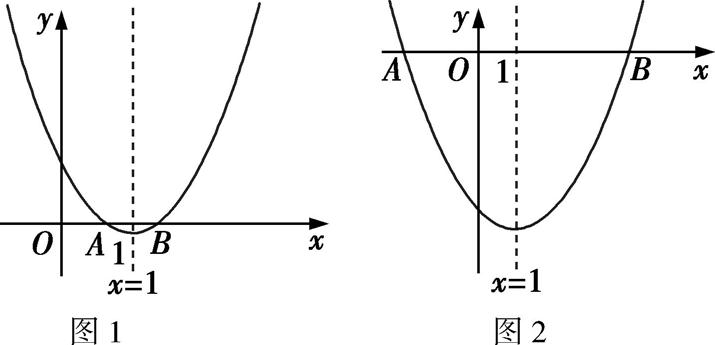
由抛物线的对称性得*n*+1=2*n*-1,解得*n*=2,∴*A*(-2,0).

∵点*A*在抛物线*y*=*x*2-2*x*+*c*上,

∴0=4+4+*c*,解得*c*=-8,

此时抛物线的表达式为*y*=*x*2-2*x*-8.

综上,抛物线的表达式为*y*=*x*2-2*x*+或*y*=*x*2-2*x*-8.



(3)∵抛物线*y*=*x*2-2*x*+*c*与*x*轴有公共点,

∴对于方程*x*2-2*x*+*c*=0,4-4*c*≥0,∴*c*≤1.

当*x*=-1时,*y*=3+*c*;当*x*=0时,*y*=*c*.

∵抛物线的对称轴为直线*x*=1,且当-1<*x*<0时,抛物线与*x*轴有且只有一个交点,

∴3+*c*>0且*c*<0,解得-3<*c*<0.

∴*c*的取值范围为-3<*c*<0.