

数 学

第 I 卷 选择题 (共 30 分)

一、选择题 (本大题共 10 个小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 在每个小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 请选出并在答题卡上将该项涂黑)

1. 计算 $(-1) \times (-3)$ 的结果为 (A)

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. -4

2. 全民阅读有助于提升一个国家、一个民族的精神力量. 图书馆是开展全民阅读的重要场所. 以下是我省四个地市的图书馆标志, 其文字上方的图案是轴对称图形的是 (C)



3. 下列计算正确的是 (D)

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $(-a^3b)^2 = -a^6b^2$ C. $a^6 \div a^3 = a^2$ D. $(a^2)^3 = a^6$

4. 山西是全国电力外送基地, 2022 年山西省全年外送电量达到 1464 亿千瓦时, 同比增长 18.55%. 数据 1464 亿千瓦时用科学记数法表示为 (C)

- A. 1.464×10^8 千瓦时 B. 1464×10^8 千瓦时
C. 1.464×10^{11} 千瓦时 D. 1.464×10^{12} 千瓦时



5. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, AC , BD 为对角线, BD 经过圆心 O . 若 $\angle BAC = 40^\circ$, 则 $\angle DBC$ 的度数为 (B)

A. 40°
C. 60°

B. 50°
D. 70°



(第5题图)

6. 一种弹簧秤最大能称不超过 10kg 的物体, 不挂物体时弹簧的长为 12cm , 每挂重 1kg 物体, 弹簧伸长 0.5cm . 在弹性限度内, 挂重后弹簧的长度 $y(\text{cm})$ 与所挂物体的质量 $x(\text{kg})$ 之间的函数关系式为 (B)

A. $y = 12 - 0.5x$

B. $y = 12 + 0.5x$

C. $y = 10 + 0.5x$

D. $y = 0.5x$

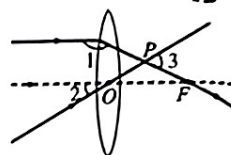
7. 如图, 一束平行于主光轴的光线经凸透镜折射后, 其折射光线与一束经过光心 O 的光线相交于点 P , 点 F 为焦点. 若 $\angle 1 = 155^\circ$, $\angle 2 = 30^\circ$, 则 $\angle 3$ 的度数为 (C)

A. 45°

B. 50°

C. 55°

D. 60°



(第7题图)

8. 若点 $A(-3, a)$, $B(-1, b)$, $C(2, c)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 的图象上, 则 a, b, c 的大小关系用 “ $<$ ” 连接的结果为 (D)

A. $b < a < c$

B. $c < b < a$

C. $a < b < c$

D. $c < a < b$

9. 中国高铁的飞速发展, 已成为中国现代化建设的重要标志. 如图是高铁线路在转向处所设计的圆曲线 (即圆弧), 高铁列车在转弯时的曲线起点为 A , 曲线终点为 B , 过点 A, B 的两条切线相交于点 C , 列车在从 A 到 B 行驶的过程中转角 α 为 60° . 若圆曲线的半径 $OA = 1.5\text{km}$, 则这段圆曲线 \widehat{AB} 的长为 (B)

A. $\frac{\pi}{4}\text{km}$

B. $\frac{\pi}{2}\text{km}$

C. $\frac{3\pi}{4}\text{km}$

D. $\frac{3\pi}{8}\text{km}$



(第9题图)

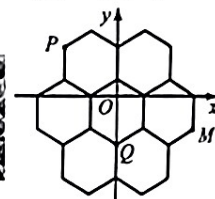
10. 蜂巢结构精巧, 其巢房横截面的形状均为正六边形. 如图是部分巢房的横截面图, 图中 7 个全等的正六边形不重叠且无缝隙, 将其放在平面直角坐标系中, 点 P, Q, M 均为正六边形的顶点. 若点 P, Q 的坐标分别为 $(-2\sqrt{3}, 3)$, $(0, -3)$, 则点 M 的坐标为 (A)

A. $(3\sqrt{3}, -2)$

B. $(3\sqrt{3}, 2)$

C. $(2, -3\sqrt{3})$

D. $(-2, -3\sqrt{3})$



(第10题图)

第 II 卷 非选择题 (共 90 分)

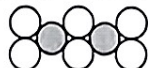
二、填空题 (本大题共 5 个小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. 计算: $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$ 的结果为 3.

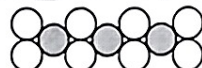
12. 如图是一组有规律的图案, 它由若干个大小相同的圆片组成. 第 1 个图案中有 4 个白色圆片, 第 2 个图案中有 6 个白色圆片, 第 3 个图案中有 8 个白色圆片, 第 4 个图案中有 10 个白色圆片, ... 依此规律, 第 n 个图案中有 $2n+2$ 个白色圆片 (用含 n 的代数式表示).



第1个



第2个

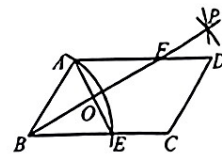


第3个



第4个

13. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, $\angle D = 60^\circ$. 以点 B 为圆心, 以 BA 的长为半径作弧交边 BC 于点 E , 连接 AE . 分别以点 A, E 为圆心, 以大于 $\frac{1}{2}AE$ 的长为半径作弧, 两弧交于点 P , 作射线 BP 交 AE 于点 O , 交边 AD 于点 F , 则 $\frac{OF}{OE}$ 的值为 $\sqrt{3}$.



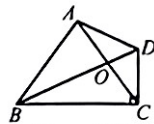
(第13题图)

14. 中国古代的“四书”是指《论语》《孟子》《大学》《中庸》, 它是儒家思想的核心著作, 是中国传统文化的重要组成部分. 若从这四部著作中随机抽取两本 (先随机抽取一本, 不放回, 再随机抽取另一本), 则抽取的两本恰好是《论语》和《大学》的概率是 $\frac{1}{6}$.



15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BCD=90^\circ$, 对角线 AC, BD 相交于点 O . 若

$AB=AC=5, BC=6, \angle ADB=2\angle CBD$, 则 AD 的长为 $\frac{\sqrt{97}}{3}$



(第15题图)

三、解答题(本大题共8个小题,共75分.解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤)

16. (本题共2个小题,每小题5分,共10分)

(1) 计算: $|-8| \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-3+5) \times 2^{-1}$;

解: 原式 $= 8 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \dots\dots\dots (4 \text{分})$

$= 2 - 1 = 1 \dots\dots\dots (5 \text{分})$

(2) 计算: $x(x+2) + (x+1)^2 - 4x$.

解: 原式 $= x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1 - 4x \dots\dots\dots (9 \text{分})$

$= 2x^2 + 1 \dots\dots\dots (10 \text{分})$

17. (本题7分) 解方程: $\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{3}{2x-2}$.

解: 原方程可化为 $\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{3}{2(x-1)} \dots\dots\dots (1 \text{分})$

方程两边同乘 $2(x-1)$, 得 $2 + 2(x-1) = 3 \dots\dots\dots (3 \text{分})$

解, 得 $x = \frac{3}{2} \dots\dots\dots (5 \text{分})$

检验: 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, $2(x-1) \neq 0 \dots\dots\dots (6 \text{分})$

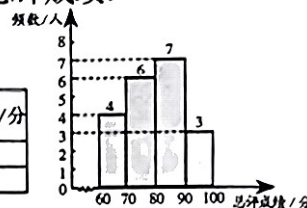
\therefore 原方程的解是 $x = \frac{3}{2} \dots\dots\dots (7 \text{分})$

18. (本题9分) 为增强学生的社会实践能力, 促进学生全面发展, 某校计划建立小记者站, 有20名学生报名参加选拔. 报名的学生需参加采访、写作、摄影三项测试, 每项测试均由七位评委打分(满分100分), 取平均分作为该测试的成绩, 再将采访、写作、摄影三项的测试成绩按4:4:2的比例计算出每人的总评成绩.



小悦、小涵的三项测试成绩和总评成绩如下表, 这20名学生的总评成绩频数直方图(每组合最小值, 不含最大值)如下图.

选手	测试成绩/分			总评成绩/分
	采访	写作	摄影	
小悦	83	72	80	78
小涵	86	84	▲	▲



- (1) 在摄影测试中, 七位评委给小涵打出的分数如下: 67, 72, 68, 69, 74, 69, 71. 这组数据的中位数是 69 分, 众数是 69 分, 平均数是 70 分; $\dots\dots\dots (3 \text{分})$

- (2) 请你计算小涵的总评成绩;

解: $\bar{x} = \frac{86 \times 4 + 84 \times 4 + 70 \times 2}{4 + 4 + 2} \dots\dots\dots (4 \text{分})$

$= 82 \text{ (分)} \dots\dots\dots (5 \text{分})$

答: 小涵的总评成绩为82分.

- (3) 学校决定根据总评成绩择优选拔12名小记者. 试分析小悦、小涵能否入选, 并说明理由.

结论: 小涵能入选, 小悦不一定能入选. $\dots\dots\dots (7 \text{分})$

理由: 由频数直方图可得, 总评成绩不低于80分的学生有10名, 总评成绩不低于70分且小于80分的学生有6名. 小涵和小悦的总评成绩分别是82分, 78分, 学校要选拔12名小记者. 小涵的成绩在前12名, 因此小涵一定能入选; 小悦的成绩不一定在前12名, 因此小悦不一定能入选. $\dots\dots\dots (9 \text{分})$

19. (本题9分) 风陵渡黄河公路大桥是连接山西、陕西、河南三省的交通要塞. 该大桥限重标志牌显示, 载重后总质量超过30吨的车辆禁止通行. 现有一辆自重8吨的卡车, 要运输若干套某种设备, 每套设备由1个A部件和3个B部件组成, 这种设备必须成套运输. 已知1个A部件和2个B部件的总质量为2.8吨, 2个A部件和3个B部件的质量相等.



- (1) 求1个A部件和1个B部件的质量各是多少;

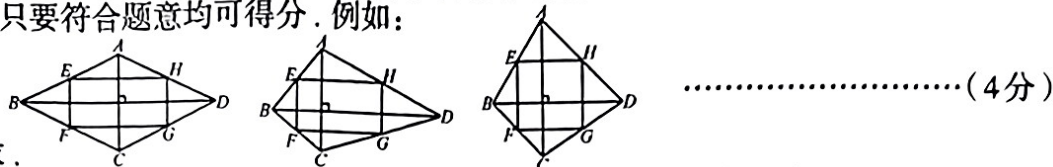
解: 设一个A部件的质量为 x 吨, 一个B部件的质量为 y 吨. $\dots\dots\dots (1 \text{分})$

根据题意, 得 $\begin{cases} x + 2y = 2.8, \\ 2x = 3y. \end{cases} \dots\dots\dots (3 \text{分})$

解, 得 $\begin{cases} x = 1.2, \\ y = 0.8. \end{cases} \dots\dots\dots (4 \text{分})$

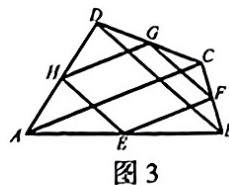
答: 一个A部件的质量为1.2吨, 一个B部件的质量为0.8吨. $\dots\dots\dots (5 \text{分})$

任务: (1) 填空: 材料中的依据 1 是指: 三角形中位线定理(或三角形的中位线平行于第三边, 且等于第三边的一半); (1 分)
 依据 2 是指: 平行四边形的定义(或两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形); ... (2 分)
 (2) 请用刻度尺、三角板等工具, 画一个四边形 $ABCD$ 及它的瓦里尼翁平行四边形 $EFGH$, 使得四边形 $EFGH$ 为矩形; (要求同时画出四边形 $ABCD$ 的对角线)
 答案不唯一, 只要符合题意均可得分. 例如:



如图即为所求.

(3) 在图 1 中, 分别连接 AC, BD 得到图 3, 请猜想瓦里尼翁平行四边形 $EFGH$ 的周长与对角线 AC, BD 长度的关系, 并证明你的结论.
 瓦里尼翁平行四边形 $EFGH$ 的周长等于对角线 AC 与 BD 长度的和. (5 分)
 证明: \because 点 E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点,

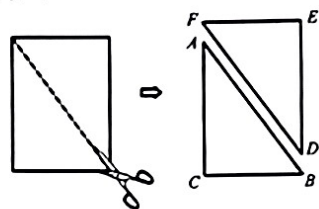


$$\therefore EF = \frac{1}{2}AC, GH = \frac{1}{2}AC. \therefore EF + GH = AC. \dots\dots (6 \text{ 分})$$

同理 $EH + FG = BD. \therefore$ 四边形 $EFGH$ 的周长 $= EF + GH + EH + FG = AC + BD. \dots\dots (7 \text{ 分})$
 即 瓦里尼翁平行四边形 $EFGH$ 的周长等于对角线 AC 与 BD 长度的和.

22. (本题 12 分) 综合与实践

问题情境: “综合与实践”课上, 老师提出如下问题: 将图 1 中的矩形纸片沿对角线剪开, 得到两个全等的三角形纸片, 表示为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$, 其中 $\angle ACB = \angle DEF = 90^\circ, \angle A = \angle D$. 将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 按图 2 所示方式摆放, 其中点 B 与点 F 重合 (标记为点 B). 当 $\angle ABE = \angle A$ 时, 延长 DE 交 AC 于点 G . 试判断四边形 $BCGE$ 的形状, 并说明理由.



(第 22 题图 1)

数学思考: (1) 请你解答老师提出的问题;

解: 四边形 $BCGE$ 为正方形. (1 分)

理由如下: $\because \angle BED = 90^\circ, \therefore \angle BEG = 180^\circ - \angle BED = 90^\circ. \dots\dots (2 \text{ 分})$

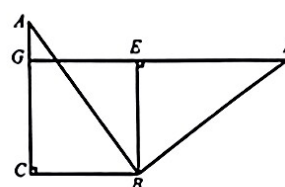
$\because \angle ABE = \angle A, \therefore AC \parallel BE. \therefore \angle CGE = \angle BED = 90^\circ. \dots\dots (3 \text{ 分})$

$\because \angle C = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $BCGE$ 为矩形. (4 分)

$\because \triangle ACB \cong \triangle DEB, \therefore BC = BE. \therefore$ 矩形 $BCGE$ 为正方形. (5 分)

深入探究: (2) 老师将图 2 中的 $\triangle DBE$ 绕点 B 逆时针方向旋转, 使点 E 落在 $\triangle ABC$ 内部, 并让同学们提出新的问题.

① “善思小组”提出问题: 如图 3, 当 $\angle ABE = \angle BAC$ 时, 过点 A 作 $AM \perp BE$ 交 BE 的延长线于点 M , BM 与 AC 交于点 N . 试猜想线段 AM 和 BE 的数量关系, 并加以证明. 请你解答此问题;



(第 22 题图 2)

解: ① $AM = BE. \dots\dots (6 \text{ 分})$

解法一: 证明: $\because AM \perp BE$ 交 BE 的延长线于点 $M, \therefore \angle M = 90^\circ.$

$\because \angle C = 90^\circ, \therefore \angle M = \angle C. \dots\dots (7 \text{ 分})$

$\because \angle ABE = \angle BAC, AB = BA, \therefore \triangle BAM \cong \triangle ABC. \dots\dots (8 \text{ 分})$

$\therefore AM = BC.$

由 (1) 得 $BE = BC, \therefore AM = BE. \dots\dots (9 \text{ 分})$

解法二: 证明: $\because \angle ABE = \angle BAC, \therefore AN = BN. \dots\dots (7 \text{ 分})$

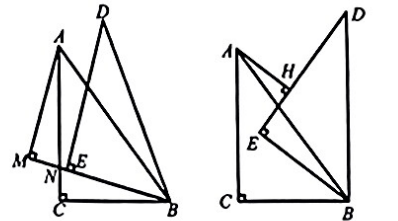
$\because \angle C = 90^\circ, \therefore BC \perp AN.$

$\because AM \perp BE$, 即 $AM \perp BN,$

$$\therefore S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2}AN \cdot BC = \frac{1}{2}BN \cdot AM. \dots\dots (8 \text{ 分})$$

$\because AN = BN, \therefore BC = AM.$

由 (1) 得 $BE = BC, \therefore AM = BE. \dots\dots (9 \text{ 分})$



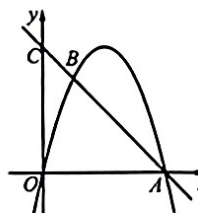
(第 22 题图 3) (第 22 题图 4)

② “智慧小组”提出问题: 如图 4, 当 $\angle CBE = \angle BAC$ 时, 过点 A 作 $AH \perp DE$ 于点 H , 若 $BC = 9, AC = 12$, 求 AH 的长. 请你思考此问题, 直接写出结果.

解: AH 的长为 $\frac{27}{5}. \dots\dots (12 \text{ 分})$

23. (本题 13 分) 综合与探究

如图, 二次函数 $y = -x^2 + 4x$ 的图象与 x 轴的正半轴交于点 A , 经过点 A 的直线与该函数图象交于点 $B(1, 3)$, 与 y 轴交于点 C . (1) 求直线 AB 的函数表达式及点 C 的坐标;



(第 23 题图)

解: 由 $y = -x^2 + 4x$ 得, 当 $y = 0$ 时, $-x^2 + 4x = 0$.

解, 得 $x_1 = 0, x_2 = 4$. \therefore 点 A 在 x 轴正半轴上. \therefore 点 A 的坐标为 $(4, 0)$. \cdots (1分)

设直线 AB 的函数表达式为 $y = kx + b (k \neq 0)$.

将 A, B 两点的坐标 $(4, 0), (1, 3)$ 分别代入 $y = kx + b$, 得 $\begin{cases} 4k + b = 0, \\ k + b = 3. \end{cases} \cdots \cdots (2分)$

解, 得 $\begin{cases} k = -1, \\ b = 4. \end{cases} \therefore$ 直线 AB 的函数表达式为 $y = -x + 4$. $\cdots \cdots (3分)$

将 $x = 0$ 代入 $y = -x + 4$, 得 $y = 4$. \therefore 点 C 的坐标为 $(0, 4)$. $\cdots \cdots (4分)$

(2) 点 P 是第一象限内二次函数图象上的一个动点, 过点 P 作直线 $PE \perp x$ 轴于点 E , 与直线 AB 交于点 D , 设点 P 的横坐标为 m .

① 当 $PD = \frac{1}{2}OC$ 时, 求 m 的值;

解: \because 点 P 在第一象限内二次函数 $y = -x^2 + 4x$ 的图象上, 且 $PE \perp x$ 轴于点 E , 与直线 AB 交于点 D , 其横坐标为 m .

\therefore 点 P, D 的坐标分别为 $P(m, -m^2 + 4m), D(m, -m + 4)$. $\cdots \cdots (5分)$

$\therefore PE = -m^2 + 4m, DE = -m + 4, OE = m$.

\because 点 C 的坐标为 $(0, 4), \therefore OC = 4. \because PD = \frac{1}{2}OC, \therefore PD = 2$.

如图 1, 当点 P 在直线 AB 上方时,

$PD = PE - DE = -m^2 + 4m - (-m + 4) = -m^2 + 5m - 4$. $\cdots \cdots (6分)$

$\because PD = 2, \therefore -m^2 + 5m - 4 = 2$. 解, 得 $m_1 = 2, m_2 = 3$. $\cdots (7分)$

如图 2, 当点 P 在直线 AB 下方时,

$PD = DE - PE = -m + 4 - (-m^2 + 4m) = m^2 - 5m + 4$. $\cdots \cdots (8分)$

$\because PD = 2, \therefore m^2 - 5m + 4 = 2$.

解, 得 $m = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \because 0 < m < 1, \therefore m = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$. $\cdots (9分)$

综上所述, m 的值为 2 或 3 或 $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$.

② 当点 P 在直线 AB 上方时, 连接 OP , 过点 B 作 $BQ \perp x$ 轴于点 Q , BQ 与 OP 交于点 F , 连接 DF . 设四边形 $FQED$ 的面积为 S , 求 S 关于 m 的函数表达式, 并求出 S 的最大值.

解: 如图 3, 由①得, $OE = m, PE = -m^2 + 4m, DE = -m + 4$.

$\because BQ \perp x$ 轴于点 Q , 交 OP 于点 F , 点 B 的坐标为 $(1, 3)$,

$\therefore OQ = 1. \because$ 点 P 在直线 AB 上方, $\therefore EQ = m - 1$.

$\because PE \perp x$ 轴于点 $E, \therefore \angle OQF = \angle OEP = 90^\circ. \therefore FQ \parallel DE$.

$\angle FOQ = \angle POE, \therefore \triangle FOQ \sim \triangle POE. \therefore \frac{FQ}{PE} = \frac{OQ}{OE}$.

$\therefore \frac{FQ}{-m^2 + 4m} = \frac{1}{m}. \therefore FQ = \frac{-m^2 + 4m}{m} = -m + 4$. $\cdots \cdots (10分)$

$\therefore FQ = DE. \therefore$ 四边形 $FQED$ 为平行四边形. $\cdots \cdots (11分)$

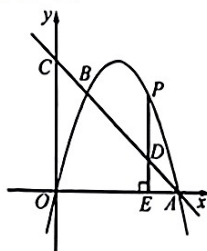
$\therefore S = EQ \cdot FQ = (m - 1)(-m + 4)$.

即 $S = -m^2 + 5m - 4$. $\cdots \cdots (12分)$

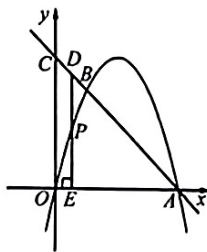
$S = -m^2 + 5m - 4 = -(m - \frac{5}{2})^2 + \frac{9}{4}$

$\therefore 1 < m < 4,$

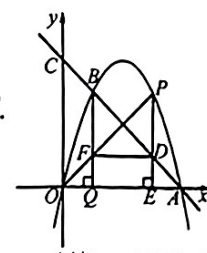
\therefore 当 $m = \frac{5}{2}$ 时, S 的最大值为 $\frac{9}{4}$. $\cdots \cdots (13分)$



(第 23 题图 1)



(第 23 题图 2)



(第 23 题图 3)