

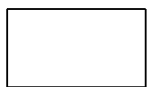
数 学 试 题

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

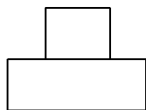
1. 下列实数中，最大的数是

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

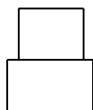
2. 右图是由一个长方体和一个圆柱组成的几何体，它的俯视图是



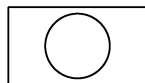
A



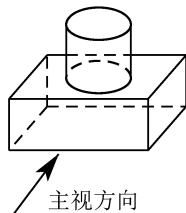
B



C



D



3. 若某三角形的三边长分别为 3, 4, m , 则 m 的值可以是

- A. 1 B. 5 C. 7 D. 9

4. 党的二十大报告指出，我国建成世界上规模最大的教育体系、社会保障体系、医疗卫生体系，教育普及水平实现历史性跨越，基本养老保险覆盖十亿四千万人，基本医疗保险参保率稳定在百分之九十五. 将数据 1 040 000 000 用科学记数法表示为

- A. 104×10^7 B. 10.4×10^8
C. 1.04×10^9 D. 0.104×10^{10}

5. 下列计算正确的是

- A. $(a^2)^3 = a^6$ B. $a^6 \div a^2 = a^3$
C. $a^3 \cdot a^4 = a^{12}$ D. $a^2 - a = a$

6. 根据福建省统计局数据,福建省 2020 年的地区生产总值为 43 903.89 亿元,2022 年的地区生产总值为 53 109.85 亿元. 设这两年福建省地区生产总值的年平均增长率为 x , 根据题意可列方程

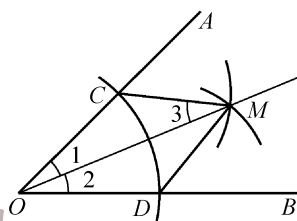
- A. $43\,903.89(1+x) = 53\,109.85$ B. $43\,903.89(1+x)^2 = 53\,109.85$
C. $43\,903.89x^2 = 53\,109.85$ D. $43\,903.89(1+x^2) = 53\,109.85$

7. 阅读以下作图步骤:

- ①在 OA 和 OB 上分别截取 OC, OD , 使 $OC=OD$;
②分别以 C, D 为圆心,以大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧,两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 M ;
③作射线 OM , 连接 CM, DM , 如图所示.

根据以上作图,一定可以推得的结论是

- A. $\angle 1 = \angle 2$ 且 $CM = DM$
B. $\angle 1 = \angle 3$ 且 $CM = DM$
C. $\angle 1 = \angle 2$ 且 $OD = DM$
D. $\angle 2 = \angle 3$ 且 $OD = DM$



8. 为贯彻落实教育部办公厅关于“保障学生每天校内、校外各 1 小时体育活动时间”的要求,学校要求学生每天坚持体育锻炼. 小亮记录了自己一周内每天校外锻炼的时间(单位:分钟), 并制作了如图所示的统计图.

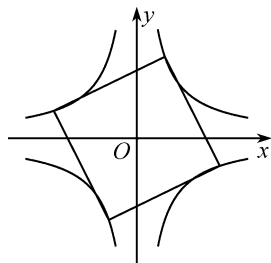


根据统计图,下列关于小亮该周每天校外锻炼时间的描述,正确的是

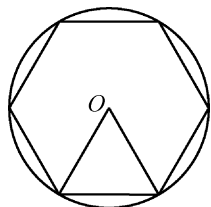
- A. 平均数为 70 分钟 B. 众数为 67 分钟
C. 中位数为 67 分钟 D. 方差为 0

9. 如图,正方形四个顶点分别位于两个反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 和 $y = \frac{n}{x}$ 的图象的四个分支上, 则实数 n 的值为

- A. -3 B. $-\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{3}$ D. 3



10. 我国魏晋时期数学家刘徽在《九章算术注》中提到了著名的“割圆术”，即利用圆的内接正多边形逼近圆的方法来近似估算，指出“割之弥细，所失弥少. 割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣”. “割圆术”孕育了微积分思想，他用这种思想得到了圆周率 π 的近似值为3.1416. 如图， $\odot O$ 的半径为1，运用“割圆术”，以圆内接正六边形面积近似估计 $\odot O$ 的面积，可得 π 的估计值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，若用圆内接正十二边形作近似估计，可得 π 的估计值为

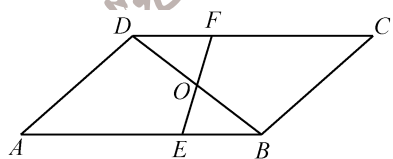


- A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $2\sqrt{3}$

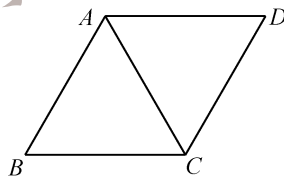
二、填空题：本题共6小题，每小题4分，共24分。

11. 某仓库记账员为方便记账，将进货10件记作+10，那么出货5件应记作_____.

12. 如图，在 $\square ABCD$ 中， O 为 BD 的中点， EF 过点 O 且分别交 AB ， CD 于点 E ， F . 若 $AE=10$ ，则 CF 的长为_____.



13. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB=10$ ， $\angle B=60^\circ$ ，则 AC 的长为_____.



14. 某公司欲招聘一名职员. 对甲、乙、丙三名应聘者进行了综合知识、工作经验、语言表达等三方面的测试，他们的各项成绩如下表所示：

项目 应聘者	综合知识	工作经验	语言表达
甲	75	80	80
乙	85	80	70
丙	70	78	70

如果将每位应聘者的综合知识、工作经验、语言表达的成绩按5:2:3的比例计算其总成绩，并录用总成绩最高的应聘者，则被录用的是_____.

15. 已知 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ ，且 $a \neq -b$ ，则 $\frac{ab - a}{a + b}$ 的值为_____.

16. 已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax + b$ ($a > 0$)经过 $A(2n + 3, y_1)$ ， $B(n - 1, y_2)$ 两点，若 A ， B 分别位于抛物线对称轴的两侧，且 $y_1 < y_2$ ，则 n 的取值范围是_____.

三、解答题：本题共 9 小题，共 86 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (8 分)

计算： $\sqrt{9} - 2^0 + |-1|$.

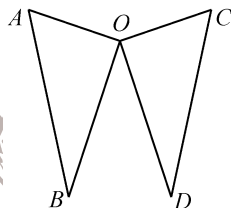
18. (8 分)

解不等式组：
$$\begin{cases} 2x + 1 < 3, & \text{①} \\ \frac{x}{2} + \frac{1 - 3x}{4} \leq 1. & \text{②} \end{cases}$$

19. (8 分)

如图， $OA = OC$ ， $OB = OD$ ， $\angle AOD = \angle COB$.

求证： $AB = CD$.



20. (8 分)

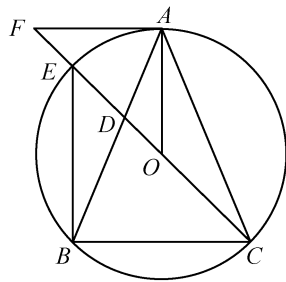
先化简，再求值： $\left(1 - \frac{x+1}{x}\right) \div \frac{x^2-1}{x^2-x}$ ，其中 $x = \sqrt{2} - 1$.

21. (8 分)

如图，已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， CO 的延长线交 AB 于点 D ，交 $\odot O$ 于点 E ，交 $\odot O$ 的切线 AF 于点 F ，且 $AF \parallel BC$.

(1) 求证： $AO \parallel BE$ ；

(2) 求证： AO 平分 $\angle BAC$.



22. (10 分)

为促进消费，助力经济发展，某商场决定“让利酬宾”，于“五一”期间举办了抽奖促销活动。活动规定：凡在商场消费一定金额的顾客，均可获得一次抽奖机会。抽奖方案如下：从装有大小质地完全相同的 1 个红球及编号为①②③的 3 个黄球的袋中，随机摸出 1 个球，若摸得红球，则中奖，可获得奖品；若摸得黄球，则不中奖。同时，还允许未中奖的顾客将其摸得的球放回袋中，并再往袋中加入 1 个红球或黄球（它们的大小质地与袋中的 4 个球完全相同），然后从中随机摸出 1 个球，记下颜色后不放回，再从中随机摸出 1 个球，若摸得的两球的颜色相同，则该顾客可获得精美礼品一份。现已知某顾客获得抽奖机会。

(1) 求该顾客首次摸球中奖的概率；

(2) 假如该顾客首次摸球未中奖，为了有更大机会获得精美礼品，他应往袋中加入哪种颜色的球？说明你的理由。

23. (10 分)

阅读下列材料,回答问题.

任务:测量一个扁平状的小水池的最大宽度,该水池东西走向的最大宽度 AB 远大于南北走向的最大宽度,如图 1.

工具:一把皮尺(测量长度略小于 AB)和一台测角仪,如图 2. 皮尺的功能是直接测量任意可到达的两点间的距离(这两点间的距离不大于皮尺的测量长度);测角仪的功能是测量角的大小,即在任一点 O 处,对其视线可及的 P, Q 两点,可测得 $\angle POQ$ 的大小,如图 3.



图 1



图 2

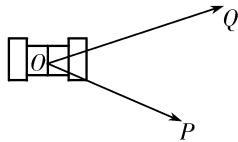


图 3

小明利用皮尺测量,求出了小水池的最大宽度 AB ,其测量及求解过程如下:
测量过程:

- (i) 在小水池外选点 C , 如图 4, 测得 $AC=a$ m, $BC=b$ m;
- (ii) 分别在 AC, BC 上测得 $CM=\frac{a}{3}$ m, $CN=\frac{b}{3}$ m; 测得 $MN=c$ m.

求解过程:

由测量知, $AC=a, BC=b, CM=\frac{a}{3}, CN=\frac{b}{3}$,

$\therefore \frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{1}{3}$, 又 \therefore ① _____,

$\therefore \triangle CMN \sim \triangle CAB, \therefore \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}$.

又 $\therefore MN=c, \therefore AB=$ ② _____ (m).

故小水池的最大宽度为 * * * m.

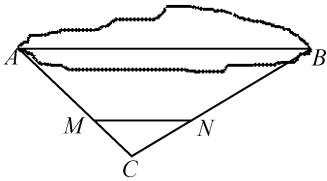


图 4

- (1) 补全小明求解过程中①②所缺的内容;
- (2) 小明求得 AB 用到的几何知识是 _____;
- (3) 小明仅利用皮尺,通过 5 次测量,求得 AB . 请你同时利用皮尺和测角仪,通过测量长度、角度等几何量,并利用解直角三角形的知识求小水池的最大宽度 AB ,写出你的测量及求解过程.

要求:测量得到的长度用字母 $a, b, c \cdots$ 表示,角度用 $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ 表示;测量次数不超过 4 次(测量的几何量能求出 AB , 且测量的次数最少,才能得满分).

24. (12 分)

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 交 x 轴于 $A(1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点, M 为抛物线的顶点, C, D 为抛物线上不与 A, B 重合的相异两点, 记 AB 中点为 E , 直线 AD, BC 的交点为 P .

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 若 $C(4, 3)$, $D(m, -\frac{3}{4})$, 且 $m < 2$, 求证: C, D, E 三点共线;

(3) 小明研究发现: 无论 C, D 在抛物线上如何运动, 只要 C, D, E 三点共线, $\triangle AMP$, $\triangle MEP$, $\triangle ABP$ 中必存在面积为定值的三角形. 请直接写出其中面积为定值的三角形及其面积, 不必说明理由.

25. (14 分)

如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, D 是 AB 边上不与 A, B 重合的一个定点. $AO \perp BC$ 于点 O , 交 CD 于点 E . DF 是由线段 DC 绕点 D 顺时针旋转 90° 得到的, FD, CA 的延长线相交于点 M .

(1) 求证: $\triangle ADE \sim \triangle FMC$;

(2) 求 $\angle ABF$ 的度数;

(3) 若 N 是 AF 的中点, 如图 2. 求证: $ND = NO$.

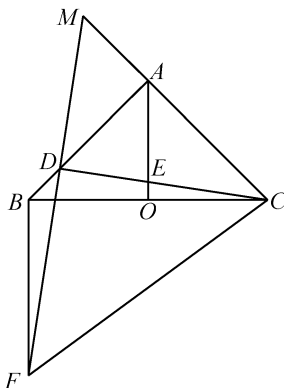


图 1

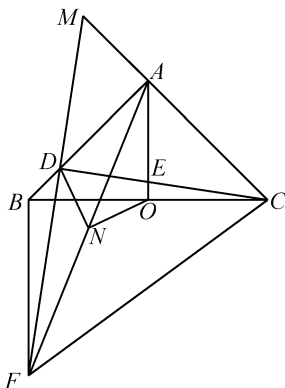


图 2

数学试题参考答案

一、选择题: 本题考查基础知识与基本技能. 每小题 4 分, 满分 40 分.

- | | | | | |
|------|------|------|------|-------|
| 1. D | 2. D | 3. B | 4. C | 5. A |
| 6. B | 7. A | 8. B | 9. A | 10. C |

二、填空题: 本题考查基础知识与基本技能。每小题 4 分, 满分 24 分。

11. -5

12. 10

13. 10

14. 乙

15. 1

16. $-1 < n < 0$

三、解答题: 本题共 9 小题, 共 86 分。

17. 本小题考查算术平方根、绝对值、零指数幂等基础知识, 考查运算能力。满分 8 分。

解: 原式 $= 3 - 1 + 1$
 $= 3.$

说明: 本参考答案仅给出一种解法供参考。

18. 本小题考查一元一次不等式组的解法等基础知识, 考查运算能力。满分 8 分。

解: 解不等式 ①, 得 $x < 1$.

解不等式 ②, 得 $x \geq -3$.

所以原不等式组的解集为 $-3 \leq x < 1$.

说明: 本参考答案仅给出一种解法供参考。

19. 本小题考查等式的基本性质、全等三角形的判定与性质等基础知识, 考查几何直观、推理能力等。满分 8 分。

证明: $\because \angle AOD = \angle COB$,

$$\therefore \angle AOD - \angle BOD = \angle COB - \angle BOD,$$

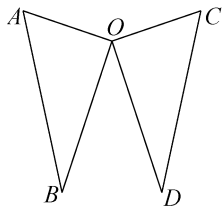
即 $\angle AOB = \angle COD$.

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中,

$$\begin{cases} OA = OC, \\ \angle AOB = \angle COD, \\ OB = OD, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD.$$

$$\therefore AB = CD.$$



说明: 本参考答案仅给出一种解法供参考。

20. 本小题考查因式分解、分式的基本性质及其运算、二次根式等基础知识, 考查运算能力。满分 8 分。

解: 原式 $= \left(1 - \frac{x+1}{x}\right) \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$
 $= \frac{x - (x+1)}{x} \cdot \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$
 $= -\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+1}$
 $= -\frac{1}{x+1}.$

当 $x = \sqrt{2} - 1$ 时,

记往袋中加入的球为“新”,摸得的两球所有可能的结果列表如下:

第二球 第一球	红	黄①	黄②	黄③	新
红		红,黄①	红,黄②	红,黄③	红,新
黄①	黄①,红		黄①,黄②	黄①,黄③	黄①,新
黄②	黄②,红	黄②,黄①		黄②,黄③	黄②,新
黄③	黄③,红	黄③,黄①	黄③,黄②		黄③,新
新	新,红	新,黄①	新,黄②	新,黄③	

共有 20 种等可能结果.

(i) 若往袋中加入的是红球,两球颜色相同的结果共有 8 种,此时该顾客获得

精美礼品的概率 $P_1 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$;

(ii) 若往袋中加入的是黄球,两球颜色相同的结果共有 12 种,此时该顾客获得

精美礼品的概率 $P_2 = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$;

因为 $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$, 所以 $P_1 < P_2$, 所以他应往袋中加入黄球.

说明:本参考答案仅给出一种解法供参考.

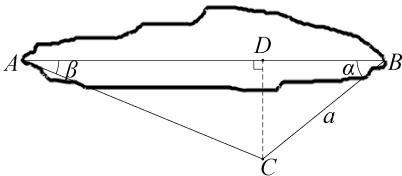
23. 本小题考查两点间距离的概念及其度量、角度概念及其度量、相似三角形的判定与性质、解直角三角形等基础知识;考查抽象能力、空间观念、几何直观、应用意识、创新意识等,考查应用所学知识分析、解决问题的综合实践能力;考查数形结合思想、模型观念等. 满分 10 分.

解:(1)① $\angle C = \angle C$;② $3c$;

(2) 相似三角形的判定与性质;

(3) 测量过程:

(i) 在小水池外选点 C ,如图,用测角仪在点 B 处测得 $\angle ABC = \alpha$,在点 A 处测得 $\angle BAC = \beta$;



(ii) 用皮尺测得 $BC = a$ m.

求解过程:

由测量知,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \alpha$, $\angle BAC = \beta$, $BC = a$.

过点 C 作 $CD \perp AB$, 垂足为 D .

在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中, $\cos \angle CBD = \frac{BD}{BC}$,

即 $\cos \alpha = \frac{BD}{a}$, 所以 $BD = a \cos \alpha$.

同理, $CD = a \sin \alpha$.

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\tan \angle CAD = \frac{CD}{AD}$,

即 $\tan \beta = \frac{a \sin \alpha}{AD}$, 所以 $AD = \frac{a \sin \alpha}{\tan \beta}$.

所以 $AB = BD + AD = a \cos \alpha + \frac{a \sin \alpha}{\tan \beta}$ (m).

故小水池的最大宽度为 $(a \cos \alpha + \frac{a \sin \alpha}{\tan \beta})$ m.

说明:本参考答案仅给出一种解法供参考.

24. 本小题考查一次函数和二次函数的图象与性质、二元一次方程组、一元二次方程、三角形面积等基础知识,考查运算能力、推理能力、空间观念、几何直观、创新意识等,考查数形结合思想、函数与方程思想、特殊与一般思想等. 满分 12 分.

解:(1) 因为抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(1,0)$, $B(3,0)$,

所以 $\begin{cases} a + b + 3 = 0, \\ 9a + 3b + 3 = 0. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a = 1, \\ b = -4. \end{cases}$

所以抛物线的函数表达式为 $y = x^2 - 4x + 3$.

(2) 设直线 CE 对应的函数表达式为 $y = kx + n$ ($k \neq 0$),

因为 E 为 AB 中点, 所以 $E(2,0)$.

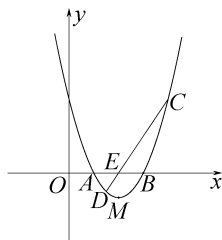
又因为 $C(4,3)$, 所以 $\begin{cases} 4k + n = 3, \\ 2k + n = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = \frac{3}{2}, \\ n = -3. \end{cases}$

所以直线 CE 对应的函数表达式为 $y = \frac{3}{2}x - 3$.

因为点 $D(m, -\frac{3}{4})$ 在抛物线上, 所以 $m^2 - 4m + 3 = -\frac{3}{4}$.

解得, $m = \frac{3}{2}$ 或 $m = \frac{5}{2}$.

又因为 $m < 2$, 所以 $m = \frac{3}{2}$.



所以 $D(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$.

因为 $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{4}$, 即 $D(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4})$ 满足直线 CE 对应的函数表达式,

所以点 D 在直线 CE 上, 即 C, D, E 三点共线.

(3) $\triangle ABP$ 的面积为定值,

其面积为 2.

理由如下: (考生不必写出下列理由)

如图 1, 当 C, D 分别运动到点 C', D' 的位置时, C, D' 与 D, C' 分别关于直线 EM 对称, 此时仍有 C', D', E 三点共线. 设 AD' 与 BC' 的交点为 P' , 则 P, P' 关于直线 EM 对称, 即 $PP' \parallel x$ 轴. 此时, PP' 与 AM 不平行, 且 AM 不平分线段 PP' , 故 P, P' 到直线 AM 的距离不相等, 即在此情形下 $\triangle AMP$ 与 $\triangle AMP'$ 的面积不相等, 所以 $\triangle AMP$ 的面积不为定值.

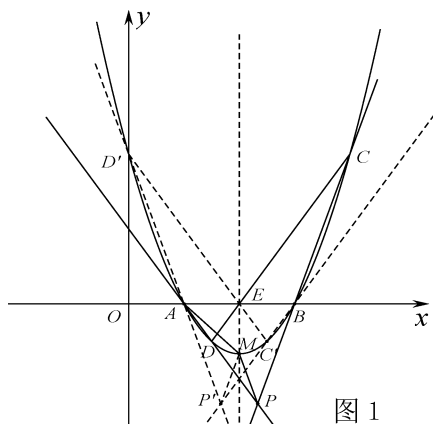


图 1

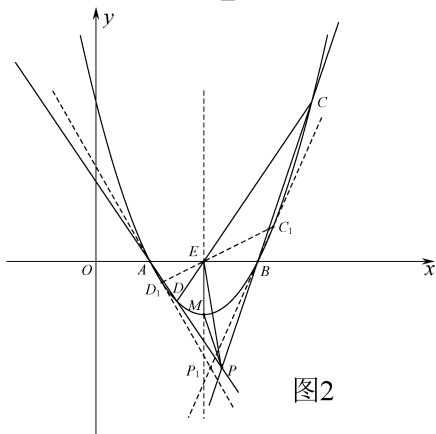


图 2

如图 2, 当 C, D 分别运动到点 C_1, D_1 的位置, 且保持 C_1, D_1, E 三点共线. 此时 AD_1 与 BC_1 的交点 P_1 到直线 EM 的距离小于 P 到直线 EM 的距离, 所以 $\triangle MEP_1$ 的面积小于 $\triangle MEP$ 的面积, 故 $\triangle MEP$ 的面积不为定值.

又因为 $\triangle AMP, \triangle MEP, \triangle ABP$ 中存在面积为定值的三角形, 故 $\triangle ABP$ 的面积为定值.

在 (2) 的条件下, 直线 BC 对应的函数表达式为 $y = 3x - 9$; 直线 AD 对应的函数表达式为 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$, 求得 $P(\frac{7}{3}, -2)$, 此时 $\triangle ABP$ 的面积为 2.

说明: 本参考答案仅给出一种解法供参考.

25. 本小题考查三角形内角和定理、平行线的判定与性质、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形及直角三角形的判定与性质等基础知识, 考查推理能力、空间观念、几何直观、运算能力、创新意识等, 考查化归与转化思想、数形结合思想、函数与方程思想等. 满分 14 分.

解: (1) $\because DF$ 是由线段 DC 绕点 D 顺时针旋转 90° 得到的,

$$\therefore \angle FDC = 90^\circ, FD = CD,$$

$$\therefore \angle DFC = 45^\circ.$$

$$\because AB = AC, AO \perp BC,$$

$$\therefore \angle BAO = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle ABC = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle BAO = \angle DFC.$$

$$\because \angle EDA + \angle ADM = 90^\circ, \angle M + \angle ADM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDA = \angle M.$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FMC.$$

(2) 设 BC 与 DF 的交点为 I , 如图 1.

$$\because \angle DBI = \angle CFI = 45^\circ, \angle BID = \angle FIC,$$

$$\therefore \triangle BID \sim \triangle FIC,$$

$$\therefore \frac{BI}{FI} = \frac{DI}{CI},$$

$$\therefore \frac{BI}{DI} = \frac{FI}{CI}.$$

$$\because \angle BIF = \angle DIC,$$

$$\therefore \triangle BIF \sim \triangle DIC,$$

$$\therefore \angle IBF = \angle IDC.$$

$$\text{又} \because \angle IDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle IBF = 90^\circ.$$

$$\because \angle ABC = 45^\circ, \angle ABF = \angle ABC + \angle IBF,$$

$$\therefore \angle ABF = 135^\circ.$$

(3) 延长 ON 交 BF 于点 T , 连接 DT, DO , 如图 2.

$$\because \angle FBI = \angle BOA = 90^\circ,$$

$$\therefore BF \parallel AO,$$

$$\therefore \angle FTN = \angle AON.$$

$$\because N \text{ 是 } AF \text{ 的中点},$$

$$\therefore AN = NF.$$

$$\text{又} \because \angle TNF = \angle ONA,$$

$$\therefore \triangle TNF \cong \triangle ONA,$$

$$\therefore NT = NO, FT = AO.$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC, AO \perp BC,$$

$$\therefore AO = CO,$$

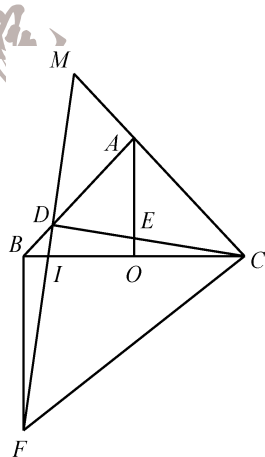


图 1

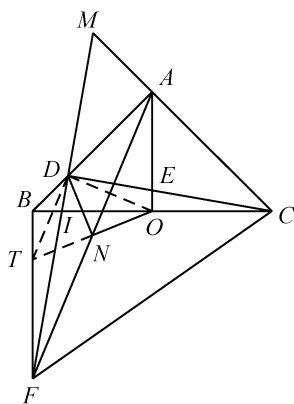


图 2

$$\therefore FT = CO.$$

由(2) 知, $\triangle BIF \sim \triangle DIC$,

$$\therefore \angle DFT = \angle DCO.$$

$$\because DF = DC,$$

$$\therefore \triangle DFT \cong \triangle DCO,$$

$$\therefore DT = DO, \angle FDT = \angle CDO,$$

$$\therefore \angle FDT + \angle FDO = \angle CDO + \angle FDO,$$

$$\text{即 } \angle ODT = \angle CDF.$$

$$\because \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODT = \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\therefore ND = \frac{1}{2}TO = NO.$$

说明:本参考答案仅给出一种解法供参考.