

2022—2023 学年第二学期初中毕业年级模拟考试·诊断卷

数学试题参考答案及评分标准

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，满分 40 分．

1. D 2. A 3. C 4. A 5. B 6. D 7. C 8. D 9. C 10. B

二、填空题：共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．

11. $(x-3)^2$ 12. $-1 < x \leq 1$ 13. 2 14. 4 15. $\sqrt{3} : 2$

16. $2+2\sqrt{5}$

取点 $C(3, 0)$ ，则 $PC=BQ$ ，

$\therefore BP+BQ=PC+BQ$ ，

$\therefore \triangle BPQ$ 的周长 $= BP+BQ+PQ$ ， $PQ=2$

$\therefore \triangle BPQ$ 的周长 $= BP+PC+2$ ，

\therefore 要使 $\triangle BPQ$ 的周长最小，只要 $BP+PC$ 最小，

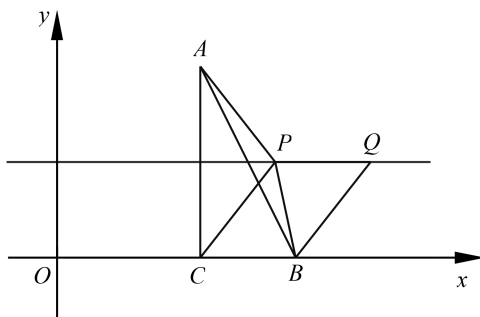
点 C 关于直线 $y=2$ 对称的点 A 的坐标为 $(3, 4)$ ，连接 AB ，则 $PA=PC$ ，

$\therefore BP+PC=PA+PB \geq AB$ ，

\therefore 当 A, P, B 三点共线时， $PA+PC$ 最小，即 $BP+PC$ 最小．

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中，由勾股定理得： $AB=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ ．

$\therefore \triangle BPQ$ 的周长最小值是 $2+2\sqrt{5}$ ．



三、解答题：共 9 小题，满分 86 分．

17. 解：原式 $= 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} - 2 \dots\dots\dots 6$ 分
 $= \sqrt{2} \dots\dots\dots 8$ 分

18. 证明： $\because AD \perp BC$ 于点 D ，
 $\therefore \angle ADC = \angle BDE = 90^\circ$ ， $\dots\dots\dots 2$ 分

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDE$ 中，

$\begin{cases} AD=BD \\ \angle ADC=\angle BDE, \dots\dots\dots 5 \text{ 分} \\ DC=DE \end{cases}$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDE$ (SAS), 7 分

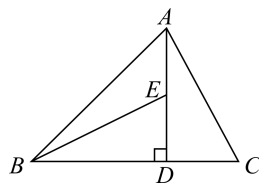
$\therefore \angle DAC = \angle DBE$ 8 分

19. 解: 原式 $= \frac{x+2}{x-1} \div \frac{x^2-4}{x-1}$ 2 分

$= \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{(x+2)(x-2)}$ 4 分

$= \frac{1}{x-2}$ 5 分

当 $x = \sqrt{5} + 2$ 时, 原式 $= \frac{1}{\sqrt{5} + 2 - 2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 8 分



20. (1) 证明: $\because \triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle DEC$,

$\therefore \angle BCE = 60^\circ$, $BC = EC$, 1 分

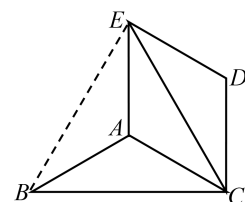
$\because \angle ACB = 30^\circ$,

$\therefore \angle ACE = 30^\circ = \angle ACB$, 1 分

$\because AC = AC$,

$\therefore \triangle ACB \cong \triangle ACE$ (SAS), 3 分

$\therefore AB = AE$; 4 分



(2) 解: 连接 BE ,

$\because \triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle DEC$,

$\therefore BC = DE$, $\angle BCE = 60^\circ$, 5 分

$\therefore \triangle BCE$ 是等边三角形, 6 分

$\therefore BE = EC$, 即点 E 在 BC 的垂直平分线上,

又 $\because \angle ABC = \angle ACB$

$\therefore AB = AC$, 即点 A 在 BC 的垂直平分线上, 7 分

$\therefore EA \perp BC$, 即直线 AE 与 BC 互相垂直. 8 分

21. 解: (1) 四个班平均成绩的中位数是 $\frac{72+74}{2} = 73$, 2 分

(2) 该家长的说法不正确. 理由: 3 分

李老师两班平均成绩为 $\frac{74c+72c}{2c} = 73$ (分), 4 分

王老师两班平均成绩为 $\frac{68a+78b}{a+b}$, 5 分

①当 $a=b$ 时, $\frac{68a+78b}{a+b} = \frac{68a+78a}{a+a} = 73$ (分); 6 分

②当 $a>b$ 时, $\frac{68a+78b}{a+b} = \frac{68(a+b) + 10b}{a+b} = 68 + \frac{10}{\frac{a}{b} + 1} < 73$ (分); 7 分

③当 $a<b$ 时, $\frac{68a+78b}{a+b} = \frac{68(a+b) + 10b}{a+b} = 68 + \frac{10}{\frac{a}{b} + 1} > 73$ (分) .

所以该家长的说法不正确. 8 分

【说明：①若学生只对“ $a=b$ ”和“ $a \neq b$ ”做出两种分类说理，也给满分；②若学生取合理的 a, b 值来说明人数的不同会影响平均分，第（2）小题给 5 分；③其它解法或说理，若能说清楚“权”对平均数的影响，第（2）小题也给 5 分.】

22. 解：（1）设 A 材料每件 x 元，则 B 材料每件 $(x+40)$ 元， 1 分

由题意可得： $2x + 3(x+40) = 420$, 2 分

解得： $x=60$, 3 分

经检验， $x=60$ 符合题意，

则 $x+40=100$, 4 分

答：A, B 两种材料每件分别为 60 元和 100 元； 5 分

（2）设甲工艺品 a 个，则乙工艺品 $(560-a)$ 个，设利润为 w 元，

由题意得： $w = (360 - 60 - 2 \times 100)a + (450 - 3 \times 60 - 2 \times 100)(560 - a) = 30a + 39200$, 8 分

$\because 30 > 0$,

$\therefore w$ 随 a 的增大而增大， 9 分

$\because 0 < a \leq 180$,

\therefore 当 $a=180$ 时， w 最大，此时 $w=44600$,

此时 $560-a=380$,

答：制作甲工艺品 180 个，乙工艺品 380 个，可获得最大总利润 44600 元.

..... 10 分

23. 解: (1) 如图所示, 点 A 为所求作的点; 4 分

(2) 由 (1) 可知, $\tan \angle ABC = \frac{1}{2}$,

$\therefore BC=2AC$, 5 分

$\because ND \perp BA$, N 为 AB 的中点,

$\therefore BD=AD$, 6 分

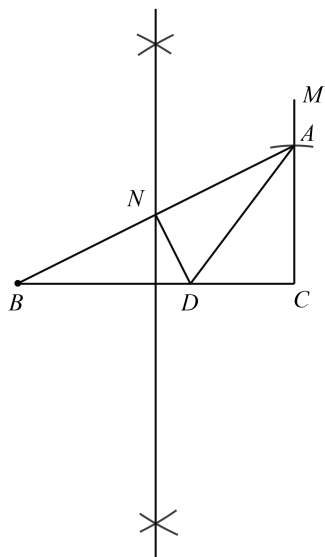
设 $AC=a$, $AD=x$, 则 $BC=2a$, $BD=x$, $DC=2a-x$,

..... 7 分

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $AD^2 = DC^2 + AC^2$,

$$\therefore (2a - x)^2 + a^2 = x^2,$$
 $\therefore x = \frac{5}{4}a$, 8 分

$\therefore DC = 2a - \frac{5}{4}a = \frac{3}{4}a$, 9 分

$$\therefore \cos \angle ADC = \frac{DC}{AD} = \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{5}{4}a} = \frac{3}{5}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$


24. 解: (1) 连接 OD , 交 AC 于 G 点,

$\because DP$ 是半圆 O 的切线,

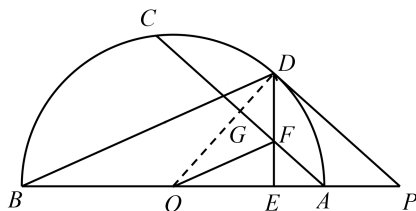
$\therefore OD \perp DP$, 1 分

又 \because 点 D 是 \widehat{AC} 的中点,

$\therefore OD \perp AC$ 2 分

∴AC//DP; 3 分

(2) 证明: \because 点 D 是 \widehat{AC} 的中点,

$$\therefore CG = AG = \frac{1}{2}AC, OD \perp AC, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$
$$\therefore \angle DOE + \angle GAO = 90^\circ.$$
$$\because DE \perp AB,$$
$$\therefore \angle DOE + \angle ODE = 90^\circ, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$


$\therefore \angle GAO = \angle ODE$, 6 分

$\because OD = OA$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ODE \cong \text{Rt}\triangle OAG$,

$\therefore DE = AG$ 7 分

$\therefore AC = 2DE$; 8 分

(3) 解: 连接 OC , CE , CP

$\because DP$ 为半圆 O 的切线,

$\therefore DP \perp OD$,

$\therefore \angle ODP = 90^\circ$.

$\because DE \perp AB$,

$\therefore \angle OED = 90^\circ$,

$\therefore \angle ODP = \angle OED$ 9 分

$\because \angle DOE = \angle POD$,

$\therefore \triangle OED \sim \triangle ODP$,

$\therefore \frac{OD}{OP} = \frac{OE}{OD}$, 10 分

$\because OC = OD$

$\therefore \frac{OC}{OP} = \frac{OE}{OC}$, 12 分

$\because \angle EOC = \angle COP$,

$\therefore \triangle EOC \sim \triangle COP$,

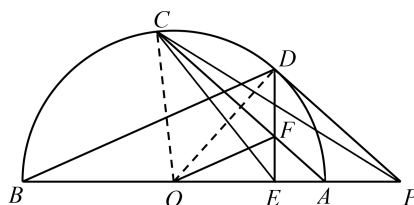
$\therefore \frac{EC}{PC} = \frac{OE}{OC}$,

$\because AE : EO = 1 : 2$,

$\therefore OE : OA = 2 : 3$,

$\therefore OE : OC = 2 : 3$,

$\therefore \frac{CE}{CP} = \frac{OE}{OC} = \frac{2}{3}$ 13 分



25. (1) 解: (1) \because 抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 的对称轴为直线 $x=1$,

$$\therefore -\frac{2}{2a}=1, \text{ 解得, } a=-1. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

\because 抛物线 $y=-x^2+2x+c$ 与 y 轴正半轴分别交于点 C ,

$$\therefore \text{点 } C(0, c),$$

$$\therefore OB=OC=c,$$

$$\therefore \text{点 } B(c, 0),$$

$$\therefore 0=-c^2+2c+c, \text{ 解得, } c=3 \text{ 或 } 0 \text{ (舍去)}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为: } y=-x^2+2x+3; \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ ①由 (1) 得, } y=-x^2+2x+3,$$

$$\text{令 } y=0, \text{ 得 } -x^2+2x+3=0, \text{ 解得, } x_1=-1, x_2=3,$$

$$\therefore A(-1, 0), B(3, 0), OA=1, OB=OC=3, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$\because CD \parallel x$ 轴,

$$\therefore D(2, 3), CD=2,$$

$$\text{设 } E(0, m), \text{ 由 } A(-1, 0), E(0, m), \text{ 得直线 } AE: y=mx+m, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} y=mx+m, \\ y=-x^2+2x+3 \end{cases} \text{ 解得, } \begin{cases} x_3=-1, \\ y_3=0 \end{cases}, \begin{cases} x_4=3-m, \\ y_4=-m^2+4m. \end{cases}$$

$$\therefore P(3-m, -m^2+4m), \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{过 } P \text{ 作 } PQ \perp \text{直线 } CD, \text{ 垂足为 } Q, \text{ 则 } PQ=|y_Q-y_P|=|-m^2+4m-3|.$$

$\because \triangle PCD$ 的面积是 $\triangle ACE$ 面积的 2 倍,

$$\therefore CD \cdot PQ=2CE \cdot OA, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore 2|-m^2+4m-3|=2|3-m|, \text{ 解得, } m=0 \text{ 或 } m=2 \text{ (} m=3 \text{ 不合题意舍去)}$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (3, 0) \text{ 或 } (1, 4); \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

②过 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F , 交 BC 于点 M ,

$$\because B(3, 0), C(0, 3),$$

$$\therefore \text{直线 } BC: y=-x+3, \text{ 令 } x=1, \text{ 得 } y=2,$$

$$\text{令 } x=3-m, \text{ 得 } y=m, \text{ 则 } H(1, 2), M(3-m, m),$$

由勾股定理得,

$$BC=3\sqrt{2}, CH=\sqrt{(1-0)^2+(2-3)^2}=\sqrt{2},$$

$\therefore CH:BC=1:3$. 记 $\triangle PBC$ 的面积为 S_4 , 则 $S_4=$

$3S_2$, 9 分

$$\because 6S_1S_2+S_3=M,$$

$$\therefore \frac{M}{S_1}=2S_4+\frac{S_3}{S_1}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

当点 P 在抛物线对称轴右侧图象上, 且在直线 CD 的上方时, $1<3-m<2$, 即 $1<m<2$,

$$S_1=\frac{1}{2}CE \cdot OA=\frac{1}{2}(3-m),$$

$$S_3=\frac{1}{2}CD \cdot PQ=\frac{1}{2} \times 2 \times (-m^2+4m-3),$$

$$\therefore \frac{S_3}{S_1}=\frac{2(-m^2+4m-3)}{3-m}=\frac{2(m-3)(m-1)}{m-3}=2m-2, \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\because M(3-m, m), P(3-m, -m^2+4m),$$

$$\therefore PM=-m^2+3m,$$

$$\therefore S_4=\frac{1}{2}PM(OF+FB)=\frac{1}{2}PM \cdot OB=\frac{3}{2}(-m^2+3m), \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{M}{S_1}=2 \times \frac{3}{2}(-m^2+3m)+2m-2=-3m^2+11m-2=-3\left(m-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{97}{12}.$$

$$\because -3<0, 1<m<2,$$

$$\therefore \text{当 } m=\frac{11}{6} \text{ 时, } \frac{M}{S_1} \text{ 最大, 最大值为 } \frac{97}{12}. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

