

渝北区实验中学 2023 届 2022—2023 学年度第二学期半期考试

数 学 参 考 答 案

(满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

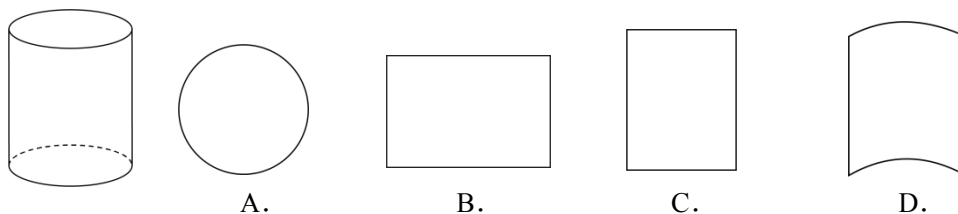
1. 试题的答案书写在答题卡上, 不得在试卷上直接作答;
2. 作答前认真阅读答题卡上的注意事项;
3. 作图(包括辅助线)请一律用黑色 2B 铅笔完成.

一、选择题:(本大题 10 个小题, 每小题 4 分, 共 40 分)在每个小题的下面, 都给出了代号为 A、B、C、D 的四个答案, 其中只有一个是正确的, 请将答题卡上题号右侧正确答案所对应的方框涂黑.

1. -2 的相反数是 (D)

- A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

2. 如图所示的圆柱, 它的俯视图为 (A)



3. 如图, 直线 a 、 b 被直线 c 所截, $a \parallel b$, $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2$ 的大小为 (C)

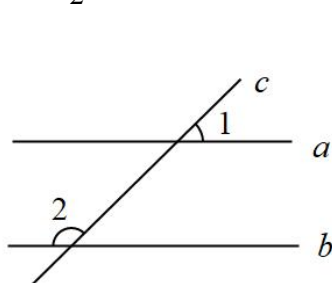
- A. 35° B. 125° C. 145° D. 155°

4. 下列运算正确的是 (D)

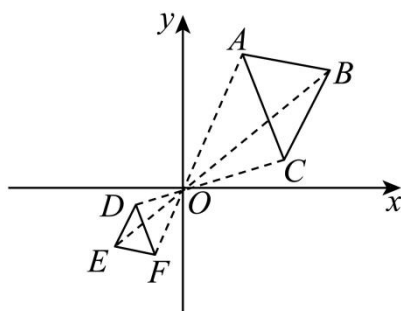
- A. $3a + a = 4a^2$ B. $3a^3 \cdot 2a^2 = 6a^6$ C. $(a^3)^2 \div a^5 = 1$ D. $(-2a)^3 = -8a^3$

5. 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 关于原点 O 位似, 且 $OB = 2OE$, 若 $\triangle ABC$ 的面积为 4, 则 $\triangle DEF$ 的面积为 (C)

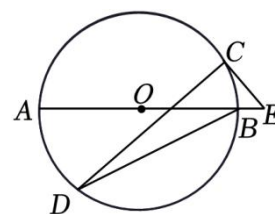
- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. 1 D. $\frac{3}{2}$



3 题图

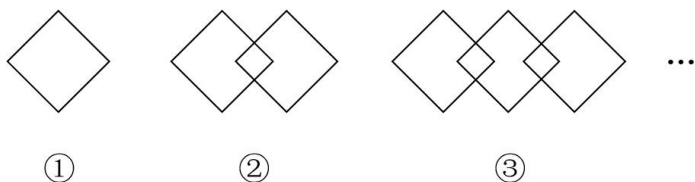


5 题图



9 题图

6. 如图, 每一幅图中有若干个正方形, 第①幅图中有 1 个正方形, 第②幅图中有 3 个正方形, 第③幅图中有 5 个正方形..., 那么第⑨幅图中正方形的个数是 (C)



- A. 15 B. 16 C. 17 D. 18

7. 估计 $\sqrt{2} \times (2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ 的值应在 (**B**)

- A. 6 和 7 之间 B. 7 和 8 之间 C. 8 和 9 之间 D. 9 和 10 之间

8. 将进货价格为 35 元的商品按单价 40 元售出时，能卖出 200 个. 已知该商品单价每上涨 1 元，其销售量就减少 5 个. 设这种商品的售价上涨 x 元时，获得的利润为 1870 元，则下列关系式正确的是 (**A**)

- A. $(x+5)(200-5x)=1870$ B. $(x+40)(200-10x)=1870$
C. $(x-35)(200-5x)=1870$ D. $(x+5)(200-10x)=1870$

9. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， C, D 是 $\odot O$ 上的点， $\angle CDB=15^\circ$ ，过点 C 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 E ，若 $OE=4$ ，则 $\odot O$ 的半径为 (**C**)

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 简单的规则可以涌现出丰富的代数结构. 对单项式 x 进行如下操作：规定 $a_1 = b_1 = c_1 = x$ ，计算

$$a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1} = \frac{1+x}{1-x}, \quad b_2 = a_1 a_2 = \frac{x+x^2}{1-x}, \quad c_2 = a_1 + a_2 = \frac{-x^2 + 2x + 1}{1-x}, \quad \text{称为第一次操作；计算}$$

$$a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2} = -\frac{1}{x}, \quad b_3 = a_1 a_2 a_3 = \frac{1+x}{x-1}, \quad c_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}, \quad \text{称为第二次操作；以此}$$

类推：① $a_5 = x$ ；② $\frac{a_5}{a_8} = \frac{a_6}{a_7}$ ；③ 当 $x=2$ 时， $c_{2401} = -698$ ；

④ 对任意正整数 n ，等式 $b_{4n+3}(c_{4n} - c_{4n+1}) = b_{4n+2}$ 总成立. 以上说法正确的有 (**A**)

- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

二、填空题：（本大题 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分）请将每小题的答案直接填在答题卡中对应的横线上.

11. $(-\frac{1}{2})^{-1} + |1 - \sqrt{2}| = \underline{\sqrt{2} - 3}$.

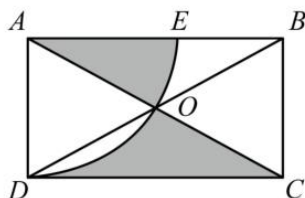
12. 一个不透明的袋中装有四张完全相同的卡片，把它们分别标上数字 $-1, 2, 3, 4$. 随机抽取一张卡片，然后放回，再随机抽取一张卡片. 则两次抽取的卡片上数字之和为偶数的概率是 $\underline{\frac{1}{2}}$.

13. 若一个多边形的每个内角都为 135° ，则它的边数为 八.

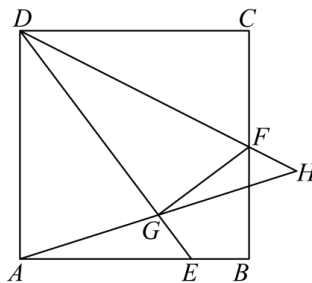
14. 已知：点 $A(-2, y_1)$ ， $B(2, y_2)$ ， $C(3, y_3)$ 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图象上，用 “ $<$ ”

表示 y_1 、 y_2 、 y_3 的大小关系是 $y_1 < y_3 < y_2$.

15. 如图, 矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O , $CD = 2\sqrt{3}$, 以点 A 为圆心, AD 长为半径画弧, 此弧恰好经过点 O , 并与 AB 交于点 E , 则图中阴影部分的面积为 $2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.



15 题图



17 题图

16. 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} x-1 \geq 2x+1 \\ 2x-1 < a \end{cases}$ 的解集为 $x \leq -2$, 且关于 y 的分式方程 $\frac{y-1}{y+1} = \frac{a}{y+1} - 2$ 的解是负数, 则所有满足条件的整数 a 的值之和是 -8 .

17. 如图, E 是正方形 $ABCD$ 边 AB 上一点, 连接 DE , DF 平分 $\angle CDE$ 交 BC 于点 F . 过 F 作 $FG \perp DE$, 垂足为 G , 连接 AG 并延长交 DF 延长线于点 H , 若 $AE = 3BE = 3$, 则 $FH = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

18. 对任意的一个三位数 n , 如果 n 满足各个数位上的数字均不为零, 且该数任意两个数位上的数字之和大于余下数位上的数字, 那么我们就把该数称为“三角形数”. 把“三角形数” n 的十位数字作个位, 百位数字作十位得到的两位数, 再加上 n 的个位数字的和记作 $F(n)$, 把“三角形数” n 的十位数字作十位, 百位数字作个位得到的两位数, 再加上 n 的个位数字的和记作 $Q(n)$. 已知“三角形数”

$s = 100a + 10b + 30$ ($1 \leq a \leq 5$, $1 \leq b \leq 4$, a, b 为整数), 当 $4F(s) + Q(s)$ 能被 7 整除时, 求所有满足条件的 s 的最大值为 634 .

三、解答题: (本大题 2 个小题, 19 题 8 分, 20 题 10 分, 共 18 分) 解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤, 画出必要的图形, 请将解答过程书写在相应的位置上.

19. 计算:

(1) $(x-y)^2 - (y+2x)(y-2x)$;

(2) $\frac{4-x^2}{x^2-2x+1} \div (x - \frac{2+x^2}{x-1})$.

解: 原式 $= x^2 - 2xy + y^2 - (y^2 - 4x^2) \dots\dots 2$ 分

解: 原式 $= \frac{(2+x)(2-x)}{(x-1)^2} \div \left[\frac{x(x-1)}{x-1} - \frac{2+x^2}{x-1} \right] \dots 2$ 分

$= x^2 - 2xy + y^2 - y^2 + 4x^2 \dots\dots 3$ 分

$= \frac{(2+x)(2-x)}{(x-1)^2} \div \frac{-x-2}{x-1}$

$= 5x^2 - 2xy \dots\dots 4$ 分

$= \frac{(2+x)(2-x)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{-(x+2)} \dots 3$ 分

$$= \frac{x-2}{x-1} \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$

20. 在学习等腰直角三角形的过程中，小爱同学遇到了一个问题：在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $AB=AC$ ，点 D 为线段 BC 上任意一点，试说明 AD ， BD ， CD 之间的数量关系．小爱的思路是：首先过点 C 作 BC 的垂线，再构造与 $\triangle ABD$ 全等的三角形，从而转化 AD ， BD ，使问题得到解决．请根据小爱的思路完成下面的作图与填空：

尺规作图：过点 C 作 BC 的垂线 CE ，在 BC 上方的直线 CE 上截取 $CF=BD$ ，连接 AF ， DF （用基本作图，保留作图痕迹，不写作法、结论）

- (1) 垂线.....2分，尺规作线段等于已知线段.....4分，连接 AE 、 DF6分
- (2) ① $\angle ECD=90^\circ$ ；② $BD=CF$ ；③ $\angle BAD=\angle FAC$ ；④ $DF^2 = CF^2 + CD^2$ 10分

四、解答题：（本大题6个小题，每小题10分，共60分）解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤，画出必要的图形，请将解答过程书写在对应的位置上．

21. 2023年3月28日是第28个全国中小学生安全教育日，为提高学生安全防范意识和自我防护能力，某校八、九年级进行了校园安全知识竞赛，并从八、九年级各随机抽取了20名学生的竞赛成绩，进行了整理和分析（竞赛成绩用 x 表示，总分100分，80分及以上为优秀，共分为四个等级：

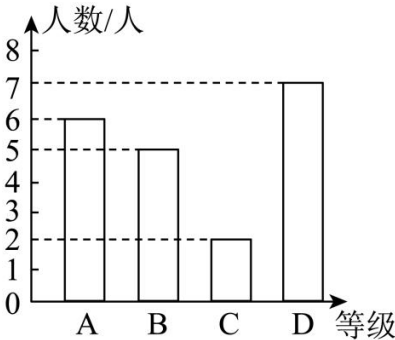
$A: 90 \leq x \leq 100$ ， $B: 80 \leq x < 90$ ， $C: 70 \leq x < 80$ ， $D: 0 \leq x < 70$ ），部分信息如下：
 八年级20名学生的竞赛成绩为：30，40，50，55，60，60，65，70，70，70，70，72，75，78，85，87，90，93，100，100

九年级20名学生的竞赛成绩中 B 等级包含的所有数据为：80，80，80，80，82

八、九年级抽取学生竞赛成绩统计表

年级	平均数	众数	中位数	优秀率
八年级	71	a	70	30%
九年级	71	80	b	$c\%$

九年级抽取学生竞赛成绩条形统计图



根据以上信息，解答下列问题：

- (2) (1) 请填空： $a=$ 70 ， $b=$ 80 ， $c=$ 553分
- (2) 根据上述数据，你认为该校八、九年级的校园安全知识竞赛，哪个年级的学生成绩更好？请说明理由（写出一条理由即可）；
- (3) 若该校八、九年级各有800人，600人，请估计该校八、九年级知识竞赛成绩为优秀的总人数．

解：（2）我认为九年级的学生成绩更好，因为九年级的众数 80 大于八年级的众数 70，所以九年级的学生成绩更好；

我认为九年级的学生成绩更好，因为九年级的中位数 80 大于八年级的中位数 70，所以九年级的学生成绩更好；

我认为九年级的学生成绩更好，因为九年级的优秀率 55% 大于八年级的优秀率 30%，所以九年级的学生成绩更好；（写出其中一条即可，不用数据说话，或数据求错了不得分） ...6 分

$$(3) 800 \times 30\% + 600 \times 55\% = 570 \text{ (人)} \quad \dots\dots 9 \text{ 分}$$

答：估计该校八、九年级知识竞赛成绩为优秀的总人数为 570 人.10 分

22. 有一项工程，甲队单独完成这项工程的天数比乙队单独完成这项工程的天数少 10 天，而甲队 2 天的工作量和乙队三天的工作量相同.

（1）甲、乙两队单独完成这项工程的天数分别是多少天？

（2）甲队单独施工若干天后，再由乙队单独施工并完成剩下的工程. 已知甲队每天单独施工的费用为 4 万元，乙队每天施工的费用为 2 万元，该项工程总费用政府拨款 70 万元刚好用完. 则甲队施工的时间是多少天？

解：（1）设甲队单独完成这项工程需要 x 天，

根据题意得 $\frac{2}{x} = \frac{3}{x+10}$ 3 分

解得 $x=20$ 4 分

经检验： $x=20$ 是此分式方程的解5 分

$$\therefore x+10=30 \text{ (天)}$$

答：甲、乙两队单独完成这项工程的天数分别是 20，30 天.

（2）设甲队施工 m 天，根据题意得

$$4m + 2 \times 30(1 - \frac{m}{20}) = 70 \quad \dots\dots 8 \text{ 分}$$

解得 $m=10$ 9 分

答：甲队施工的时间是 10 天.10 分

23. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $AD=3$ ，点 E 是 CD 的中点，点 P 从点 A 出发，以每秒 1 个单位的速度沿折线 $A-B-C$ 运动，当它到达点 C 时停止运动. 设点 P 的运动时间为 x 秒，在点 P 的运动过程中，线段 AP ， PE 与 AD ， DE 围成四边形时，令四边形 $APED$ 的面积为 y .

(1) 求出 y 与 x 的函数关系式，并注明 x 的取值范围；

解：（1）当 $0 < x \leq 4$ 时， $y = \frac{1}{2}(x+2) \times 3 = \frac{3}{2}x + 3$

当 $4 < x < 7$ 时， $y = S_{\text{四边形}ABCD} - S_{\triangle ABP} - S_{\triangle CPE}$

$= 3 \times 4 - \frac{1}{2}(x-4) \times 4 - \frac{1}{2}(7-x) \times 2 = 13 - x$

$\therefore y = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 3 (0 < x \leq 4) \\ 13 - x (4 < x < 7) \end{cases}$ 4 分（无求解过程扣 1 分，范围错误每个扣 1 分）

(2) 补全表格中 y 的值： 表格.....5 分 作图.....7 分

x	...	1	2	4	6	...
y	...	4.5	6	9	7	...

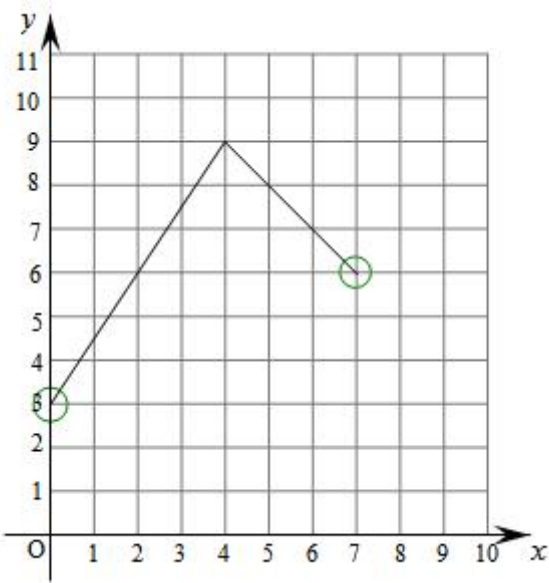
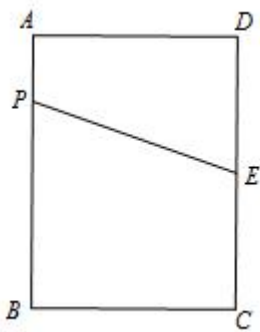
在自变量取值范围内画出 y 的函数图象，并根据函数图象写出该函数的一条性质；

当 $0 < x \leq 4$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $4 < x < 7$ 时， y 随 x 的增大而减小.

当 $x=4$ 时，函数有最大值，最大值为 9.

写出完整的一条即可，不完整不给分.8 分

(3) 当 $x = \frac{4}{3}$ 时，四边形 $APED$ 的面积为 5.10 分 （多写不得此 2 分）



24. 重庆轨道5号线北延伸段正在如火如荼地建设中. 如图工程队在由南向北的方向上将轨道线路铺设到A处时, 测得档案馆C在A北偏西 30° 方向的600米处, 再铺设一段距离到达B处, 测得档案馆C在B北偏西 45° 方向. (结果保留1位小数, 参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{6} \approx 2.449$)

(1) 请求出A、B间铺设了多远的距离;

(2) 档案馆C周围 $250\sqrt{2}$ 米内要建设文化广场, 不能铺设轨道, 若工程队将轨道线路铺设到B处时, 沿北偏东 15° 的BE方向继续铺设, 请问这是否符合建设文化广场的要求, 通过计算说明理由.

$$(1) 300\sqrt{3} - 300 \approx 300(\sqrt{3} - 1) \approx 300 \times (1.732 - 1) \approx 219.6 \text{ 米}$$

答: A、B间铺设了约219.6米的距离.5分

(2) 符合要求. 你有如下:

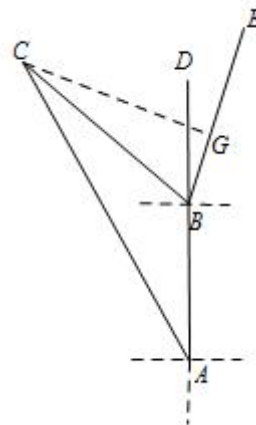
如图, 过点C作 $CG \perp BE$ 于点G,

$$CG = 150\sqrt{6} \approx 150 \times 2.449 \approx 367.4 \text{8分}$$

$$250\sqrt{2} \approx 250 \times 1.414 \approx 353.5$$

$\because 367.4 > 353.5$ 即 $CG > 353.5$ 9分

\therefore 符合建设文化广场的要求.10分



25. 如图, 抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 3$ 与x轴交于A、B两点 (点A在点B的左侧), 与y轴交于点C. 点

D在y轴正半轴上, 直线AD: $y = x + b$ 与抛物线交于点E.

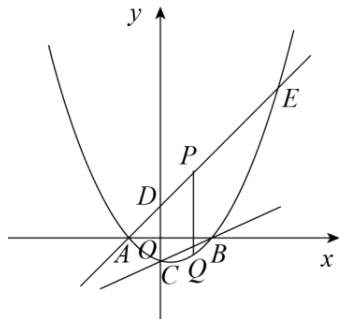


图1

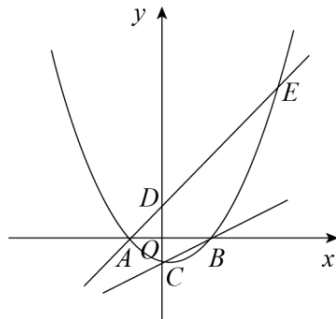


图2

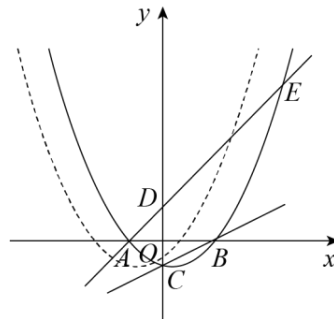


图3

(1) 求线段BC的长度;

(2) 如图, 点P是线段AE上的动点, 过点P作y轴的平行线交抛物线于点Q, 求 $\sqrt{2}PQ$ 的最大值及此时点P的坐标;

(3) 如图, 将抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 3$ 向左平移4个单位长度, 将 $\triangle DCA$ 沿直线BC平移, 平移后的 $\triangle DCA$ 记为 $\triangle D'C'A'$, 在新抛物线的对称轴上找一点M, 当 $\triangle A'C'M$ 是以点A'为直角顶点的等腰直角三角形时, 请直接写出所有符合条件的点M的坐标.

解: (1) $BC = 3\sqrt{5}$ 2分

(2) 设 $P(t, t+4)(-4 < t < 14)$,

$\because PQ \parallel y$ 轴,

$$\therefore Q(t, \frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{4}t - 3),$$

$$\therefore PQ = t + 4 - (\frac{1}{8}t^2 - \frac{1}{4}t - 3) = -\frac{1}{8}t^2 + \frac{5}{4}t + 7 \quad \dots\dots 3 \text{ 分}$$

当 PQ 最大时, $\sqrt{2}PQ$ 最大

\therefore 当 $t=5$ 时, PQ 有最大值 $\frac{81}{8}$; \dots\dots 4 \text{ 分}

$\sqrt{2}PQ$ 最大为 $\frac{81\sqrt{2}}{8}$ \dots\dots 5 \text{ 分}

此时 $P(5, 9)$ \dots\dots 6 \text{ 分}

(3) $M(-3, 3)$ 或 $(-3, -2)$. \dots\dots 10 \text{ 分}

26. 如图, 在 $\triangle ABC$ 的内部, 以 AC 为斜边作 $Rt\triangle ACD$, $AD=CD$, 连接 BD , $\angle CBD=45^\circ$.

(1) 如图 1, 过点 D 作 $DE \perp BD$ 交 BC 于点 E , 若 $AB=2\sqrt{3}$, $BD=1$, 求 BC 的长;

(2) 如图 2, 点 F 为 AC 上一点, 连接 FD , 过点 A 作 $AH \perp DF$ 分别交 DF 于点 G , 交 DC 于点 H , 若 $AG=2BD$, $\angle ACB = \angle AHD$, 求证: $BD=GD$;

(3) 如图 3, 若 $AC=20$, $\cos \angle BCD = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 点 M 为直线 BC 上一点, 连接 DM , 将 $\triangle BDM$ 沿直线 DM 翻折至 $\triangle B'DM$, 连接 $B'A$, $B'C$, 当 $\triangle AB'C$ 面积最大时, 直接写出 $\triangle CDM$ 的面积.

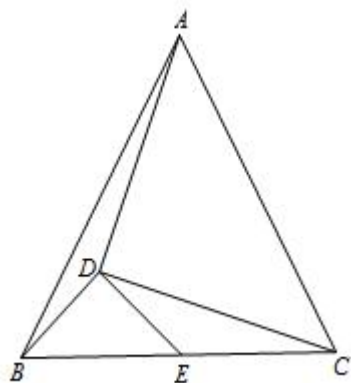


图 1

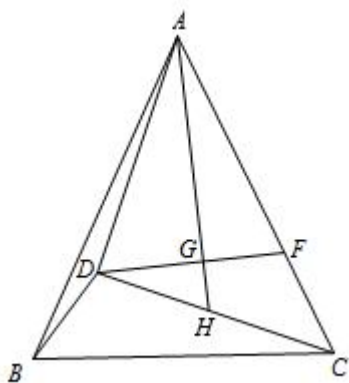


图 2

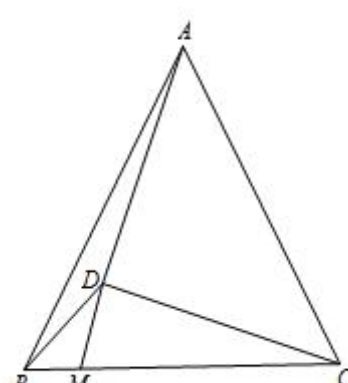


图 3

(1) $\sqrt{10}$ \dots\dots 4 \text{ 分}

(2) 过程略 \dots\dots 8 \text{ 分}

(3) $\frac{10\sqrt{10}+100}{3}$ \dots\dots 10 \text{ 分}

命题人: 王 丽