

(满分 130 分, 时间 120 分钟)

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的, 请将选择题的答案用 2B 铅笔涂在答题卷相应的位置上.

1. 一元二次方程 $x^2 - 4 = 0$ 的根是 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$ D. 2 或 -2

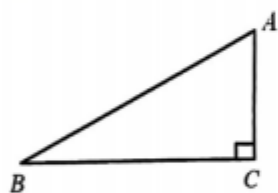
2. 已知 $\odot O$ 的半径为 3cm, 点 P 到圆心 O 的距离为 2cm, 则点 P 与 $\odot O$ 的位置关系 ()

- A. 在 $\odot O$ 外 B. 在 $\odot O$ 上 C. 在 $\odot O$ 内 D. 无法确定

3. 袁隆平海水稻科研团队从甲、乙两种水稻苗中随机抽取部分稻苗测量苗高, 算得它们的方差分别为 $S_{\text{甲}}^2 = 3.4, S_{\text{乙}}^2 = 5.3$, 则下列对苗高的整齐程度描述正确的是 ()

- A. 甲更整齐 B. 乙更整齐 C. 一样整齐 D. 无法确定

4. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, AC = 5, BC = 12$, 则 $\sin A$ 的值为 ()



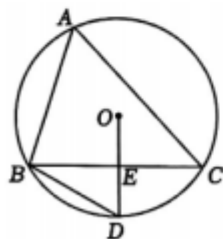
(第 4 题)

- A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{12}{5}$ C. $\frac{5}{13}$ D. $\frac{12}{13}$

5. 对抛物线 $y = -(x-2)^2 + 5$ 的描述, 其中说法错误的是 ()

- A. 图象的开口向下 B. 图象的对称轴为直线 $x = 2$
C. 函数的最小值为 5 D. 当 $x < 2$ 时, y 随 x 的增大而增大

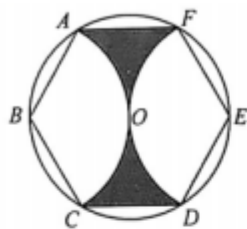
6. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, E 是 BC 的中点, 连接 OE 并延长交 $\odot O$ 于点 D , 连接 BD , $\angle D = 62^\circ$, 则 $\angle A$ 的度数为 ()



(第 6 题)

A. 56° B. 58° C. 60° D. 62°

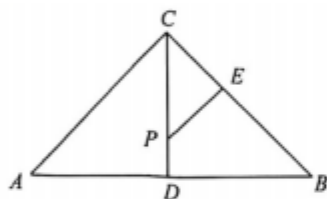
7. 如图, $\odot O$ 的内接正六边形 $ABCDEF$, 以 B 为圆心, BA 为半径作弧 \widehat{AOC} , 以 E 为圆心, ED 为半径作弧 \widehat{DOF} , 已知 $\odot O$ 的半径为 2, 则边 AF, CD 与 \widehat{AOC} , \widehat{DOF} 围成的阴影部分面积为 ()



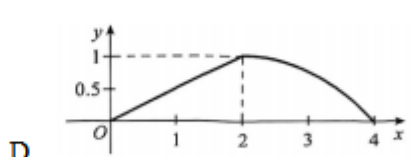
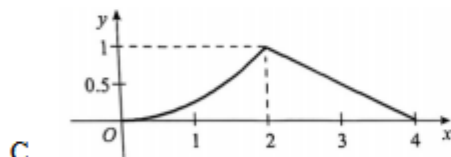
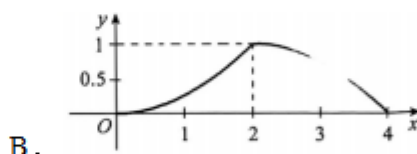
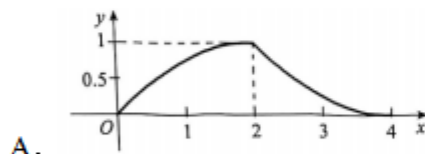
(第 7 题)

A. $6\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$ B. $6\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$ C. $12\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$ D. $12\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$

8. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 2\sqrt{2}$, $CD \perp AB$ 于点 D . 点 P 从点 C 出发, 沿 $C \rightarrow D \rightarrow A$ 的路径匀速运动, 运动到点 A 停止, 过点 P 作 $PE \perp BC$ 于点 E , 设点 P 运动的路程为 x , $\triangle PCE$ 的面积为 y , 则 y 与 x 的函数图象是 ()



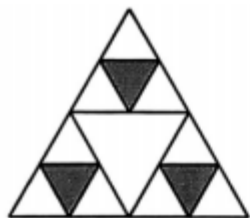
(第 8 题)



二、填空题: 本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分. 把答案直接填在答题卷相应位置上

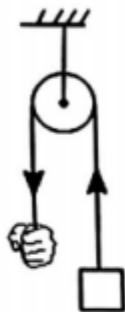
9. 学校利用劳动课采摘白萝卜, 从中抽取了 5 个白萝卜, 测得萝卜长 (单位: cm) 为 26, 20, 25, 22, 22, 则这组数据的平均数是 _____ cm.

10. 如图, 一个等边三角形的飞镖盘被分成了若干个小等边三角形区域, 向该飞镖盘投掷飞镖, 假设投中飞镖盘上的每一点是等可能的 (若投中边界或没有投中飞镖盘则重投 1 次), 任意投掷飞镖 1 次, 飞镖投中阴影部分的概率是 _____.



(第 10 题)

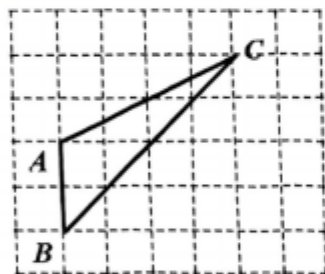
11. 如图, 物理实验中利用一个半径为 6cm 的定滑轮提起砝码, 小明向下拉动绳子一端, 使得定滑轮逆时针转动了 150° , 此时砝码被提起了 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$. (结果保留 π)



(第 11 题)

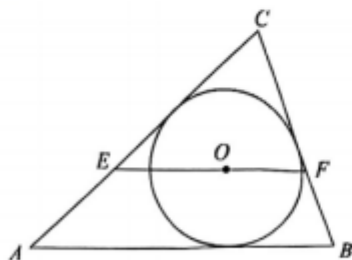
12. 若抛物线 $y = -x^2 - 3x + 4$ 与 x 轴交于 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ 两点, 则 $x_1 + x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 如图, 在正方形网格中, 每个小正方形的边长为 1, 点 A 、 B 、 C 都在格点上, 则 $\tan \angle ACB$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



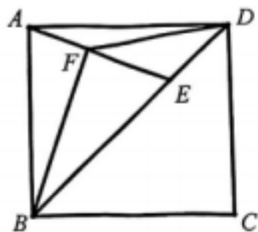
(第 13 题)

14. 如图, $\triangle ABC$ 的周长是 18cm , 点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 过点 O 作 $EF \parallel AB$, 与 AC 、 BC 分别交于点 E 、 F , 已知 $AB = 6\text{cm}$, 则 $\triangle CEF$ 的周长为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$.



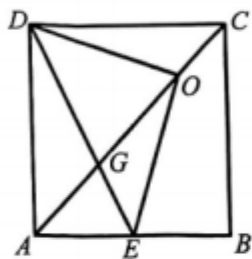
(第 14 题)

15. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, 点 E 是对角线 BD 上的一个动点, 且不与端点 B 、 D 重合, 连接 AE , 过点 B 作 $BF \perp AE$, 垂足为 F , 连接 DF . 则 DF 的最小值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



(第 15 题)

16. 如图, 点 O 为正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一动点, $OD \perp OE$, E 在 AB 上. 结论: ① $OD = OE$; ② 若 $AB = 5, EB = 2$, 则 $OE = \sqrt{15}$; ③ $\angle ADE = \angle AOE$; ④ $AG \cdot GO = EG \cdot GD$. 其中正确结论的有 _____. (填序号)



(第 16 题)

三、解答题 (本大题共 11 小题, 共 82 分. 把解答过程写在答题卷相应位置上, 解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明.)

17. (本题满分 5 分) 计算: $\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ - (\pi - 2024)^0 + |-4|$.

18. (本题满分 5 分) 解方程: $(x-2)^2 = 6-3x$.

19. (本题满分 6 分)

关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - x + m = 0 (m \neq 0)$ 的两根为 x_1, x_2 .

(1) 设 $y = \frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$, 请用含 m 的代数式表示 y ;

(2) 当 $y = 6$ 时, 求此时方程的根.

20. (本题满分 6 分)

2023 年 9 月 21 日, “天宫课堂” 第四课在中国空间站开讲, 神舟十六号航天员景海鹏、朱杨柱、桂海潮面向全国青少年进行太空科普授课. 航天员演示了四个太空实验: A. 球形火焰实验; B. 奇妙 “乒乓球” 实验; C. 动量守恒实验; D. 又见陀螺实验.

(1) 若小明从以上 4 个实验中随机选取 1 个实验的录像进行回看, 则所选的是 B 实验的概率是_____;

(2) 若小明从以上 4 个实验中随机选取 2 个实验的录像进行回看, 求小明选择 B 和 D 这 2 个实验的概率. (请用画树状图或列表等方法说明理由)

21. (本题满分 6 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^\circ, \angle B = 105^\circ, AB = 12$.



(第 21 题)

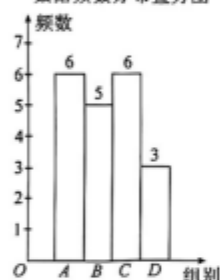
(1) 求 BC 的长;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积. (结果保留根号)

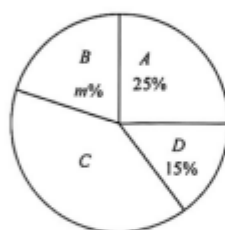
22. (本题满分 8 分)

大数据监测显示, 我国中学生的总体近视率达 71.1%. 为了了解学生的视力健康情况, 某校从八、九年级各随机抽取 20 名学生进行视力检查, 并对其视力情况的数据进行整理和分析. 视力情况共分 4 组: A. 视力 ≥ 5.0 , 视力正常; B. 视力 = 4.9, 轻度视力不良; C. $4.6 \leq \text{视力} \leq 4.8$, 中度视力不良; D. 视力 ≤ 4.5 , 重度视力不良. 下面给出了部分信息:

抽取的八年级学生视力数据频数分布直方图



抽取的九年级学生视力数据扇形统计图



(第 22 题)

抽取的八年级学生的视力在 C 组的数据是: 4.6, 4.6, 4.7, 4.7, 4.8, 4.8;

抽取的九年级学生的视力在 C 组的数据是 4.6, 4.7, 4.8, 4.7, 4.7, 4.8, 4.7, 4.7;

被抽取的八、九年级学生视力的平均数、中位数、众数如下表:

	平均数	中位数	众数
八年级	4.82	a	4.9
九年级	4.82	4.8	4.7

(1) 填空: $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

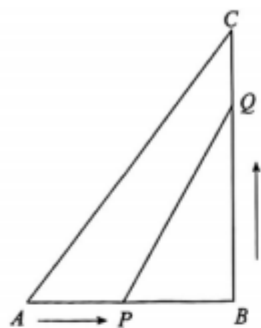
(2) 根据以上数据分析, 你认为该校八年级和九年级学生的视力情况谁更健康, 请说明理由 (写出一条理由即可);

(3) 该校八年级共有学生 500 人, 请估计八年级学生视力正常的人数.

23. (本题满分 8 分)

如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ, AB = 6\text{cm}, BC = 8\text{cm}$, 点 P 从点 A 出发沿边 AB 向点 B 以 1cm/s 的速

度移动，点 Q 从 B 出发沿边 BC 向点 C 以 2cm/s 的速度移动， P 、 Q 两点同时出发，当一点到达终点时另一点也停止运动，设运动时间为 $t(\text{s})$ 。



(第 23 题)

- (1) 若 P 、 Q 两点的距离为 $4\sqrt{2}\text{cm}$ 时，求 t 的值？
- (2) 当 t 为何值时， $\triangle BPQ$ 的面积最大？并求出最大面积。

24. (本题满分 8 分)

图 1 为放在水平地面上的落地式话筒架实物图。图 2 为其示意图，支撑杆 AB 垂直于地面， $AB = 115\text{cm}$ ，斜杆 CD 连接在支撑杆顶端 A 处， $CD = 80\text{cm}$ ，其中 AC 的长度可通过斜杆的滑动来进行调节，斜杆 CD 还可以绕着点 A 旋转，且与支撑杆 AB 的夹角为 $\angle BAC$ ($60^\circ \leq \angle BAC \leq 150^\circ$)。

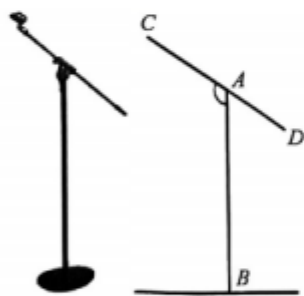


图 1

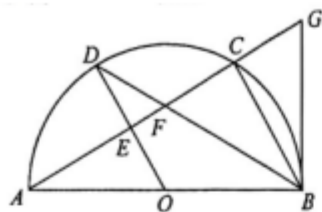
图 2

(第 24 题)

- (1) 当 $AC = 50\text{cm}$, $\angle BAC = 120^\circ$ 时，求话筒 C 到地面的高度；
- (2) 落地式话筒可以根据使用者的身高需要调节 CA 的长度和夹角 $\angle BAC$ 的度数，某运动员使用落地式话筒的适合高度是 183cm ，请问该话筒的高度能否满足这名运动员的需要，并说明理由。(参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.73$)

25. (本题满分 10 分)

如图，点 C 为以 AB 为直径的半圆 O 上一点，连接 AC 、 BC ，并延长 AC 到点 G ，使得 $\angle CBG = \angle A$ ，半径 $OD \perp AC$ 交 AC 于点 E ，连接 BD 交 AC 于点 F 。



(第 25 题)

(1) 求证: BG 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AB=6$, 且 $AC=BD$, 求 BF 的长度.

26. (本题满分 10 分)

如图 1, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 交 x 轴于 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$, 交 y 轴于 C , P 是第一象限内抛物线上的一个动点.

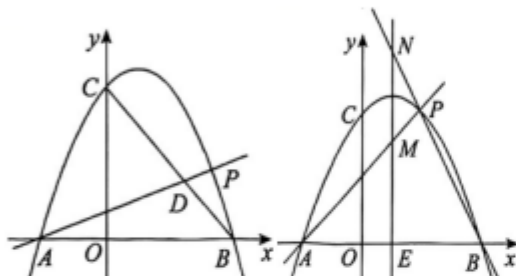


图 1

图 2

(第 26 题)

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 连接 BC 、 AP , 相交于点 D , 令 $z = \frac{PD}{AD}$, 当 z 的值最大时, 求点 P 的坐标;

(3) 如图 2, 抛物线的对称轴与 x 轴交于点 E , 直线 AP 、 BP 分别与对称轴交于点 M 、 N , $\triangle AME$ 与 $\triangle BNE$ 的面积分别为 S_1 、 S_2 . 设点 P 的横坐标为 t , 当 $1 < t < 3$ 时, $S_1 + S_2$ 的值是否变化? 如果不变, 求出 $S_1 + S_2$ 的值; 如果变化, 请说明理由.

27. (本题满分 10 分)

定义: 在平面直角坐标系中, 如果一个点的纵坐标等于它的横坐标的三倍, 则称该点为“纵三倍点”. 例如 $(1, 3)$ 、 $(-2, -6)$ 、 $(\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ 都是“纵三倍点”.

(1) 下列函数图象上只有一个“纵三倍点”的是_____; (填序号)

① $y = -2x + 1$; ② $y = \frac{21}{x}$; ③ $y = x^2 + x + 1$.

(2) 已知抛物线 $y = x^2 + mx + n$ (m, n 均为常数) 与直线 $y = x + 4$ 只有一个交点, 且该交点是“纵三倍点”, 求抛物线的解析式;

(3) 若抛物线 $y = ax^2 + bx + \frac{3}{2}$ (a, b 是常数, $a > 0$) 的图象上有且只有一个“纵三倍点”, 令 $w = b^2 - 2b + 6a$, 是否存在一个常数 t , 使得当 $t \leq b \leq t + 1$ 时, w 的最小值恰好等于 t , 若存在, 求出 t 的值;

若不存在，请说明理由．