

2023 年秋季学期教学质量调研

九年级数学

(考试时间 120 分钟, 满分 120 分)

注意: 请在答题卡上答题, 在本试卷上作答无效.

第I卷 选择题

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求.

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 若 $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\angle A$ 的度数是

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

2. 下列说法中, 错误的是

- A. 全等图形一定是相似图形 B. 两个直角三角形一定相似
C. 两个等腰直角三角形一定相似 D. 两个等边三角形一定相似

3. 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 8x + 7 = 0$, 方程可变形为

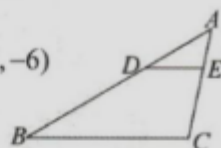
- A. $(x-4)^2 = 9$ B. $(x+4)^2 = 9$ C. $(x-8)^2 = 16$ D. $(x+8)^2 = 57$

4. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象经过点 $P(-2, 3)$, 则该函数的图象不经过的点是

- A. $(3, -2)$ B. $(-1, 6)$ C. $(1, -6)$ D. $(-1, -6)$

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $AD=5$, $BD=10$, $AE=3$. 则 CE 的值为

- A. 3 B. 4 C. 6 D. 9



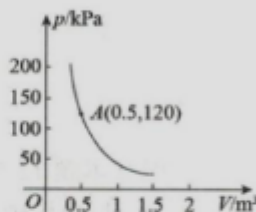
(第 5 题 图)

6. 为了解居民用水情况, 在某小区随机抽查记录了 20 户家庭的月用水量, 汇总结果如下表:

月用水量 (吨)	4	5	6	8	9
户数	1	2	13	3	1

则关于这 20 户家庭的月用水量, 下列说法正确的是

- A. 月用水量的众数是 6 吨 B. 月用水量的众数是 9 吨
C. 月用水量的平均数是 13 吨 D. 月用水量的平均数是 6 吨



(第 7 题 图)

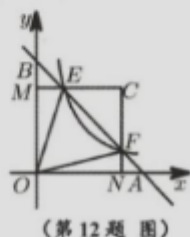
7. 某气球内充满了一定质量的气体, 当温度不变时, 气球内气体的气压 $p(\text{kPa})$ 是气体体积 $V(\text{m}^3)$ 的反比例函数, 如图所示, 则这个函数的表达式为

- A. $p = -\frac{60}{V}$ B. $p = \frac{60}{V}$ C. $p = \frac{120}{V}$ D. $p = -\frac{120}{V}$

8. 已知点 P 是线段 AB 的黄金分割点, $AP > PB$, 则 $AP:PB =$

- A. 0.618 B. $\sqrt{5}-1$ C. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

9. 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是
- A. $k < 3$ B. $k < 3$ 且 $k \neq 1$
C. $k \leq 3$ 且 $k \neq 1$ D. $k > 3$
10. 近年来, 我国快递业务迅猛发展. 据统计, 2017 年和 2019 年全国累计完成快递业务量分别约为 400 亿件和 635 亿件. 设这两年我国快递业务量的年平均增长率为 x , 可列方程为
- A. $635(1-2x) = 400$ B. $635(1-x)^2 = 400$
C. $400(1+2x) = 635$ D. $400(1+x)^2 = 635$
11. 已知两角和的余弦公式 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, 利用该公式计算非特殊角如 $\cos 105^\circ$ 的值就显容易, 即 $\cos 105^\circ = \cos(45^\circ + 60^\circ) = \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, 仿照计算 $\cos 75^\circ =$
- A. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ D. $-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
12. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 AB 与 x 轴、 y 轴分别交于 A 、 B , 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 在第一象限的图象交于点 E 、 F , 过点 E 作 $EM \perp y$ 轴于 M , 过点 F 作 $FN \perp x$ 轴于 N , 直线 EM 与 FN 交于点 C , 若 $\frac{BE}{BF} = \frac{1}{3}$, 则 $\triangle OEF$ 与 $\triangle CEF$ 的面积之比是
- A. 2:3 B. 3:2 C. 2:1 D. 3:1

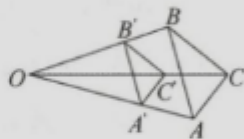


(第 12 题图)

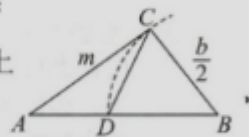
第II卷 非选择题

二、填空题: 本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分.

13. 已知 a , b , c , d 是比例线段, 若 $a=4$, $b=2$, $c=3$, 则 $d=$ _____.
14. 为了估计池塘里虾的数量, 第一次捕捞了 500 只虾, 然后将这些虾一一做上标记后放回池塘. 几天后, 第二次捕捞了 2000 只虾, 发现其中有 20 只虾身上有标记, 则可估计该池塘里约有_____只虾.
15. 若等腰三角形 (不是等边三角形) 的边长刚好是方程 $x^2 - 9x + 18 = 0$ 的解, 则此三角形的周长是_____.
16. 小明在探究一个角的正弦值与余弦值之间的关系发现: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则 $\sin B =$ _____.
17. 如图, $\triangle A'B'C'$ 是 $\triangle ABC$ 以点 O 为位似中心经过位似变换得到的, 若 $\triangle A'B'C'$ 的面积与 $\triangle ABC$ 的面积比是 4:9, 则 $OB':OB =$ _____.
18. 古希腊数学家丢番图在《算术》中提到了一元二次方程的问题, 欧几里得的《原本》中记载了形如 $x^2 + bx = m^2$ ($b > 0$, $m > 0$) 的方程的图解法是: 如图, 画 $\text{Rt}\triangle ABC$, 使 $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = \frac{b}{2}$, $AC = m$, 再在斜边 AB 上截取 $BD = \frac{b}{2}$, 则该方程的一个正实数根等于图中线段_____的长.



(第 17 题图)



(第 18 题图)

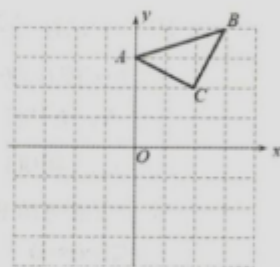
三、解答题：本大题共 8 小题，共 66 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

19. (每小题 4 分，共 8 分)

(1) 解方程： $x(x-1)=4x$.

(2) 计算： $1-2\sin^2 60^\circ$.

20. (本题 6 分) 如图，在平面直角坐标系中，正方形网格中每个小正方形的边长是一个单位长度， $\triangle ABC$ 三个顶点坐标分别为 $A(0,3)$ ， $B(3,4)$ ， $C(2,2)$ 。



(第 20 题 图)

(1) 作出 $\triangle ABC$ 向下平移 4 个单位长度得到的 $\triangle A_1B_1C_1$ ，并写出点 C_1 的坐标；

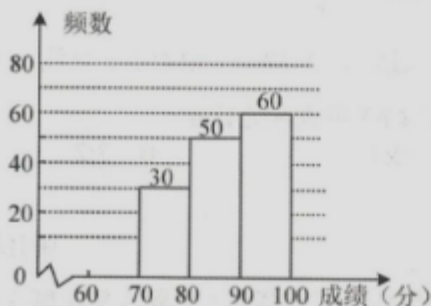
(2) 以点 B 为位似中心，在网格内将 $\triangle ABC$ 放大为原图形的 2 倍，得到 $\triangle A_2BC_2$ ，并写出点 A_2 的坐标。

21. (本题 8 分) 爱护环境，人人有责。垃圾的分类回收不仅能够减少环境污染，美化家园，甚至能够变废为宝，节约能源。为增强学生垃圾分类意识，推动垃圾分类知识进校园，某中学组织了“垃圾分类”知识竞赛，根据竞赛结果，抽取了 200 名学生的成绩（满分为 100 分，大于等于 80 分为优秀）进行统计，绘制了如下尚不完整的统计图表：

200 名学生知识竞赛成绩的频数表

组别	频数	频率
$60 \leq x < 70$	a	0.3
$70 \leq x < 80$	30	0.15
$80 \leq x < 90$	50	b
$90 \leq x \leq 100$	60	0.3

200 名学生知识竞赛成绩的频数直方图



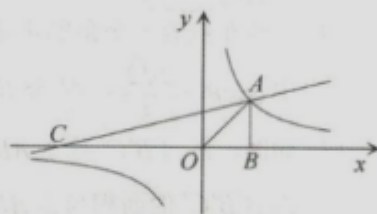
请结合图表解决下列问题：

(1) 频数表中， $a = \underline{\quad}$ ， $b = \underline{\quad}$ ；

(2) 请将频数直方图补充完整；

(3) 若该校共有 2000 名学生，请估计本次“垃圾分类”知识竞赛成绩为“优秀”的学生人数。

22. (本题 8 分) 如图，已知 $\text{Rt}\triangle AOB$ 的锐角顶点 A 在反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象上，且 $\triangle AOB$ 的面积为 2，若 $OB = 2$ 。



(第 22 题 图)

(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 一条直线过 A 点且交 x 轴于 C 点，已知 $\tan \angle ACB = \frac{1}{4}$ ，

求直线 AC 的解析式。

23. (本题 8 分) 为促进乡村振兴发展，着力打造乡村旅游重点村。广西某旅游村在今年的国庆假期间，接待游客达 2 万人次，预计后年的国庆节假期间接待游客有望达到 2.88 万人次，该旅游村内有一家特色米粉店希望在国庆假期间卖米粉获得好的收益，经测算可知，该米粉的成本价为每份 10 元；若每份卖 15 元，平均每天将销售 128 份；若价格每提高 1 元，则平均每天少销售 8 份；每天店内所需其他各种费用支出 232 元。

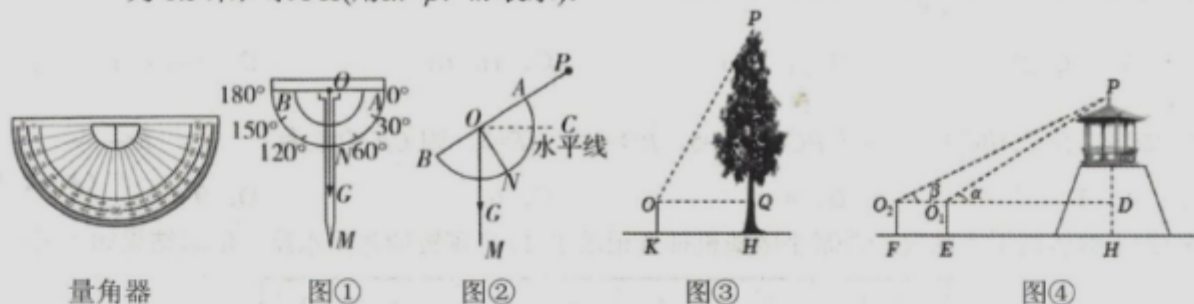
- (1) 求预计该景区明、后两年国庆节假期期间游客人次的年平均增长率；
 (2) 为了更好地维护景区形象，物价局规定每份米粉售价不得超过 20 元，当每份米粉提高多少元时，店家才能实现每天净利润 600 元。（提示：净利润=总收入-总成本-其他各种费用）

24. (本题 6 分) 【阅读与理解】已知整数 a 与 b 的平方之和可以表示为 a^2+b^2 ，现有两个连续的正整数：

- (1) 若这两个连续的正整数中，较小的数是 3，求它们的平方之和是多少？
 (2) 若这两个连续正整数的平方之和是 41，求这两个正整数分别是多少？

25. (本题 10 分) 【综合与实践】某数学兴趣小组自制测角仪到公园进行实地测量，活动过程如下：

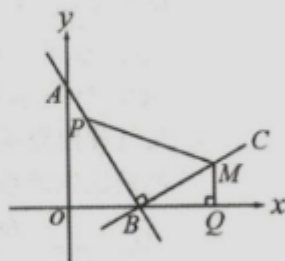
- (1) **探究原理**：制作测角仪时，将细线一端固定在量角器圆心 O 处，另一端系小重物 G 。测量时，使支杆 OM 、量角器 90° 刻度线 ON 与铅垂线 OG 相互重合(如图①)，绕点 O 转动量角器，使观测目标 P 与直径两端点 A, B 共线(如图②)，此目标 P 的仰角 $\angle POC = \angle GON$ 。请说明两个角相等的理由。
 (2) **实地测量**：如图③，公园广场上有一棵树，为了测量树高，同学们在观测点 K 处测得顶端 P 的仰角 $\angle POQ = 60^\circ$ ，观测点与树的距离 KH 为 5 米，点 O 到地面的距离 OK 为 1.5 米；求树高 PH 。（ $\sqrt{3} \approx 1.73$ ，结果精确到 0.1 米）
 (3) **拓展探究**：公园高台上有一凉亭，为测量凉亭顶端 P 距离地面高度 PH (如图④)，同学们讨论，决定先在水平地面上选取观测点 E, F (E, F, H 在同一直线上)，分别测得点 P 的仰角 α, β ，再测得 E, F 间的距离 m ，点 O_1, O_2 到地面的距离 O_1E, O_2F 均为 1.5 米；求 PH (用 α, β, m 表示)。



(第 25 题 图)

26. (本题 12 分) 如图，在平面直角坐标系中，一次函数 $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 与坐标轴分别交于 A, B 两点，直线 $BC \perp AB$ 于点 B 。点 P 从点 A 出发沿射线 AB 以每秒 1 个单位长度的速度运动；点 Q 从点 B 出发沿 x 轴的正方向以每秒 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 单位长度的速度运动，过 Q 作 QM 垂直 x 轴交 BC 于点 M ，连接 PM 。设点 P 与点 Q 同时出发，运动时间为 t 秒。

- (1) 求 $\angle OAB$ 的度数；
 (2) 当 t 的值是多少时， $\triangle PBM$ 是等腰直角三角形；
 (3) 当 $\triangle PBM$ 与 $\triangle QBM$ 相似时，求此时点 P 的横坐标。



(第 26 题 图)

2023 年秋季学期教学质量调研 九年级数学参考答案及评分标准

一、选择题（每小题 3 分，共 36 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	D	C	A	B	D	B	D	B	C

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

13. $\frac{3}{2}$; 14. 50000; 15. 15; 16. $\frac{1}{3}$; 17. 2:3; 18. AD.

三、解答题（共 66 分）

19. (1) 解：原方程化为 $x^2 - x = 4x$

因而 $x^2 - 5x = 0$, 1 分

把方程左边因式分解，得 $x(x-5) = 0$, 2 分

由此得 $x = 0$ 或 $x - 5 = 0$, 3 分

解得 $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ 4 分

(2) 解： $1 - 2\sin^2 60^\circ$

$= 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, 1 分

$= 1 - 2 \times \frac{3}{4}$, 2 分

$= 1 - \frac{3}{2}$, 3 分

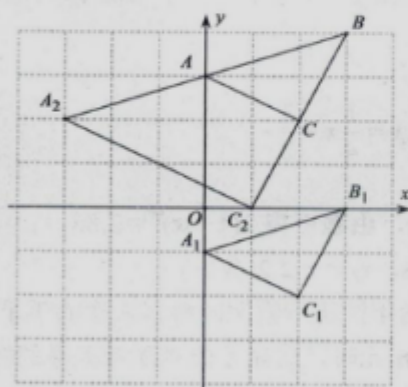
$= -\frac{1}{2}$, 4 分

20. 解：(1) 如图， $\triangle A_1B_1C_1$ 就是所求作图形， 2 分

$C_1(2, -2)$ 1 分

(2) 如图， $\triangle A_2BC_2$ 就是所求作图形， 2 分

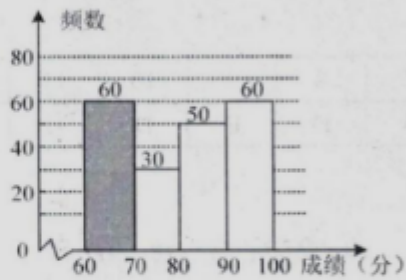
$A_2(-3, 2)$ 1 分



(第 20 题 图)

21. 解：(1) 填空 $a = 60$ ， $b = 0.25$ ； 2 分

(2) 补全频数直方图如下：



..... 2 分

(3) $\frac{50+60}{200} \times 2000 = 1100$ (人) 3 分

答：估计本次“垃圾分类”知识竞赛成绩为“优秀”的学生人数为 1100 人。..... 1 分

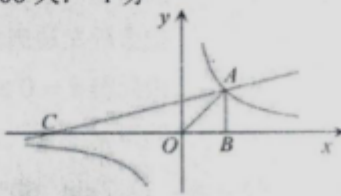
22. 解：(1) $\because \triangle AOB$ 为直角三角形， $\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OB \cdot AB$,

$\because S_{\triangle AOB} = 2, OB = 2, \therefore AB = 2$,

\therefore 点 A 的坐标为 $(2,2)$, 1 分

$\because A(2,2)$ 在 $y = \frac{m}{x}$ 上， $\therefore m = 2 \times 2 = 4$, 2 分

\therefore 反比例函数的解析式为 $y = \frac{4}{x}$ 3 分



(2) 在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\because \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{4}$,

$\because AB = 2, \therefore BC = 8$, 1 分

$\because OB = 2, \therefore OC = 6$, 2 分

$\therefore C(-6,0)$ 3 分

设 AC 的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，将 $A(2,2), C(-6,0)$ 代入 $y = kx + b$ ，得 $\begin{cases} 2k + b = 2 \\ -6k + b = 0 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = \frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$, 4 分

$\therefore AC$ 的解析式为： $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$ 5 分

23. 解：(1) 设年平均增长率为 x ，由题可得 $2(1+x)^2 = 2.88$, 1 分

解得： $x_1 = 0.2 = 20\%$, $x_2 = -2.2$ (舍去) 2 分

答：预计该景区明、后两年国庆节假期期间游客人次的年平均增长率为 20%。..... 3 分

(2) 设当每份米粉提高 m 元时，店家才能实现每天净利润 600 元，由题可得：

$(15+m-10)(128-8m) - 323 = 600$, 1 分

即 $m^2 - 11m + 24 = 0$, 解得 $m_1 = 3, m_2 = 8$ 2 分

当 $m_1 = 3$ 时, 售价为 $15 + 3 = 18 < 20$, 满足题意; 3 分

当 $m_2 = 8$ 时, 售价为 $15 + 8 = 23 > 20$, 不满足题意; 4 分

答: 每份米粉提高 3 元时, 店家实现每天净利润 600 元. 5 分

24. 解: (1) 由题可得: $3^2 + 4^2 = 25$ 2 分

(2) 设较小的整数是 x , 则较大的整数是 $x + 1$, 1 分

由题可得: $x^2 + (x + 1)^2 = 41$, 2 分

方程可化为: $x^2 + x - 20 = 0$, 3 分

把方程左边因式分解, 得: $(x - 4)(x + 5) = 0$, 4 分

解得: $x_1 = 4, x_2 = -5$ (舍去), 5 分

答: 这两个正整数分别是 4 和 5. 6 分

【注: (2) 中第 4 分段也可用配方法求解, 按照步骤赋分.】

25. 解: (1) $\because \angle COG = \angle GON + \angle CON = 90^\circ$, 1 分

$\angle AON = \angle POC + \angle CON = 90^\circ$ 2 分

$\therefore \angle GON + \angle CON = \angle POC + \angle CON$, 即 $\angle POC = \angle GON$ 3 分

(2) 由题意得: $KH = OQ = 5$ 米, $OK = QH = 1.5$ 米, $\angle OQP = 90^\circ$, $\angle POQ = 60^\circ$,

在 $Rt\triangle POQ$ 中 $\tan \angle POQ = \frac{PQ}{OQ} = \frac{PQ}{5} = \sqrt{3}$, 1 分

$\therefore PQ = 5\sqrt{3}$, 2 分

\therefore 树高 $PH = PQ + QH = 5\sqrt{3} + 1.5 \approx 10.2$ (米) 3 分

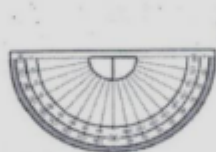
(3) 由题意得: $O_1O_2 = EF = m, O_1E = O_2F = DH = 1.5m$,

由图得: $\tan \beta = \frac{PD}{O_2D}, \tan \alpha = \frac{PD}{O_1D}$, 从而有 $O_2D = \frac{PD}{\tan \beta}, O_1D = \frac{PD}{\tan \alpha}$, 1 分

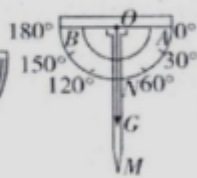
$\therefore EF = O_1O_2 = O_2D - O_1D, \therefore m = \frac{PD}{\tan \beta} - \frac{PD}{\tan \alpha}$ 2 分

$\therefore PD = \frac{m \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$, 3 分

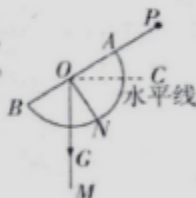
$\therefore PH = PD + DH = \frac{m \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} + 1.5$ (米) 4 分



量角器



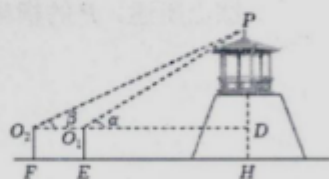
图①



图②



图③



图④

26. 解: (1) 由一次函数 $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 可求得 $A(0, 2\sqrt{3}), B(2, 0)$ 1 分

$$\because \tan \angle OAB = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore \angle OAB = 30^\circ. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) $\because \angle OAB = 30^\circ, \angle AOB = 90^\circ,$

$$\therefore \angle ABO = 60^\circ, AB = 4, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$\because AB \perp BC, QM \perp x \text{ 轴}, \therefore \angle MBQ = 30^\circ,$$

$$\text{设 } AP = t, BQ = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \text{ 则 } BP = 4 - t \text{ 或 } BP = t - 4, BM = t, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{令 } BP = BM, \text{ 即 } t = 4 - t \text{ 或 } t = t - 4 \text{ (无解)} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

解得 $t = 2,$

$$\therefore t \text{ 的值是 } 2 \text{ 时, } \triangle PBM \text{ 是等腰直角三角形.} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(3) 当点 P 在线段 AB 上时,

①若 $\angle BPM = 30^\circ$, 则 $\triangle PBM \sim \triangle BQM$,

$$\frac{MB}{PB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{t}{4-t}, \text{ 解得 } t = \frac{4}{\sqrt{3}+1} = 2(\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{3}-2, \dots\dots\dots 1 \text{ 分 (未化简不扣分)}$$

$$\text{则 } AP = t = 2\sqrt{3}-2, P \text{ 的横坐标为 } \frac{1}{2}AP = \sqrt{3}-1. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

②若 $\angle BPM = 60^\circ$, 则 $\triangle MPB \sim \triangle BMQ$,

$$\frac{MB}{PB} = \sqrt{3} = \frac{t}{4-t}, \text{ 解得 } t = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = 6-2\sqrt{3}$$

$$\text{则 } AP = t = 6-2\sqrt{3}, P \text{ 的横坐标为 } \frac{1}{2}AP = 3-\sqrt{3}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

当点 P 在线段 AB 的延长线上时,

③若 $\angle BPM = 60^\circ$, 则 $\triangle PBM \sim \triangle BQM$,

$$\frac{MB}{PB} = \sqrt{3} = \frac{t}{t-4}, \text{ 解得 } t = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = 6+2\sqrt{3}$$

$$\text{则 } AP = t = 6+2\sqrt{3}, P \text{ 的横坐标为 } \frac{1}{2}AP = 3+\sqrt{3}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

④若 $\angle BPM = 30^\circ$, 则 $\triangle PBM \sim \triangle QBM$,

$$\frac{MB}{PB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{t}{t-4}, \text{ 解得 } t = \frac{-4}{\sqrt{3}+1} < 0 \text{ (舍去)}$$

综上所述, P 的横坐标为 $\sqrt{3}-1, 3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

