**北京市西城区2024—2025学年度第一学期期末试卷**

**九年级数学**

**注意事项**

**1.本试卷共7页，共两部分，28道题.满分100分.考试时间120分钟.**

**2.在试卷和答题卡上准确填写学校、班级、姓名和学号.**

**3.试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效.**

**4.在答题卡上，选择题、作图题用2B铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答.**

**5.考试结束，请将考试材料一并交回.**

**第一部分选择题**

**一、选择题（共16分，每题2分）第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.**

1. 抛物线的对称轴是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

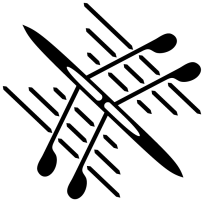
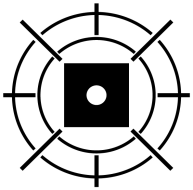
【解析】

【分析】本题考查二次函数的性质，根据题目中抛物线的顶点式，可以直接写出它的对称轴，本题得以解决．

【详解】解：抛物线的对称轴是直线，

故选：A．

2. 下列巴黎奥运会项目标志中，既是中心对称图形又是轴对称图形的是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转180度后与原图重合．根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解．

【详解】解：A、该图形是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

B、该图形既是轴对称图形，也是中心对称图形，符合题意；

C、该图形既不是中心对称图形，也不是轴对称图形，不符合题意；

D、该图形是中心对称图形，不是轴对称图形，不符合题意．

故选：B．

3. 点，在抛物线上，则，的大小关系是（ ）

A.  B.  C.  D. 无法判断

【答案】A

【解析】

【分析】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征和二次函数的性质，首先确定抛物线的对称轴，再根据开口方向，根据二次函数的性质即可判断，的大小关系．

【详解】解：∵抛物线，

∴抛物线开口向上，对称轴为直线，

∴在对称轴右侧*y*随*x*的增大而增大，

∴关于对称轴的对称点为，

∵，

∴．

故选：A．

4. 将抛物线平移得到抛物线，下列平移过程正确的是（ ）

A. 向左平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度

B. 向左平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度

C. 向右平移3个单位长度，再向下平移1个单位长度

D. 向右平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度

【答案】D

【解析】

【分析】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，根据函数图象平移的法则解答即可．

【详解】解：将抛物线先向右平移3个单位长度，再向上平移1个单位长度后，得到抛物线．

故选：D．

5. “正六边形”在一些地区园林窗洞的设计中有着广泛的应用，已知半径为的正六边形的窗洞如图所示，那么它的面积是（）



A.  B.  C.  D. 

【答案】D

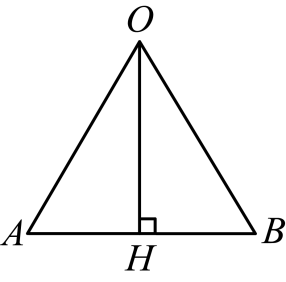
【解析】

【分析】本题主要考查了等边三角形的性质，正六边形的性质，三角函数的计算以及用分割法求面积．连接正六边形的中心与各个顶点，可将正六边形分割成六个全等的等边三角形，先求一个等边三角的面积，即可得到正六边形的面积．

【详解】连接正六边形的中心与各个顶点，可将正六边形分割成六个全等的等边三角形，

因为正六边形的半径等于等边三角形的边长，所以每个等边三角形的边长为，

如图，过*O*点做，交与，



，

是等边三角形，

，

，

那么正六边形的面积为．

故答案选：D．

6. 我国新能源汽车产业为应对全球气候变化、推动低碳发展做出了巨大贡献．根据中国汽车工业协会发布的数据，2024年5月新能源汽车销量约为万辆，2024年7月新能源汽车销量约为万辆，设新能源汽车销量的月平均增长率为，则满足的方程是（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】C

【解析】

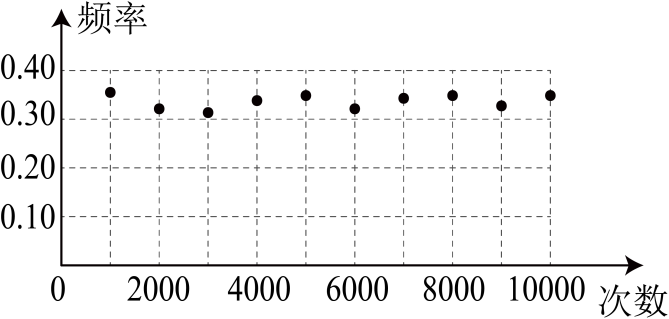
【分析】设新能源汽车销量的月平均增长率为，根据题意，得，解答即可．

本题考查了平均增长率问题，正确列方程解答是解题的关键．

【详解】解：设新能源汽车销量的月平均增长率为，根据题意，得，

故选：C．

7. 某数学兴趣小组做“用频率估计概率”的试验，下图显示的是某一事件发生的频率，该事件可能是（ ）



A. 掷一枚质地均匀的硬币，正面向上

B. 掷一枚质地均匀的骰子，它的六个面上分别刻有1到6的点数，出现点数是2

C. 从只装有2张黑桃和1张红桃（除花色外都相同）的扑克牌盒中随机抽取一张，抽出的牌是红桃

D. 同时掷两枚质地均匀的硬币，一枚硬币正面向上，一枚硬币反面向上

【答案】C

【解析】

【分析】本题主要考查概率公式的应用，用频率估计概率，解答本题的关键是求出各事件发生的概率．根据统计图可知发生的频率接近，得出该事件发生的概率为，然后逐项进行判断即可．

【详解】解：根据图象可知：发生的频率接近，即该事件发生的概率为；

A．掷一枚质地均匀的硬币，正面向上的概率为，故A不符合题意；

B．掷一枚质地均匀的骰子，它的六个面上分别刻有1到6的点数，出现点数是2的概率为，故B不符合题意；

C．从只装有2张黑桃和1张红桃（除花色外都相同）的扑克牌盒中随机抽取一张，抽出的牌是红桃的概率为，故C符合题意；

D．同时掷两枚质地均匀的硬币，一枚硬币正面向上，一枚硬币反面向上的概率，故D不符合题意．

故选：C．

8. 已知，，作射线，使得，作于点，则长的最大值是（ ）

A.  B.  C. 2 D. 

【答案】B

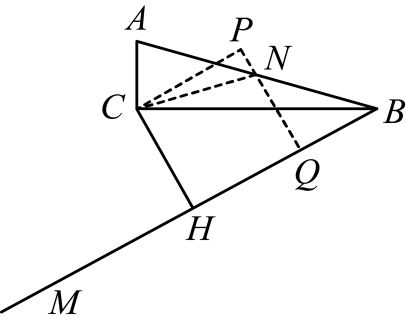
【解析】

【分析】利用分类思想解答，当在的下方时，先取的中点，连接，过点作于点，过点作于点，则四边形是矩形，根据，确定当与重合时，取得最大值，此时取得最大值，最大值为，当在的下方时，过点作于点，取的中点，连接，得，根据，得，

解答即可．

本题考查了直角三角形的性质，矩形的判定和性质，正弦函数的应用，熟练掌握直角三角形的性质是解题的关键．

【详解】解：如图，当在的下方时，取的中点，连接，



∵，，

∴，

过点N作于点Q，

∵，，

∴

∴，

过点C作于点P，

则四边形是矩形，

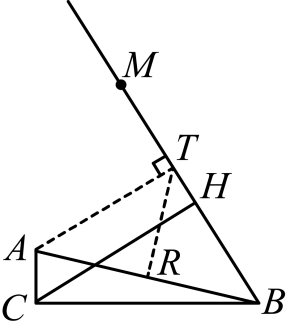
∴，

∵，

∴当P与N重合时，取得最大值，且，

此时取得最大值，最大值为，

当在的上方时，过点作于点，取的中点，连接，



∵，，

∴，

∵，

∴，

∴，

∴，

∵，

∴，

综上所述，最大值为，

故选：B．

**第二部分非选择题**

**二、填空题（共16分，每题2分）**

9. 在平面直角坐标系中，点关于原点的对称点是\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】本题考查了关于原点对称点的坐标，解决本题的关键是掌握好对称点的坐标规律：关于原点对称的点，横坐标与纵坐标都互为相反数。

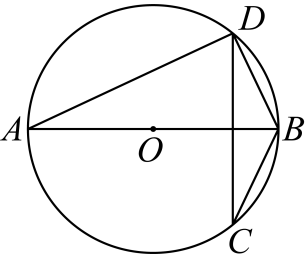
根据“平面直角坐标系中任意一点，关于原点的对称点是，即关于原点的对称点，横纵坐标都变成相反数”解答．

【详解】根据关于原点对称的点的坐标的特点，

∴点关于原点过对称的点的坐标是．

故答案为：

10. 如图，是的直径，是弦，，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_°．



【答案】

【解析】

【分析】本题考查了圆周角定理，正确理解定理，作出辅助线是关键．根据圆周角定理：直径所对的圆周角是直角以及同弧所对的圆周角相等即可求解．

【详解】∵ 是的直径，

，

又 ∵，

．

故答案为：．

11. 已知二次函数满足条件：①有最大值；②它的图象经过点，写出一个满足上述所有条件的二次函数的解析式\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】（答案不唯一）

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的图象和性质，解题的关键是掌握时，函数开口向上，有最小值；时，函数开口向下，有最大值．

【详解】∵二次函数有最大值，

∴二次函数的二次项系数小于0，可设二次函数的解析式为，

又∵它的图象经过点，

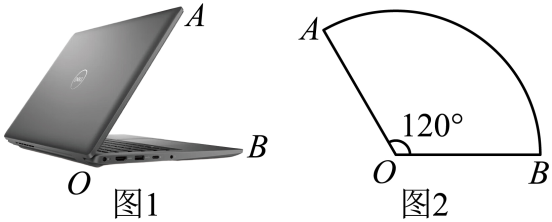
，

，

二次函数的解析式为．

故答案为：（答案不唯一）

12. 如图1，将笔记本电脑平放在桌子上，当电脑闭合时，与重合；当电脑打开时，点运动的过程形成.如图2，若，，则的长是\_\_\_\_\_\_\_（结果保留）．



【答案】

【解析】

【分析】本题主要考查了弧长的计算，熟练掌握弧长公式是解题的关键．根据弧长公式计算可得．

【详解】解：的长为：，

故答案为：．

13. 关于的方程有两个相等的实数根，则的值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】5

【解析】

【分析】本题考查的是一元二次方程根的情况，根据方程有两个相等的实数根时判别式为0即可求解．

直接根据一元二次方程根的判别式列出式子，求解即可．

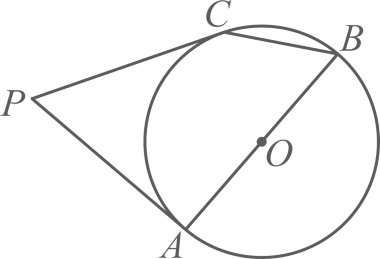
【详解】解：∵方程有两个相等的实数根，

∴，

解得：．

故答案为：5．

14. 如图，是的直径，，是的切线，切点分别为，．若，，则的长是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

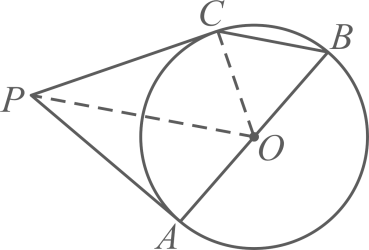


【答案】

【解析】

【分析】本题主要考查圆切线性质，圆周角定理，全等三角形的判定及勾股定理的应用．通过连接，利用切线性质得到垂直关系，证明，得到，再圆周角定理求出，最后在中应用勾股定理求得的长．

【详解】连接，,



，是的切线，

，

又，

（定理），

，

而（圆心角是圆周角的两倍），

，

在中，，

是的直径，，



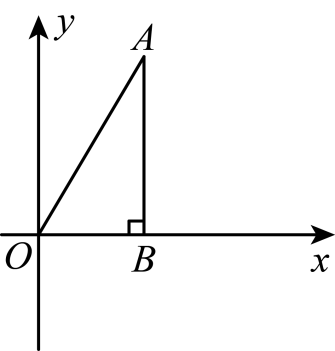




，

故答案为：．

15. 如图，在平面直角坐标系中，点，，，将绕点顺时针旋转得到，若点的对应点恰好在轴上，则点的坐标是\_\_\_\_\_\_\_\_\_，点的对应点的坐标是\_\_\_\_\_\_\_\_．



【答案】 ①.  ②. 

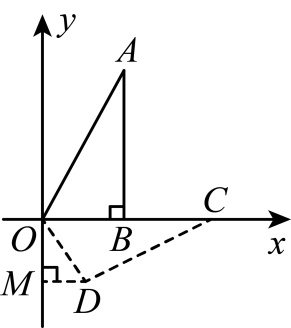
【解析】

【分析】本题考查了直角坐标系中点的坐标，30度直角三角形的性质，旋转的性质，先由30度直角三角形的性质得，，再由旋转的性质得，进而得，，，，再由30度直角三角形的性质得，，继而可得答案．

【详解】解：∵点，，，

∴，，，

如图，点的对应点恰好在轴上，过点*D*作轴于点*M*，



由旋转的性质得，

∴，，，，

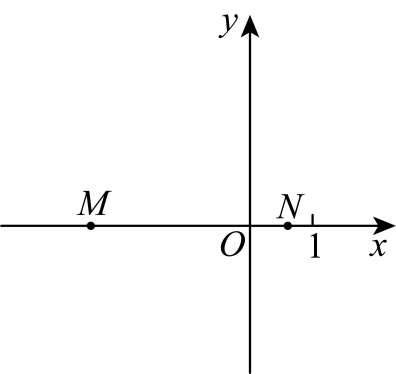
∴，，

∴，，

∴，，

故答案为：，．

16. 如图，在平面直角坐标系中，已知点，其中，抛物线经过点和，以下四个结论：



①；②；③关于的一元二次方程无实根；④点，在抛物线上且在对称轴的同侧，当时，总有时，则．其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】②④

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数图象与性质，抛物线上点的坐标的特征，对称轴，数形结合法，抛物线与轴的交点，二次函数与一元二次方程的联系，一元二次方程的根的判别式，熟练掌握二次函数的性质和二次函数与一元二次方程的联系是解题的关键．

①根据题中二次函数的图像判断开口方向，，以及抛物线与轴的交点，可判断的符号，进而可判断；

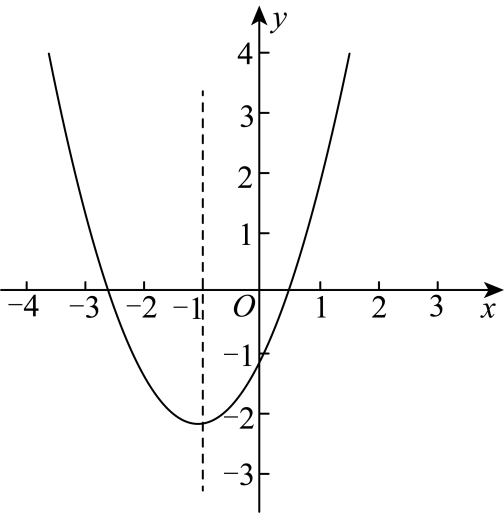
②由二次函数的图象知：当时，，；当时，，两式相加，化简可得

③一元二次方程的判别式，结合的关系与符号，进而可判断；

④设，且在对称轴右侧（在左侧同理），则，

，结合的关系与符号，进而可判断．

【详解】通过读图：



①因为，所以抛物线开口向上，

对称轴，由于，即对称轴，

可得，

抛物线与轴交于负半轴，所以，

综上，，结论①错误；

②： 二次函数的图象与轴交于由图可知，

又，

，

由二次函数的图象可知：

当时， ，

当时，，

两式相加，化简可得，结论②正确；

③一元二次方程的判别式，

因为，所以，

由，可得，所以，方程有两个不相等的实根，

结论③错误；

④设，且在对称轴右侧（在左侧同理），

则，

，

，

，

，

，

，

（在对称轴右侧），

，

又，

，

即，结论④正确．

综上，正确结论的序号是：②④．

**三、解答题（共68分，第17题5分，第18题6分，第19-21每题5分，第22题6分，第23题5分，第24题6分，第25题5分，第26题6分，第27-28题每题7分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．**

17. 解方程：．

【答案】，

【解析】

【分析】本题主要考查了解一元二次方程，解题关键是熟练掌握解一元二次方程的常用方法，如直接开方法、配方法、公式法、因式分解法等．利用公式法解该方程即可．

【详解】解：，，

，

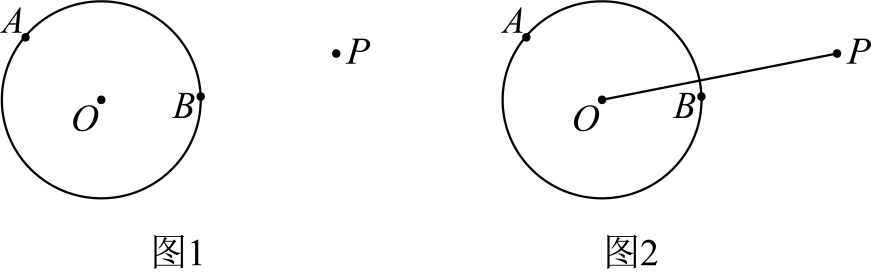
方程有两个不相等的实数根

，

方程的根为，．

18. 已知：如图1，点，在上，点在外．

求作：的切线，且切点在劣弧上．



作法：如图2，

①连接；

②作线段的垂直平分线，交于点；

③以点为圆心，的长为半径画圆，交劣弧于点；

④画直线．直线即为所求．

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明．

证明：连接．

∵是的直径，

∴\_\_\_\_\_\_\_\_（\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_）（填推理的依据）．

∴．

∵是的半径，

∴直线是的切线（\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_）（填推理的依据）．

【答案】（1）图见解析

（2）90，直径所对的圆周角是直角，经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线

【解析】

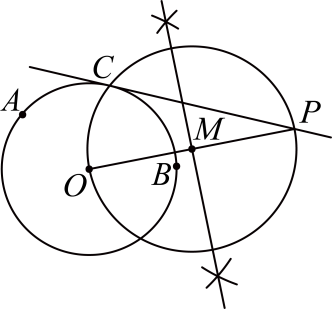
【分析】本题考查了线段垂直平分线的尺规作图、圆周角定理、圆的切线的判定定理，熟练掌握圆的切线的判定定理是解题关键．

（1）根据题中的作法步骤：根据线段垂直平分线和圆的画法即可得；

（2）先根据圆周角定理可得，再根据圆的切线的判定定理即可得证．

【小问1详解】

解：使用直尺和圆规，依作法补全图形如下：

．

【小问2详解】

证明：连接．

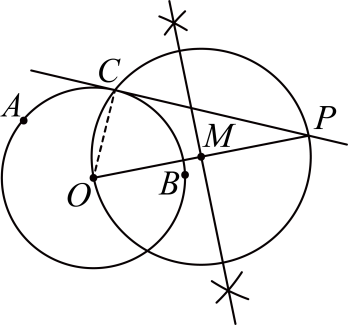
∵是的直径，

∴（直径所对的圆周角是直角）．

∴．

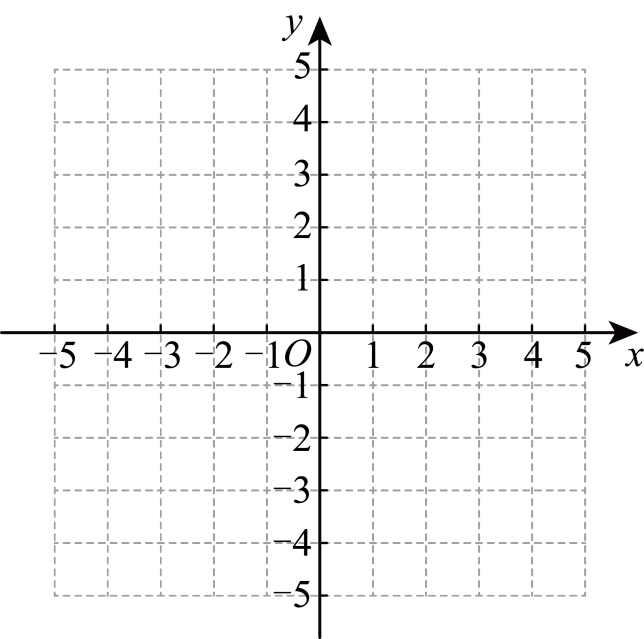
∵是的半径，

∴直线是的切线（经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线）．



故答案为：90，直径所对的圆周角是直角，经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线．

19. 已知二次函数．



（1）将化成的形式；

（2）在平面直角坐标系中画出此函数的图象；

（3）当时，结合图象，直接写出的取值范围．

【答案】（1）

（2）见解析 （3）

【解析】

【分析】本题主要考查了二次函数的顶点式、二次函数的图象、二次函数的性质等知识点，准确画出二次函数的图象成为解答本题的关键．

（1）运用配方法将原解析式化为顶点式即可；

（2）根据（1）所得的顶点式解析式，利用五点作图法直接画出图象即可；

（3）根据函数图象确定当时对应*x*的取值范围即可．

【小问1详解】

解：



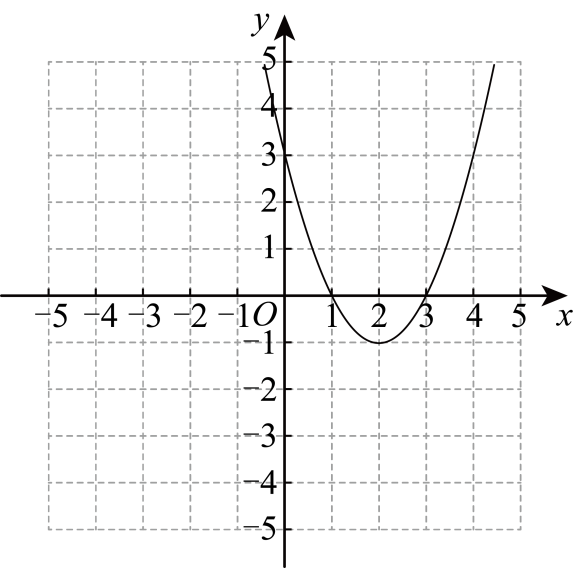
；

【小问2详解】

解：列表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | … | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
| *y* | … | 3 | 0 |  | 0 | 3 | … |

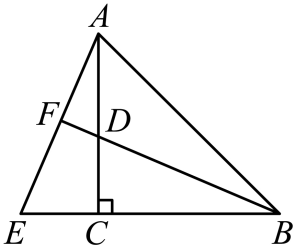
图象如图

；

【小问3详解】

解：由图象可得，当时，．

20. 如图，中，，，点是边上一点，连接，将绕点旋转得到，点，，在同一条直线上，延长交于点．



（1）求的度数；

（2）若，求证：．

【答案】（1）

（2）证明见解析

【解析】

【分析】本题考查了旋转的性质，等腰三角形的判定和性质等知识，解题的关键是：

（1）根据旋转的性质得出，则，结合可得出，即可求解；

（2）根据全等三角形的性质得出，，则可求出，根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理可求出，则，根据等角对等边可得出，然后根据三线合一即可得证。

【小问1详解】

解：∵将绕点旋转得到，

∴.

∴.

∵，

∴.

∵，

∴.

∴.

【小问2详解】

证明：∵，

∴，.

∵，

∴，

∴.

∵中，，，

∴，

∴，

∴.

∵，

∴，

∴.

21. 已知关于的方程．

（1）求证：方程总有两个实数根：

（2）若方程的一个根比另一个根大3，求的值．

【答案】（1）证明见解析

（2）或

【解析】

【分析】此题主要考查了一元二次方程的判别式及根与系数的关系，解题的关键是利用根与系数的关系建立关于的方程解决问题．

（1）利用一元二次方程的根的判别式即可求解；

（2）利用根与系数的关系建立关于的方程即可求解．

【小问1详解】

证明：，

因为，所以，

所以方程总有两个实数根．

【小问2详解】

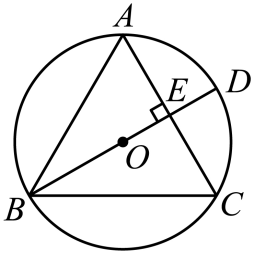
解：解方程，得，

整理，得或，

∵方程的一个根比另一个根大3，∴或，

∴或．

22. 如图，是的外接圆，，直径，垂足是．



（1）求证：是等边三角形；

（2）若，求的长．

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

【分析】（1）根据垂径定理得出，结合已知以及弧、弦的关系可得出，即可得证；

（2）根据等边三角形的性质和垂径定理、圆周角定理等可求出，，根据含的直角三角形的性质得出，然后在中根据勾股定理求解即可．

【小问1详解】

证明：∵直径，垂足是，

∴

∵，

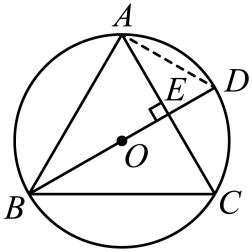
∴，

∴

∴是等边三角形．

【小问2详解】

解：连接，如图．



∵是等边三角形，

∴，．

∵直径，垂足是，

∴，．

∵，

∴在中，．

∴．

由勾股定理得，即，

解得．

【点睛】本题考查了垂径定理，弧、弦的关系，圆周角定理，等边三角形的判定与性质以及勾股定理等，熟练掌握上述知识并利用数形结合的思想是解题关键．

23. 在一个不透明的口袋内装有三个完全相同的小球，把它们分别标号为，，1．小红和小明进行摸球游戏：小红先从口袋中随机摸取一个小球，记下其标号后放回并摇匀，接着小明从口袋中随机摸取一个小球，记下其标号．

（1）用树状图或列表法表示这个摸球游戏的所有结果；

（2）规定：若，则小红获胜；若，则小明获胜．

①当时，判断小红和小明谁获胜的可能性大，并说明理由；

②如果小红获胜的可能性比小明大，直接写出的取值范围．

【答案】（1）见解析 （2）①小明获胜的可能性大，理由见解析；②

【解析】

【分析】此题考查了列表法或树状图法求概率．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

（1）根据题意列出图表，得出所有等可能的情况数即可；

（2）①根据概率公式求出小明和小红获胜的概率，再进行比较，即可得出答案；

②如果小红获胜的可能性比小明大，则，解不等式即可得出答案．

【小问1详解】

解：列表如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | *m* | 1 |
|  |  |  |  |
| *m* |  |  |  |
| 1 |  |  |  |

共有9种等可能的情况数；

【小问2详解】

解：①小明获胜的可能性大，理由如下：

当时，，，，

∴的情况有4种，概率为，

的情况有5种，概率为，

∵，则小红获胜；若，则小明获胜，，

∴小明获胜的可能性大；

②∵由（1）可得9种情况中，，，满足，满足，

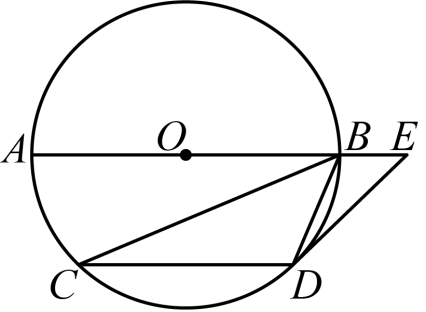
∴如果小红获胜的可能性比小明大，则剩下5种情况中至少有4个满足，

∴，，

解得，

即如果小红获胜的可能性比小明大，的取值范围为．

24. 如图，是的直径，弦，过点作的切线交的延长线于点，连接，．



（1）求证：；

（2）若，，求的长．

【答案】（1）证明见解析

（2）

【解析】

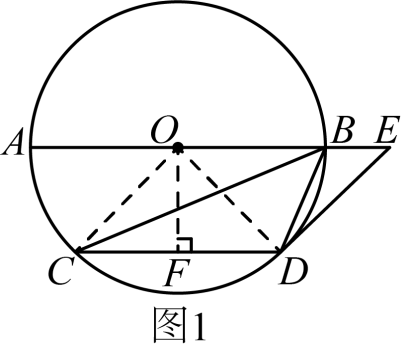
【分析】本题考查了切线的性质，圆周角定理，垂径定理，正确作出辅助线是解题关键．

（1）作于点，连接，，先由平行的性质易得，再由切线的性质得，进而得，即可得，再由垂径定理和圆周角定理可得，，继而可得结论；

（2）作于点，设的半径为，则，，由勾股定理列方程得，解方程得，进而可得、的值，再由勾股定理可得的值，最后由可得答案．

【小问1详解】

证明：作于点，连接，，如图1，



∴，

∵，

∴，

∴，

∴，

∵是的切线，是切点，

∴，

∴，

∴，

∵，

∴，

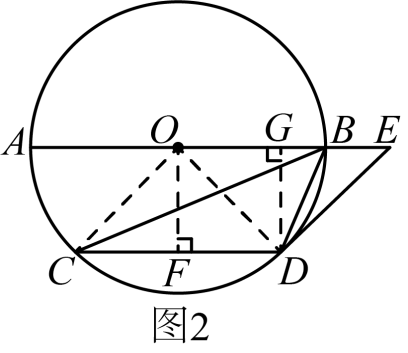
∵，

∴，

∴；

【小问2详解】

解：作于点，如图2



∵，于点，

∴，，

∴四边形为矩形，

∴，

设的半径为，则，

∵，

∴，

∵在中，，，

∴，

解得，

∴，

∵，

∴，

∴在中，，

∴．

25. 通常情况下，人服药后药会被人体吸收，同时人体血液中的药物浓度（简称血药浓度）也会随着时间的推移而发生波动．经研究发现，血药浓度（单位：）与时间（单位：h）满足某种函数关系．假设某位患者第一次服用某药后的血药浓度与时间近似满足函数关系，下表记录了该患者第一次服用该药后的血药浓度与时间的几组对应值：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| （） |  |  |  |  |  |  |  |
| （） |  |  |  |  |  |  |  |

（1）求这位患者第一次服用该药后的血药浓度与时间满足的函数关系；

（2）这位患者第一次和第二次服药间隔的时间为小时，两次分别服用相同剂量的该药产生的体内血药浓度随时间的推移而发生的波动相同．若两次服药后的血药浓度波动有重叠时，血药总浓度是这两次血药浓度的和，且该药引起中毒的最低血药总浓度为．

①当时，判断该患者是否存在中毒风险，并说明理由；

②当该药的血药浓度不低于时，它对治疗疾病有疗效.若要求该患者既能安全用药，又能对治疗疾病持续有疗效，请直接写出的取值范围．

【答案】（1）

（2）

【解析】

【分析】（）由表格可知二次函数的顶点坐标为，进而可得，再利用待定系数法解答即可；

（）①由题意可得，利用二次函数的性质可得的最大值为，据此即可判断求解；②当时，，可得当时，有最大值为，刚好中毒，即得，当时，可得，，由二次函数的性质可得当时，随的增大而减小，得到，综上即可求解；

本题考查了待定系数法求二次函数解析式，二次函数的应用，掌握二次函数的性质是解题的关键．

【小问1详解】

解：∵时，；时，，

∴二次函数的对称轴为直线，

∴二次函数的顶点坐标为，

∴，

把代入得，，

解得，

∴患者第一次服用该药后的血药浓度与时间满足的函数关系为；

【小问2详解】

解：①患者存在中毒风险，理由如下：

∵患者第一次和第二次服药间隔的时间为小时，

∴血药总浓度，

∴，

∵，

∴当时，有最大值为，

∵，

∴存在中毒风险；

②由①知，当时，存在中毒风险，

当时，，

此时，当时，有最大值为，刚好中毒，

∴，

当时，解得，，

∵，

∴当时，随的增大而减小，

∵，

∴，

综上，的取值范围为．

26. 在平面直角坐标系中，点，是抛物线上的两个不同点．

（1）当时，有，求的值；

（2）若，当时，都有，求的取值范围．

【答案】（1）

（2）或

【解析】

【分析】本题考查二次函数的图象和性质，二次函数图象上点的坐标特征，掌握二次函数的图象和性质是求解本题的关键．

（1）由题意，根据，得出*A*、*B*两点关于对称轴对称，再由中点坐标公式可得解．

（2）利用二次函数的图象和性质判断即可．

【小问1详解】

解：抛物线的对称轴为

∵，

∴点，关于直线对称.

∴，

∵，

∴；

【小问2详解】

解：∵，

∴；

①当时，随着的增大而减小，

∵当时，都有，

∴，

∴，

∴；

②当时，随着的增大而增大，

∴点关于直线的对称点的坐标是.

∵当时，都有，

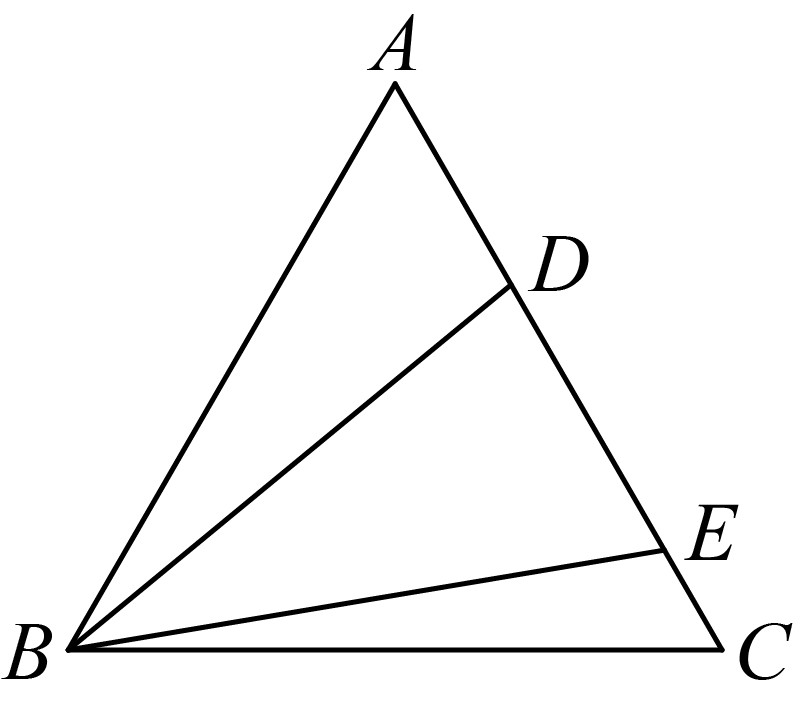
∴，

∴.

综上，的取值范围是或.

27. 等边中，点是边上的一个动点（点不与点，重合），作射线交射线于点，且，将线段绕点逆时针旋转得到线段，作于点，分别交，于点，，连接．

（1）如图，若，



①依题意补全图形；

②用等式表示线段，，之间的数量关系，并证明；

（2）若等边的边长为，直接写出线段长的最小值．

【答案】（1）①见解析②见解析

（2）

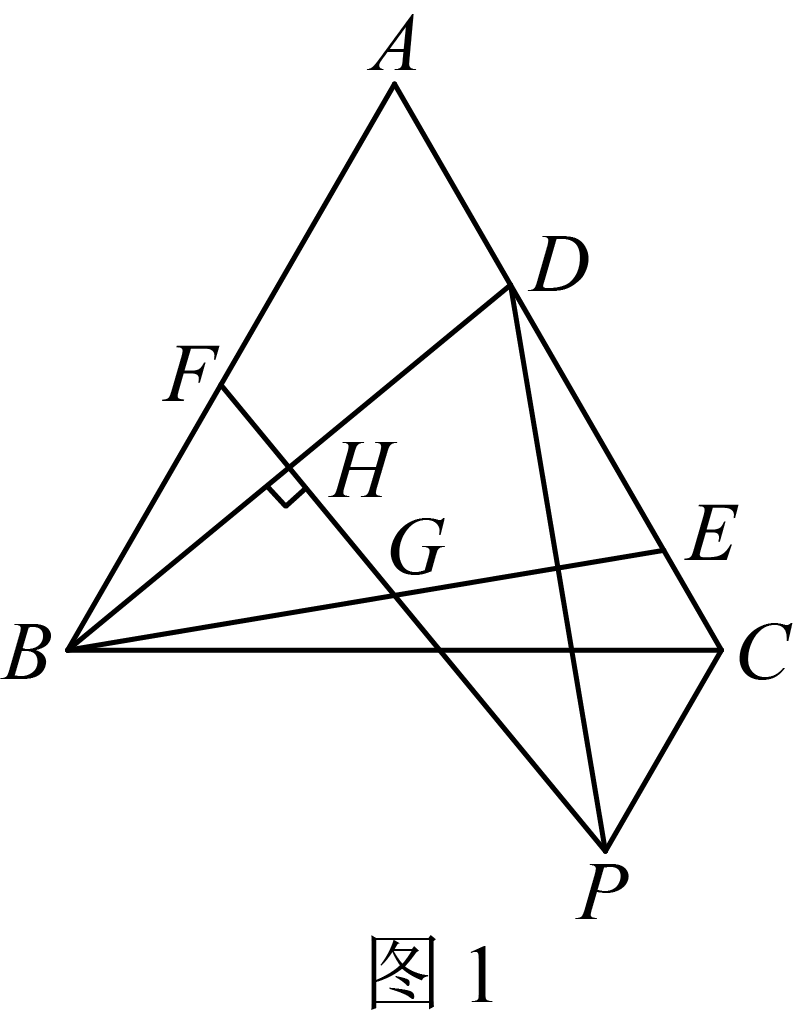
【解析】

【分析】（1）①根据题意补全图形即可②先根据等边三角形和旋转的性质得到一些边和角的关系，通过证明，将转化为，同理再证明，将转化为，最终得出；

（2）设和的交点为*Q*，在含有角的直角三角形中，利用三角函数和勾股定理求出与的关系，由等边三角形性质，问题就转化为当为垂线段最短，从而确定的长有最小值．

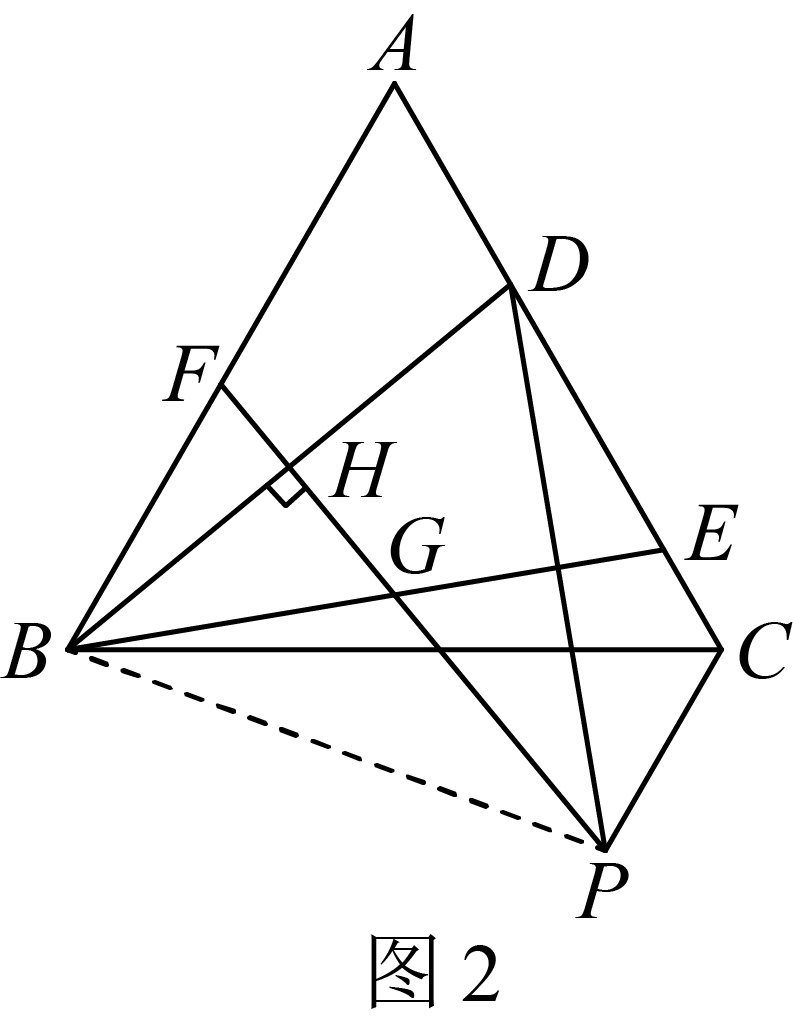
【小问1详解】

①补全图形，如图1所示；



②线段，，之间的数量关系：．

证明：连接，如图2：



∵线段绕点逆时针旋转得到线段，

∴，

∴是等边三角形，

∴，

∵是等边三角形，

∴，

∴，

∴，

∴，

∴，

，

于，

，

设\，则，

，

，

，

，

，

，

，

，

，

，

．

【小问2详解】

设和的交点为*Q*，

由（1）知是等边三角形，

 ，

又，

，

，，

于，

，

，

在，设，

，

，

，

由（1）知是等边三角形，

，

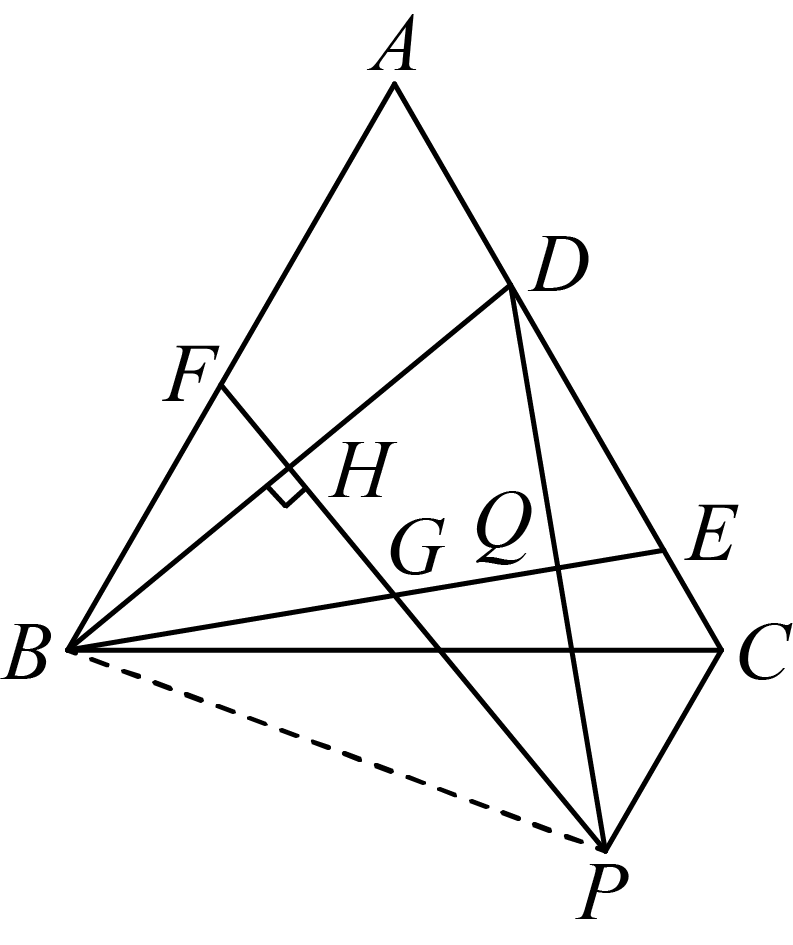
垂线段最短，

∴当时，最小，即最小，此时最小，

在中，，

解得，

线段长的最小值．



【点睛】本题主要考查旋转性质，等边三角形的性质和判定，全等三角形的性质和判定，勾股定理和垂线段最短等性质．熟练掌握相关性质，并灵活运用，正确作图能找到取最值的情况是解题的关键．

28. 给定圆和直线，过圆上一点作直线于点，直线与圆的另一个交点记为，将称为点关于直线的特征值．特别地，当点与点或重合时，点关于直线的特征值为；当点和重合时，点关于直线的特征值为．

在平面直角坐标系中，

（1）圆是以点为圆心，为半径的圆，

若点的坐标是，则它关于轴的特征值是：\_\_\_\_\_\_\_；

点是圆上一动点，将点关于轴的特征值记为，则的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；

（2）已知圆的半径为，直线，若圆上存在关于直线的特征值是的点，直接写出的取值范围．

【答案】（1）；；

（2）或．

【解析】

【分析】（）由题意得，，再根据新定义即可求解；

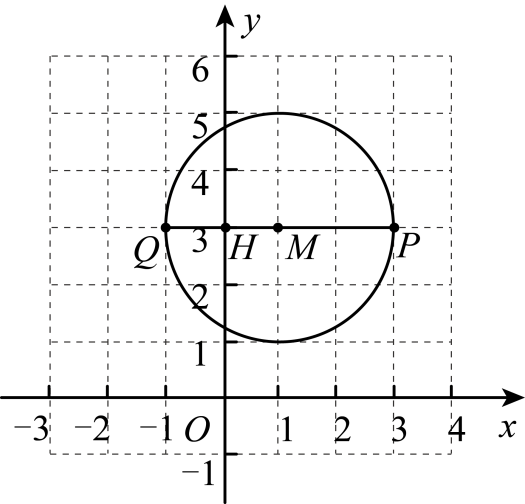
过作于点，直线与圆的另一个交点记为，过作于点，根据新定义即可求解；

（）分当直线在圆的外部时当直线在圆的内部时两种情况分析即可；

本题考查了垂径定理，矩形的判定与性质，勾股定理，一次函数的性质等知识，掌握知识点的应用是解题的关键．

【小问1详解】

解：如图，过作于点，直线与圆的另一个交点记为，

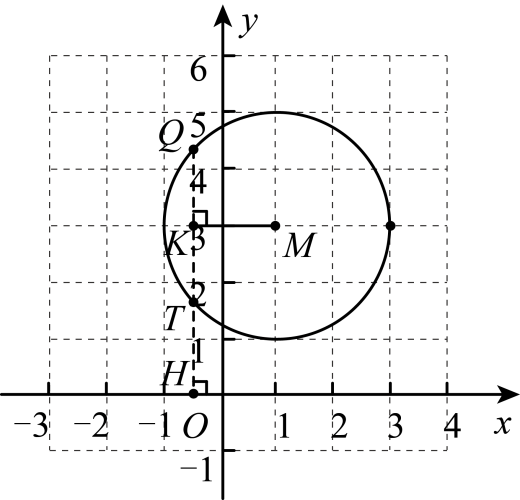


∴，，

∴点关于轴的特征值为，

故答案为；

如图，过作于点，直线与圆的另一个交点记为，过作于点，



∴，，

∴，

∴，，

∴，

∴关于轴的特征值记为，

由题意可得：，

∴当时，；当时，；

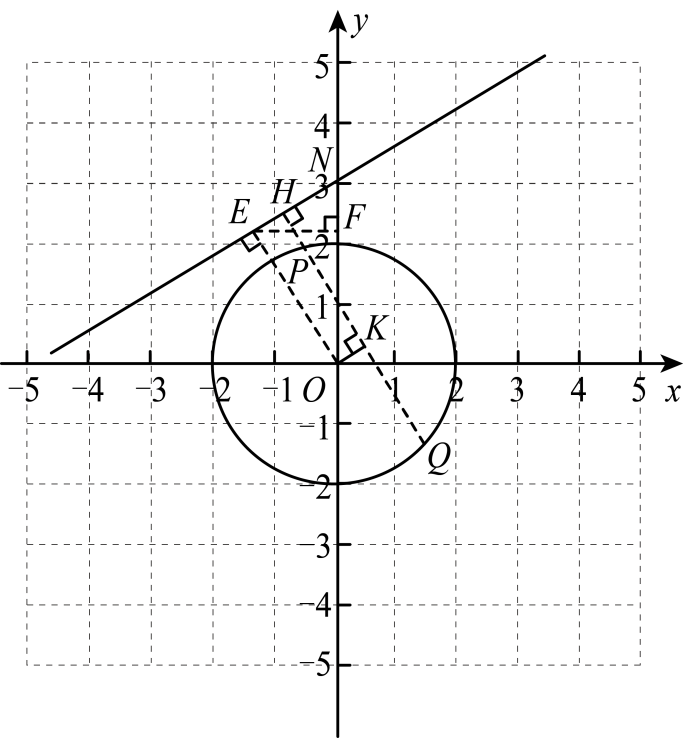
∴的取值范围是，

故答案为：；

【小问2详解】

解：如图，当直线在圆的外部时，过作于点，直线与圆的另一个交点记为，过作于点，过作于点，易得四边形为矩形，

∴，



同理可得：关于直线的特征值是的点，，

∵，

∴，

∴，即，

当时，

由勾股定理得：，

∴，即，

∴，

由勾股定理得：，

∴，

∴，解得：；

当时，

由勾股定理得：，

∴，即，

∴，

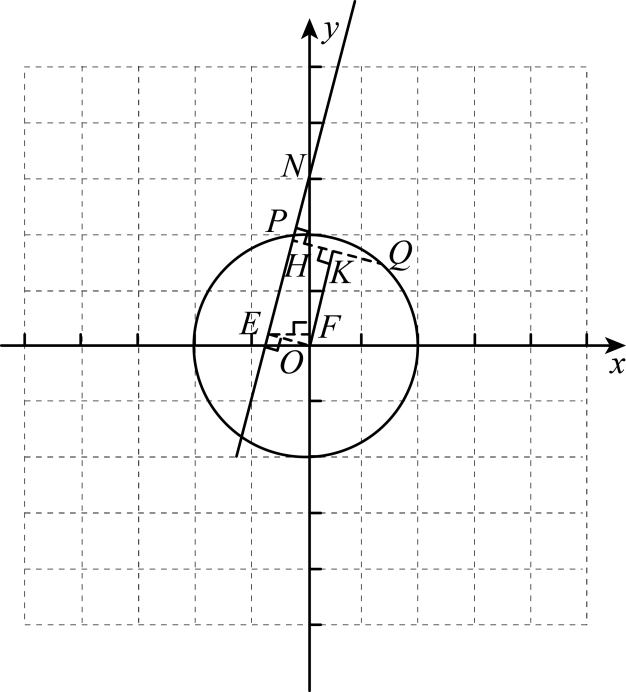
由勾股定理得：，

∴，

∴，解得：；

∴的取值范围为；

如图，当直线在圆的内部时，



同理可得：关于直线的特征值是的点，，

∴，

∵，

∴

∴当时，最大值为，

∴，

同理求得：点，

∴，解得：，

∴的取值范围为，

综上可知：的取值范围为或．